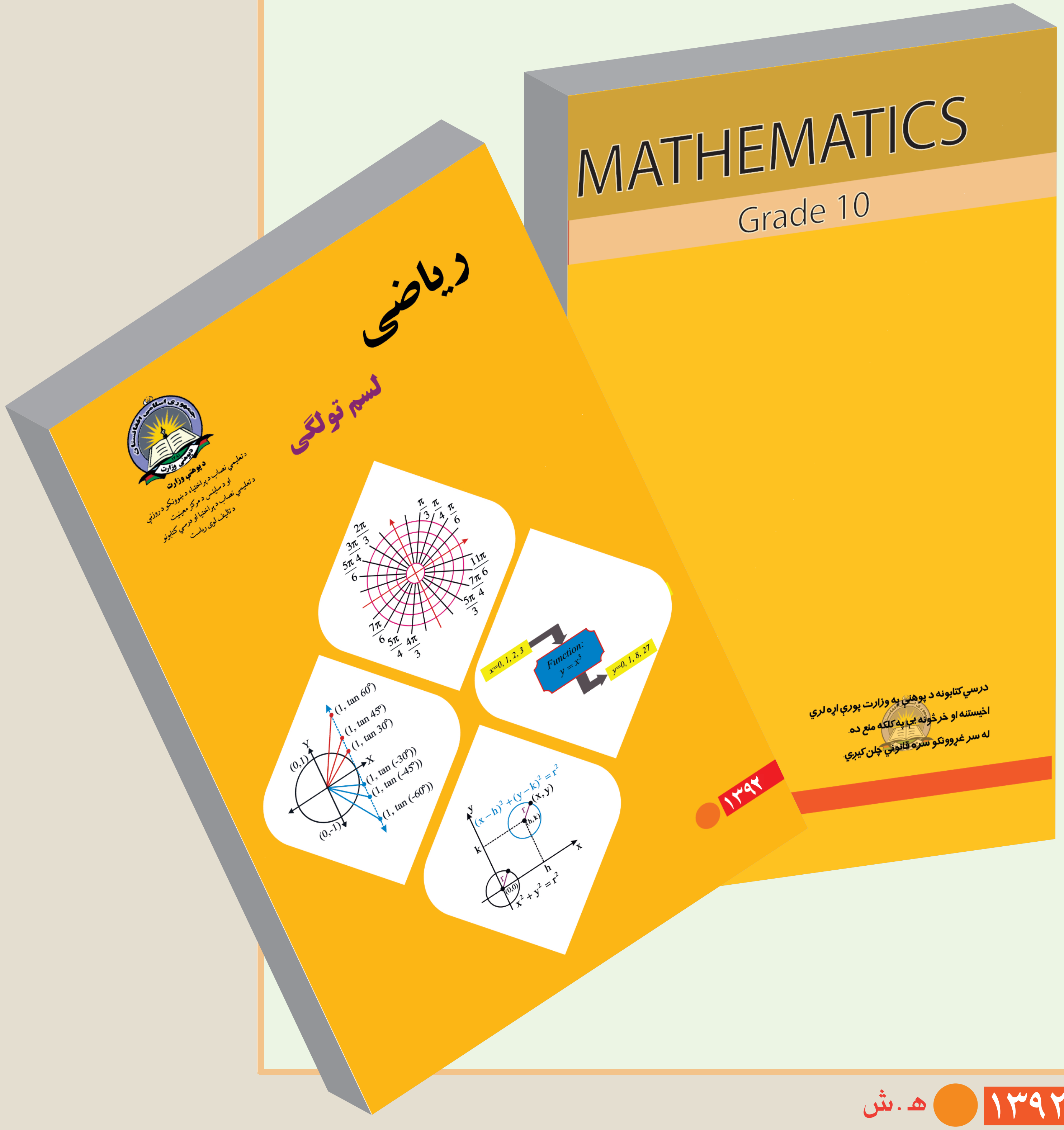
د پوهنې وزارت

د تعليمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او
د ساينس د مرکز معينيت
د تعليمي نصاب د پراختيا او
درسي کتابونو د تاليف عمومي رياست

د رياضي د ښوونکي لارښوود

۱۰ ټولگی



درسي کتابونه د پوهنې په وزارت پورې اړه لري،
اخيستنه او خرڅونه يې په کلکه منع ده.
له سرغړوونکو سره قانوني چلند کيږي.

moe.curriculum@gmail.com

۱۳۹۲ هـ.ش

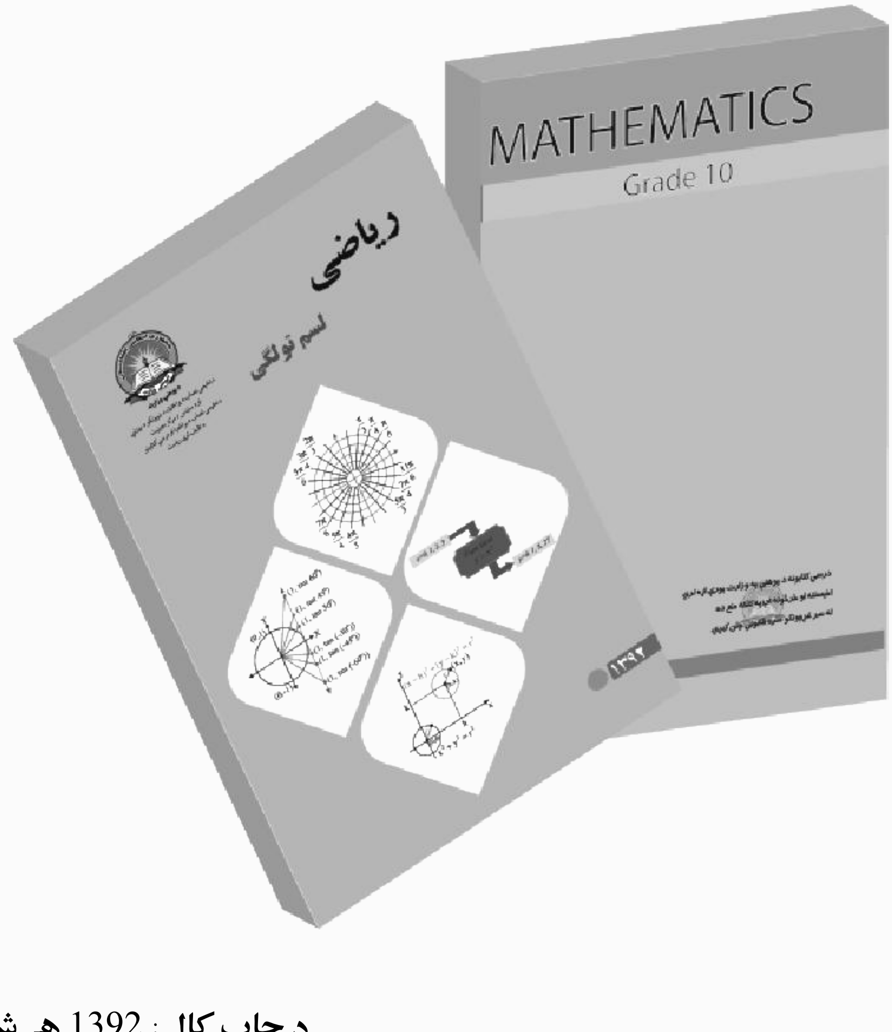
د پوهنې وزارت

د تعليمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساينس مرکز معينيت

د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی رياست

د رياضي د تدريس لارښود

لسم ټولګی



د چاپ کال: 1392 هـ .ش

مولف:

پوهنیار عبدالله صافی د تعلیمي نصاب د پراختیا او د درسي کتابونو د ریاضیاتو متخصص

علمي او مسلکي ایډیټ:

حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په ریاست کې

محمد داود غیرت د ریاضیاتو د ډیپارتمنت علمي او مسلکي غړی

پوهنیار عبدالله صافی د تعلیمي نصاب د پراختیا او د درسي کتابونو د ریاضیاتو متخصص

ژبې ایډیټور:

محمد قدوس ذکوخیل د تعلیمي نصاب د پراختیا د ریاست عملي او مسلکي غړی.

د دیني، سیاسي او کلتوري کمیته

محمد آصف کوچی د اسلامي زده کړو د ډیپارتمنت متخصص

حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په ریاست کې

د څارنې کمیته:

دکتور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین

دکتور شیر علي ظریفي د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې رئیس

د سرمولف مرستیال عبدالظاهر گلستاني د تعلیمي نصاب او پراختیا درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس

دیزاین:

محمد اشرف امین

د چاپ د سمون چارې: محمد کبیر حقمل د پوهنې وزارت د نشراتو او اطلاعاتو رئیس

بسم الله الرحمن الرحيم

ملي سرود

دا وطن افغانستـــان دی | دا عزت د هـــر افغان دی

کور د سولې کور د توري | هر بچي يې قهرمـــان دی

دا وطن د ټولو کـور دی | د بلوڅـــو د ازبکـــو

د پښتـــون او هزاره وو | د ترکمنـــو د تاجکـــو

ورسره عرب، ګوجـر دي | پاميـريان، نورستانيـــان

براهوي دي، قزلباش دي | هم ايمـــاق، هم پشـه يان

دا هيـــواد به تل ځليږي | لکــه لمـر پر شنه آسمـان

په سينــه کې د آسيـا به | لکـــه زړه وي جـاويدان

نوم د حق مودی رهبـــر | وايو الله اکبر وايو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزير پيغام

گرانو استادانو او ښوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د علمي پرمختګ او ټولنې د اړتياوو له مخې چمتوکيږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنيزې اړتياوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم د وخت له غوښتنوسره سم علمي او رغنده پراختيا ومومي. البته نه ښايي چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د اشخاصو د نظريو او هيلو تابع شي.

د ښوونکی د لارښود داکتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې بنسټ چمتو اوترتيب شوی دی. د تدريس د نويو ميتودونو له مخې فعاليتونه او معلوماتي مواد په کې ورزيات شوي دي چې په ډاډ سره به د زده کړې په بهير کې د زده کوونکو د فعال ساتلو لپاره ګټور او اغېزمن وي.

هيله من يم د دې کتاب منځپانګه، چې د فعالې زده کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تاليف او چمتو شوې، ستاسو درنو استادانو د ګټې وړ وګرځي. له فرصت څخه په استفادې د زده کوونکو له ميندو او پلرونو څخه غوښتنه کيږي د خپلو لوڼو او زامنو په باکيفيته ښوونه او روزنه کې پرله پسې مرسته وکړي چې په دې توګه د پوهنې د نظام موخې او هيلې ترسره شي او ځوان نسل او هېواد ته ښې پايلې او برياوې ور په برخه کړي.

زموږ ګران استادان او ښوونکي د تعليمي نصاب په رغنده پلي کولو کې ستره دنده او دروند مسؤوليت لري.

د پوهنې وزارت تل زيار کاږي چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دين له بنسټونو او ارزښتونو، د ټولنې د څرګندو اړتياوو، ملي ګټو او وطنپالنې له روحيې او د ساينس او تکنالوژۍ له نوو علمي معيارونو سره سم پراختيا ومومي.

ددې سترې ملي موخې د تر لاسه کولو لپاره د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظريو او رغنده ګټورو وړانديزونو له لار ې زموږ له مؤلفانو سره د درسي او د ښوونکي د لارښود دکتابونو په لا ښه تاليف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه، چې ددې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې يې برخه اخيستې او همدارنګه له ملي او نړيوالو درنو موسسو او نورو ملګرو هېوادونو څخه، چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تدوين او د درسي او د ښوونکي د لارښود کتابونو په چاپ او وېش کې يې مادي يا معنوي مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم او د لا نورو مرستو هيله يې لرم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردک

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

فهرست

لومړی څپرکی: پولينوم 3

الجبري افادې، د پولينوم درجه او د پولينوم ډولونه، د پولينوم د قيمت او پولينوم دضربيونو د مجموعی پيدا کول،

د پولينوم څلورګوني عمليې

د باقيمانده، فکټور قضيې او ترکيبي وېش

د څپرکی لنډيز او پوښتنې:

دويم څپرکی: رابطه 51

مرتبې جوړې او کارتيز يني مستوي، د کارتيزيني ضرب حاصل ا و ګراف يې

رابطه، او معکوسه رابطه.

معادله رابطه.

د څپرکي لنډيز او پوښتنې:

دريم څپرکی : تابع 69

د تابع دليکلو طريقه او ديوې تابع قيمت، د تابع د تعريف ساحه د تابع ګراف او د ګراف له مخې

د يوې تابع پيژندنه، دګراف له مخې د تابع د تعريف او د قيمتونو د ساحو پيدا کول، ځينې خاصې تا بعګانې او ګرافونه يې.

متزايدې او متناقصې تابعګانې، جفتې او طاقې تابعګانې

دګرافونو انتقال (عمودي انتقال، افقي انتقال او دعمودي او افقي انتقالونو ترکيب، د تابعګانو عمليې

د تابعګانو ترکيب، معکوسه تابع، يو په يو تابع، د تابع او د تابع د معکوسي تابع ګراف، پولينومي تابعګانې (لومړۍ او دويمه درجه تابعګانې) او ګرافونه يې

ناطقې تابعګانې او ګراف يې (عمودي، افقي او مايل مجانبونه)

د څپرکی لنډيز او پوښتنې

څلورم څپرکی: مثلثاتي تابعګانې 139

زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه، دیوې زاویې معیاري حالت او کوټړ مینل زاویې

مثلثاتي تابعګانې او د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

داو زاویو مثلثاتي نستونه

دهغه زاویو د مثلثاتي تابعګانو ترمنځ اړیکې چې یوه له بلې سره خاصې اړیکې لري.

دمثلثاتي تابعګانو ګراف

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

پنځم څپرکی: د مثلثاتو تطبیقات..201

د مرکبو زاویو مثلثاتي نسبتونه، د دووزاویو د مجموعې او تفاضل فورمولونه

دزاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د او زاویو د مثلثاتی نسبتونو پیداکول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعی او تفاضل بدلول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع یا یې تفاضل باندې، د قوس اوږ دوالی، دیوې دایرې قطاع او مساحت یې، د دایرې قطعه او مساحت یې، د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو ترمنځ د زاویې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دریو ضلعوله جنسه (د هیرون فورمول) د یوه مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاعګانې

د څپرکي لنډیز او پو ښتنې

شپږم څپرکی: مختلط عددونه..249

موهومي عددونه او د موهومي عددونو څلورګونې عملیې

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې

د مختلطو عددونو ضرب، د یو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربي معکوس

د مختلطو عددونو وېش

د مختلطو عددونو په ساحه کې ددویمې درجې یو مجهوله معادلو حل

د څپرکی لنډیز او پوښتنې

اووم څپرکی: تحلیلي هندسه..285

د وضعیه کمیاتو سیستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیداکول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې ویشي

دیوه مستقیم خط میل

دیوه مستقیم خط معادله (د یو مستقیم خط معیاري معادله، دهغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي، دوې نقطې یې معلومې وي. له محوررونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي، د مستقیم خط نورمال معادله او دمستقیم خط عمومي معادله)

د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول، د مستقیم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.

د یوې نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله

دایره او د دایرې معادله، د یوه مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره، د مماس معادله او د مماس اوږدوالی

د مثلث د مساحت پیداکول چې د راسونو و ضعیه کمیات یې معلوم وي.

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

اتم څپرکی: احصائیه..351

د فریکونسي څو ضلعی ګراف، د ساقې او پاڼې ګراف، ربعي (څلورمې)، صندوقچه یي ګراف، د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول، د ربعي انحراف، واریانس، معیاري انحراف،

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

نهم څپرکی: د ریاضي منطق..393

د شهودي درک استدلال، تمثیلي استدلال، استقرایي استدلال، د ریاضي د استقرا استدلال، استنتاجي استدلال، د مثال د نفي کولو استدلال، غیر مستقیم ثبوت، د ریاضي منطق او د بیان استنتاج، د څپرکي لنډیز او پوښتنې

ښاغلی ښوونکیه!

د رياضي د ښوونکی لارښود کتاب، چې د فعالې زده کړې په اساس تاليف شوی، يوازې د ښوونکي د ګټې اخيستنې لپاره دی، د زده کوونکو په لاس کې دې نه لوېږي.

د ښې او اغيزمنې زده کړې او تدريس لپاره ښايي دا لاندې ټکي په پام کې ونيول شي:

1) ټولګي ته د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو، لکه (د سلام او احوال پوښتنه، د ټولګي تنظيم، حاضری اخېستلو، د کورنی دندې له ليدلو، د تېر لوست ارزونې او د امکان په صورت کې د تېر او راتلونکي لوست ترمنځ د اړيکې له پيدا کولو وروسته) په نوي درس پيل وکړئ.

2) درسي مرستندويه مواد (محيطي مواد) چې په لارښود کې يې يادونه شوې له مخکې يې ټولګي ته راوړئ.

3) په دې لارښود کې د فعالې زده کړې له ميتودونو څخه کار اخيستل شوی. سربېره له هغو ګټورو ميتودونو څخه هم کار اخېستلای شئ چې د خپلې تجربې له مخې مو کارولي او تجربه کړي دي.

4) په دغه کتاب کې د تدريس پړاوونه په علمي شکل په پام کې نيول شوي دي. که په سمه توګه عملي شي په يقين سره چې ستاسو تدريس به ګټور واقع شي.

5) د امکان تر حده په موضوع پورې اړوند اضافي معلومات چمتو شوي دي. دا معلومات په تدريس کې له تاسو سره مرسته کوي.

6) يو 45 دقيقه‌يي درسي ساعت داسې وېشل شوی چې په ټاکل شوي وخت کې تدريس شي او درس پای ته ورسېږي. که په هغه ټاکل شوي وخت کې ونه شئ کړای هغه عملي کړئ، نو اختيار لرئ چې هغه وختونه لنډ يا زيات کړئ د بېلګې په ډول: د درس د جريان فعاليت د مؤلفانو له خوا 28 دقيقې ټاکل شوی دی. که ستاسو له نظره هغه زيات وي، کولای شئ د بېلګې په توګه هغه 20 دقيقې کړئ او پاتې نورې اته دقيقې په نورو فعاليتونو ورزياتې کړئ.

7) د تدريس په بهير او د فعاليتونو په سرته رسولو کې ټولو زده‌کوونکو ته برابره برخه ورکړئ.

8) تمرينونه بايد په ټولګي کې د زده کوونکو په ګډون حل شي.

9) که چيرې د يوه تمرين پوښتنې زياتې وي، يو شمېر دې د درس د پياوړتيا په پړاو کې د زده‌کوونکو په ونډې اخيستنې سره په ټولګي کې حل شي او پاتې نورې دې زده‌کوونکو ته کورنی دنده ورکړل شي.

10) د هر څپرکي په پای کې اړوند تمرين ته ځای ورکړ شوی دی. کوښښ دې وشي چې د سختو او اسانه پوښتنو په پام کې نيولو سره د څپرکي پوښتنې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ، په دې ډول چې په لومړي څپرکي د پوښتنو د حل لپاره نهه درسي ساعتونه، د دويم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره دوه درسي ساعتونه، د دريم او څلورم څپروکو د پوښتنو د هر يو د حل لپاره لس درسي ساعتونه، د پنځم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره اته درسي ساعتونه، د شپږم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره پنځه درسي ساعتونه، د اووم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره لس درسي ساعتونه، د اتم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره څلور درسي ساعتونه، د نهم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره درې درسي ساعتونه او د هر څپرکي د لنډيز لپاره يو درسي ساعت په پام کې ونيسئ.

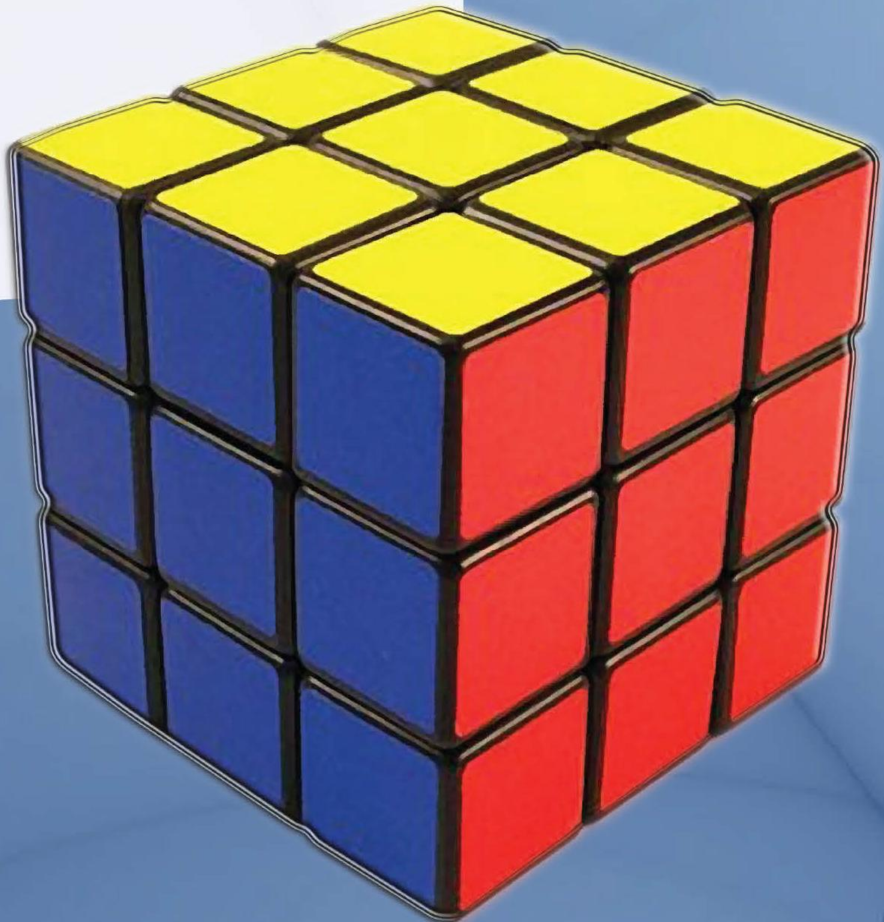
11) د رياضي په درسي کتاب کې امکان لري چې ځينې طباعتي اشتباهګانې موجود وي او د تجديد نظر تر وخته نشي کيدای اصلاح شي، خو د رياضي د لارښود د ليکلو په وخت کې په پام کې نيول شوي دي، محترم ښوونکی کولای شي چې د لارښود له مخې يې اصلاح کړي.

لومړی څپرکی
پولینوم

پولینوم(Polynome)

یا (Polynomial)

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



عنوان: الجبري افادې

د درسي کتاب (3) مخ **د لوست وخت (1 درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای زده کوونکي باید: • متحول، ثابت او الجبري افادې وپیژني. • د الجبري افادو ډولونه وپیژني او توپیر یې وکړای شي. • پولینوم تعریف کړای شي او په الجبري افادو کې د پولینوم، ناطقې او غیر ناطقې الجبري افادې توپیر وکړای شي او د ریاضي د مسایلو په حلولو کې ترې استفاده وکړای شي او اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو (سلام اچول، حال احوال پوښتنه،حاضري اخیستل، د ټولګي نظم، د نوی لوست اړیکه له تېر لوست سره) څخه وروسته د انګیزې د پیداکولو لپاره ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. چې په درېو راکړل شوو الجبري افادو کې ناطقې او غیر ناطقې الجبري افادې وښودلای شي. که زده کوونکو ځواب ونه شو ویلای د مثالونو له حلولو څخه وروسته یې ځواب ویلای شي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

محترم ښوونکی دې متحول، ثابت او الجبري افاده تعریف او د هر یو مثالونه دې ورکړي. د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره دې پولینوم تعریف او پر تخته دې لومړی مثال حل شي ا و د پولینوم عمومي شکل دې توضیح شي.

بیا دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونو کې ددې لوست فعالیت سرته ورسوي، ښوونکي دې خارنه، اصلاحات، لارښوونه او مرسته وکړي. یو زده کوونکي دې د تختې پر مخ خپلو کار نورو ته توضیح کړي او محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره دویم مثال حل کړي.

کوښښ دې وشي، تر څو زده کوونکي د ناطقو او غیر ناطقو الجبري افادو په توپیر پوه شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره دې ښوونکی لومړی پوښتنه د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د لوست له لنډیز ویلو څخه وروسته د ارزونې لپاره لاندې پوښتنې له زده کوونکو وکړئ.

1- څوک پولینوم تعریفولای شي؟

2- د پولینومي، ناطقو او غیر ناطقو الجبري افادو ترمنځ توپیر څه دی؟

د هرې افادې یو، یو مثال وویاست.

3- د $p^2-\frac{1}{p^3}$, $\sqrt{5}x$, $\sqrt{x}+y, 3x^{-2}$, $x-1$ ، 15 او 0 الجبري افادو کې کوم یو پولینوم او کوم یو پولینوم نه دی؟

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

متحول او ثابت (Varible and Constant): علامه یا توري چې یو نامعلوم عدد ښکاره کوي د متحول په نامه یادیږي. د مثال په ډول که د ناطقو عددونو سټ په پام کې ونیول شي $Q=\{\frac{p}{q}\mid p,q\in z, q\neq 0\}$

چې p هر تام عدد ښیي او همدارنګه q پرته له صفره کیدای شي هر تام عدد وي که p=2 او q=7 وي، نو د $\frac{2}{7}$ عدد یو ناطق عدد دی او که $p=-11$ او q=25 وي نو $\frac{-11}{25}$ هم یو ناطق عدد دی.

په پایله کې د p او q پر ځای بې شمیره تام عددونه موجود کیدای شي، نو p او q ته متحولونه (varibles) وایي.

متحولونه اکثراً د x,y,z,p,q,r,s,t تورو په واسطه ښودل کیږي.

هر حقیقي عدد یو خاص قیمت لري چې تغیر نه کوي د مثال په ډول: $\frac{1}{10},\frac{1}{2},$ –10,5,7,99,... او داسې نور. داسې عددونه چې قیمت یې تغیر نه کوي د ثابت (Constant) په نامه یادیږي.

سانتي ګریډ او فارنهایت د حرارت د درجو ترمنځ په فورمول کې $(f=\frac{9}{5}c+32^\circ)$ چې f او c متحولین او 32 او $\frac{9}{5}$ ثابت دي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه ناطقه، غیر ناطقه او پولینومي الجبري افاده ده؟

$13\ ,\quad 3x^2+\frac{xy}{2}\ ,\quad x+\frac{1}{x}\ ,\quad \frac{m+3}{6}\ ,\quad \frac{3x^2}{2}\ ,\quad \sqrt{x}-\frac{1}{2}\ ,\quad \frac{1}{x}$

حل:

$\frac{1}{x}$ یوه ناطقه الجبري افاده ده خو پولینوم نه دی.

$\sqrt{x}-\frac{1}{2}$ یوه غیر ناطقه الجبري افاده ده.

$\frac{3x^2}{2}$ یو پولینوم دی چې ناطقه الجبري افاده هم ده.

$\frac{m+3}{6}$ یو پولینوم دی چې یوه ناطقه الجبري افاده هم ده.

$x+\frac{1}{x}$ ناطقه الجبري افاده ده خو پولینوم نه دی.

$3x^2+\frac{xy}{2}$ ناطقه الجبري افاده ده خو پولینوم هم دی.

13 یو ثابت پولینوم دی.

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه یې یو پولینوم او کومه یوه یې پولینوم نه دی؟

$3x \quad , \quad \frac{1}{7}x^3 - x \quad , \quad -20a^3b + 28ab^4 \quad , \quad 3x^2 + \frac{xy}{2}$

$\sqrt{8}x^8 \quad , \quad -0.03 \quad , \quad 3x \quad , \quad 8x^{-8} \quad , \quad 8\sqrt{x} \quad , \quad \frac{1}{x} - \frac{x^2}{5}$

حل:

$3x^2 + \frac{xy}{2}$ (پولینوم دی)

$-20a^3b + 28ab^4$ (پولینوم دی)

$\frac{1}{7}x^3 - x$ (پولینوم)

$3x$ (پولینوم)

$\frac{1}{x} - \frac{x^2}{5}$ (پولینوم نه دی)

$8\sqrt{x}$ (پولینوم نه دی)

$8x^{-8}$ (پولینوم نه دی)

-0.03 (پولینوم دی)

$\sqrt{8}x^8$ (پولینوم دی)

3- د $Px^4 - ax^3 + bx^2 + cx + d$ په پولینوم کې a_1, a_2, a_3, a_n او a_0 وښایاست.

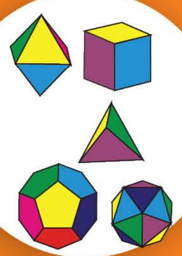
حل:

$a_0 = d \quad , \quad a_1 = c \quad , \quad a_2 = b \quad , \quad a_3 = -a \quad , \quad a_n = p$

4- د $P(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 - 1$ په پولینوم کې a_1, a_2, a_3 او a_0 وښایاست.

حل:

$a_0 = -1 \quad , \quad a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = -2 \quad , \quad a_3 = \frac{1}{2}$



د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

د درسي کتاب (7) مخ **د لوست وخت(2 درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي ، ذهنیتي)	ددې لوست په پای زده کوونکي باید: • د پولینوم ډولونه وپیژني. • د هر پولینوم درجه پیدا کړای شي او هم د پولینوم درجه نظر هر توري ته وټاکلای شي. • پولینومونه په صعودي یا نزولي ډول ترتیب کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې له پولینومونو څخه استفاده وکړای شي او اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	د لومړینو فعالیتونو له سرته رسولو وروسته د انگیزې د پیداکولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ چې ځواب یې داسې دی: د لومړی پولینوم درجه (3) د دویم پولینوم درجه (8) او د دریم پولینوم درجه صفر ده.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

محترم ښوونکي دې د (7) مخ جدول د چارت او یا د تختې پر مخ زده کوونکو ته توضیح کړي، تر څو د مونوم، باینوم او ترینوم افادو توپیر وکړای شي.

ددې مخ فعالیت دې زده کوونکي په گروپونو کې حل کړي او یا زده کوونکي کولای شي چې یو، یو زده کوونکي د فعالیت ځوابونه ووایي چې ځواب یې دا دی: لومړی افاده (ترینوم) دویمه (باینوم) دریمه او څلورمه (مونوم) او پنځمه هم (باینوم) دی.

بیا دې د هغه پولینوم درجه چې له یوه او یا له څو تورو څخه تشکیل شوي وي او هم د یو پولینوم درجه نظر هر توري (متحول) ته توضیح شي د ثابت او صفري پولینوم له ورپیژندلو وروسته لومړی، دویم او دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي او د (9) مخ پر فعالیت دې زده کوونکي کار وکړي او محترم ښوونکي دې ورته لارښوونه او مرسته ورسره وکړي.

د مکملو، ناقصو، منظمو، غیر منظمو، صعودي او نزولي پولینومونو له توضیح کولو وروسته دې زده کوونکي د 10 مخ فعالیت سرته ورسوي او ښوونکي دې 4 مثال حل کړي او همدارنگه معادل او متجانس پولینومونه دې تعریف شي او د مثالونو په واسطه دې توضیح شي.

5 او 6 مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره لومړۍ او دویمه پوښتنه حل شي.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

محترم ښوونکي ښه پوهیږي چې په څه ډول خپل زده کوونکي وارزوي، د مثال په ډول لاندې پوښتنې له زده کوونکو وکړئ.

- د لاندینیو پولینومونو درجې وټاکئ.

$Q(x) = x^2 - x - 1 \ , \quad P(x) = x$

$P(x) = 1 \quad P(x) = 0 \quad g(x) = x^2y^3 - xy^4 - x^3y^3$

- که $P(x) = 5xy^4 - 12x^my^3 - x^py^4$ پولینوم یو متجانس پولینوم وي، د P او m قیمتونه پیدا کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- پاملرنه وکړئ چې:

$\frac{4}{7}x^4y \ , \ -8m^3n^5 \ , \ 6.7x^4 \ , \ \frac{4}{7}x^4y^2$ او $3a^2b^2$ هر یو یې مونوم دی، خو $\frac{4y^3}{5x} \ , \ -2x^{-4} \ , \ 4g^{\frac{1}{2}}y^2$ او $\frac{1}{3y^3}$ یو یې هم مونوم نه دی.

- د دوه متحوله پولینوم عمومي شکل:

$b_mx^m + b_mx^{m-1} \cdot y\,b_{m-2}x^{m-2} \cdot y^2 + ...b_1xy^{m-1} + b_0y^m$ دی چې دا یو m درجه دوه متحوله پولینوم دی او $b_m \ , \ b_{m-1}...b_1 \ , \ b_0$ حقیقي عددونه او m یو داسې تام عدد دی چې منفي نه وي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- په لاندې افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښایاست او درجې یې پیدا کړئ.

$\frac{1}{2}x^2y^5 \ , \quad x^2 - y + 4 \ , \quad x - 1 \ , \quad x - x^2 - x^3 \ , \quad 12x \ , \quad -12$

حل:

- $\frac{1}{2}x^2y^5$ یو حده (مونوم)
- $x - x^2 - x^3$ دوه حده (ترینوم)
- $x^2 - y + 4$ دری حده (ترینوم)
- $12x$ یو حده (مونوم)
- $x - 1$ دوه حده (باینوم)
- -12 یو حده (مونوم)

2: په لاندې پولینومونو کې مکمل او ناقص پولینومونه وښایاست او بیا ناقص پولینومونه د مکملو پولینومونو په شکل ولیکئ.

$x \ , \quad x + 1 \ , \quad x^2 - 1 \ , \quad 2x^2 - 2x - 2 \ , \quad 15 \ , \quad x^3 + x - 1$

حل:

- x (ناقص)
- $x + 1$ (مکمل) پشپړ
- $x^2 - 1$ (ناقص) او د مکمل پولینوم په شکل $x^2 + 0 \cdot x - 1$

- $2x^2-2x-2$ (مکمل)
- 15 (مکمل)
- x^3+x-1 (ناقص) او مکمل شکل یې $x^3+0\cdot x^2+x-1$

3- لومړی د لاندې پولینومونو درجې پیدا کړئ او بیا یې په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x-5+6x^2+8x^3 \quad , \quad 2y^2-4y+3-3y^4+y^3 \quad , \quad 1-x^3+x^2+2x^4-x^5$

حل:

- $4x-5+6x^2+8x^3$ درجهٔ یې (3) ده او نزولي شکل یې $8x^3+6x^2+4x-5$ دی.
- $2y^2-4y+3-3y^4+y^3$ ، درجه یې (4) ده او نزولي شکل یې $-3y^4+y^3+2y^2-4y+3,$ دی.
- $1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$ درجهٔ یې (5) ده او نزولي شکل یې $-x^5+2x^4-x^3+x^2+x+1$ دی.

4- که $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ وي د n, p او c قیمتونه پیدا کړئ.

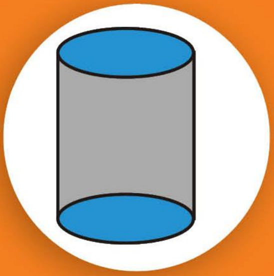
حل:

$$P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$$
$$P(x^2-2x+1)+nx+3n+c=2x^2-x+22$$
$$Px^2-2px+p+nx+3n+c=2x^2-x+22$$
$$px^2+(n-2p)x+p+3n+c=2x^2-x+22$$
$$\Rightarrow P=2 \qquad \begin{matrix} n-2p=-1 \\ n-4=-1 \\ n=3 \end{matrix} \qquad \begin{cases} p+3n+c=22 \\ 2+9+c=22 \\ c=11 \end{cases}$$

5- د a، b او c قیمتونه پیدا کړئ که $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ او $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ معادل پولینومونه وي.

حل:

$$3b+4=7 \Rightarrow b=1$$
$$-2a+3=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$
$$-c+3=0 \Rightarrow c=3$$



د پولینوم د قمیت او د پولینوم د ضریبونو
د مجموعې پیدا کول

د درسي کتاب (13)مخ　　**د لوست وخت** (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	• د متحول د ټاکلي قيمت لپاره د پولينوم قيمت پيدا کول زده کړي. • د پولينوم قميت او د پولينوم د ضريبونو مجموعه پيداکړای شي. • د هندسي شکلونو د مساحت او حجم د اړوندو فورمولونو له مخې يې مساحت او حجم پيدا کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حل کې د پولينوم د قيمت د پيداکولو اهيمت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو او د تير لوست سره د نوي لوست له اړيکې ورکولو څخه وروسته د انګيزې د پيداکولو لپاره د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ که زده کوونکي يې ځواب نه شو ويلای، نو ښوونکي دی حل کړي: $P(-1)=(-1)^3-(-1)^2-(-1)-1=-1-1+1-1=-2$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

لومړی مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي او د (13) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي، محترم ښوونکي دې د دوی د کار څارنه اومرسته ورسره وکړي چې ځواب يې دا دی:

$P(0)=-1$　　　$P(1)=1-1-1-1=-2$　　　$P(-1)=-1+1+1-1=0$

په همدې ډول محترم ښوونکي دې دويم، دريم او څلورم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي.

د (14) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب يې $525\pi cm^3$ دی. ددې لپاره چې د پولينوم د ضريبونو د مجموعې او د پولينوم دقيمت دپيداکولو موضوع ښه روښانه شي، د کتاب پنځم، شپږم، اووم او اتم مثالونه دې حل شي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې:**

د زده کړې د پياوړتيا لپاره دې لومړی پوښتنه حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

د ارزونې لپاره لاندې پوښتنې له زده کوونکو وپوښتئ:

1- که $x=-2$, $y=3$ ، $z=-1$ او $t=2$ وي، د $\frac{3xy-2zt}{4xz}$ قيمت پيداکړئ.　　ځواب: $-\frac{7}{4}$

2- که چيرې $x=2, y=3$ او $z=-1$ وي، د $3x+5yz$ قيمت پيداکړئ　　ځواب: -9

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- که $x-y=2$ او $xy=4$ وي، د x^3-y^3 قیمت پیدا کړئ:

$$x-y=2$$
$$(x-y)^2=4$$
$$x^2-2xy+y^2=4 \quad \Rightarrow x^2+y^2=12$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=2(x^2+y^2+xy)=2(12+4)=2(16)=32$$

- که $a=3$ او $b=-2$ وي، د $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$ قیمت عبارت دي له :

$$8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3=(2a)^3+3(2a)^2+(3b)9+3(2a)(3b)^2+(3b)^3=(2a+3b)^3$$
$$=(6-6)=0$$

- که $x=\sqrt{5}-2$ وي، د $\frac{1}{x}, x+\frac{1}{x}$, $(x+\frac{1}{x})^2$ و $x^2+\frac{1}{x^2}$ قیمتونه عبارت دي له:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}+2}{1}=\sqrt{5}+2$$
$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2=2\sqrt{5}$$
$$(x+\frac{1}{x})^2=(2\sqrt{5})^2=20$$
$$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=20\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=20-2=18$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- که $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیدا کړئ.

حل:

$$P(-1)=-(-1)^4-(-1)^3-(-1)^2-(-1)-1=-1+1-1+1-1=-1$$
$$P(\frac{1}{2})=-(\frac{1}{2})^4-(\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})-1$$
$$P(\frac{1}{2})=-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=\frac{-1-2-4-8-16}{16}=\frac{-31}{16}$$

2- د $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ په پولینوم کې که $p(2)=17$ وي د k قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$P(2)=k\cdot 2^3-2^2+3(2)-1=17$$
$$8k-4+6-1=17$$
$$8k=17-1\Rightarrow 8k=16\Rightarrow k=2$$

3- که د mx^2-2x+1 د ضریبونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$m-2+1=18$$
$$m=19$$

4- د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1+2-4}{8}=-\frac{1}{8}$$

5- $A=x^2-4x+4$ ، $B=-4x^3+10x^2$ ، $C=-x+3x^4-6x^3$ او $D=x^2+4x-4$ په پولینومونو کې د $x=4$ لپاره د کوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی.

a) C

b) D

c) A

d) B

حل: د (a) جز سم یا د $x=4$ لپاره د C پولینوم قیمت تر 100 زیات دی.

6- په لاندې پولینومونو کې د $x=5$ لپاره د کوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی.

a) x^2-2x+6

b) $3x^4+6x+12$

c) $-x^3-40x-300$

d) x^5-120x^4+10

حل: د (b) جز سم دی.

7- که $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ وي $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیدا کړئ.

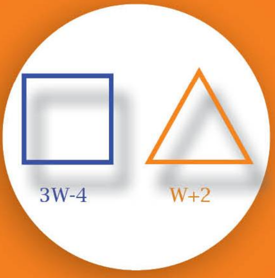
حل:

$$P(-1)=1$$

$$P(0)=-1$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-29}{16}$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{16}$$



د پولينوم څلور ګوني عمليې

د درسي کتاب (17)مخ د لوست وخت(1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پاى کې زده کوونکي بايد: • مشابه حدونه (like terms) وپيژني. • د مشابه حدونو په جمع کولو او تفريقولو وپوهيږي. • د مشابه او غير مشابه حدونو توپير وکړاى شي. • مشابه حدونه سره جمع او يو له بله تفريق کړاى شي. • د جمعې د عمليې د تبديلي او اتحادي خاصيت او هم د ضرب توزيعي خاصيت پر جمع باندې، په پولينومونو کې تطبيق کړاى شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې د جمعې او تفريق د عمليو د خاصيتونو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيداکولو لپاره ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ چې ځواب يې په لاندې ډول دى: که P د مربع محيط وي: $P=(3w-4)+(3w-4)+(3w-4)+(3w-4)=4(3w-4)=12w-16$ که C د متساوي الاضلاع مثلث محيط وي: $C=3(w+2)=3w+6$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې

زده کوونکو ته دې توضيح شي چې د جمعې او تفريق په عمليو کې مشابه حدونه سره جمع او يا يو له بله تفريق کيږي.

د مثال په ډول: $5x-4x^4-5x^3-9x+4x+1-1=-4x^4-5x^3$

لومړى مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي او د دې لوست لومړى فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب يې: $3ab^2+8a+2$ دى. او دويم مثال دې محترم ښوونکى د زده کوونکو په فعاله ونډې اخيستنې سره حل کړي.

په همدې ډول د تفريق د عمليې لومړى مثال دې هم د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي او د 19 مخ لومړى فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي او ښوونکي دې د دوى له کارونو څارنه او مرسته دې ورسره وکړي.

بيا له دې وروسته چې ښوونکى دويم مثال حل کړي زده کوونکي دې ددې مخ دويم فعاليت سرته ورسوي چې ځواب $(-5x-10)$ دى.

3 او 4 مثالونه دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د لوست د پیاوړتیا لپاره دې لومړی او دویمه پوښتنه حل شي.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

که له $A=4x^3-3ax+5$ پولینوم تفریق شي، $B=11x^3+ax^2-x+b$ پولینوم څخه د cx^3-2x^2+dx-1 کیږي، د b,a او c قیمتونه پیدا کړئ.

جواب: $(a=2\ ,\ b=6\ ,\ c=-7)$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- له لاندینیو الجبري افادو سره کومه افاده جمع او یا ترې تفریق شي، تر څو مکمله مربع شي؟

$a:\ x^2+16y^2 \qquad b:\ -20xy+25y^2$

حل: که له x^2+16y^2 سره د $(2x)(4y)$ جمع او یا ترې تفریق شي، $(x\pm 4y)^2$ لاس ته راځي.

$b:\ -20xy+25y^2=-2(2x)(5y)+5y^2$

نو که $(2x)^2$ له دې افادې سره جمع شي، $(2x-5y)^2$ لاس ته راځي.

2- که $a-b=12$ و $ab=35$ وي، د a^2+b^2 قیمت پیدا کړئ.

$(a-b)^2=(12)^2$

$a^2-2ab+b^2=144 \Rightarrow a^2+b^2=144+2ab \Rightarrow a^2+b^2=144+70=214$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د دوو پولینومو مجموعه x^2+2x-y^2 ده، که یو پولینوم $x^2-2xy+3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

حل: $x^2+2x-y^2-(x^2-2xy+3)=x^2+2x-y^2-x^2+2xy-3=2x-y^2+2xy-3$

2- د $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ پولینوم له $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ پولینوم څخه تفریق کړئ.

حل:

$$4x^4+2x^2+x^3-x+1-(3x^4+5x^3+2x^2-x+1)$$
$$=4x^4+2x^2+x^3-x+1-3x^4-5x^3-2x^2+x-1=x^4-4x^3$$

3- له $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ پولینوم څخه د $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ پولینوم تفریق کړئ.

حل:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3=6a^2b+2b^3$$

4- کـــــه $A=a^3+2a^2-6a+7$ ، $B=a^3+2a+5$ او $C=2a^3-a^2+2a-8$ وي، ددې درې واړو پولینومـــــو مجموعه پیدا کړي. $(A+B+C=?)$

حل:

$A = a^3 + 2a^2 - 6a + 7$

$B = a^3 \qquad + 2a + 5$

$\underline{C = 2a^3 - a^2 + 2a - 8}$

$A + B + C = 4a^3 + a^2 - 2a + 4$

5- د $(ab^2 + 3a) + (2ab^2 + 3a - 2) + (2a + 4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

$a) - 3ab^2 + 8a + 2 \qquad b) 3ab^2 + 8a \qquad c) 3ab^2 + 8a + 2$

حل:

$(ab^2 + 3a) + (2ab^2 + 3a - 2) + (2a + 4)$

$ab^2 + 3a + 2ab^2 + 3a - 2 + 2a + 4 = 3ab^2 + 8a + 2$

د (c) جز سم دی.

6- جمع يې کړئ.

$(3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab) + (-3ab + a^2 - 2) + (1 + 6ab)$

حل:

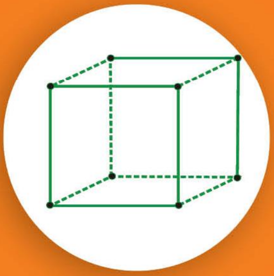
$(3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab) + (-3ab + a^2 - 2) + (1 + 6ab)$

$= 3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab - 3ab + a^2 - 2 + 1 + 6ab = 3a^2b^2 + 3a^2 - 2ab - 1$

7- که دوه الوتکې له يوه هوايي ډګر څخه يو د بل مخالف لورې ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د يوې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $x^2 + 2x + 400$ ميله وي، دبلې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $3x^2 - 50x + 100$ ميله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن(فاصله) پيدا کړئ.

حل:

$(x^2 + 2x + 400) + (3x^2 - 50x + 100) = x^2 + 2x + 400 + 3x^2 - 50x + 100 = 4x^2 - 48x + 500$



د پولینومونو د ضرب عملیه

د درسي کتاب (21) مخ **د لوست وخت (1 درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د مونوم ضربول په مونوم کې د مونوم ضربول پـه پولینـوم کـې او د پولینـوم ضـربول پـه پولینـوم کې زده کړي. • د ضرب د عملیې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه وپیژني. • پولینومونـه سـره ضـرب کـړای شـي او د ضـرب د عملیـې اتحـادي او تبـدیلي خاصـیتونه پـه پولینومونو کې تطبیق کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې د پولینیومونـو د ضـرپ د عملیـې اهمیـت درك او د ریاضـي علم زده کړې ته علاقه مند شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه ، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته زده کړې ته د انګیزې د پیداکولـو لپـاره د ورودي برخـې پوښـتنه له زده کوونکو وکړئ که V د مکعب حجم وي: $V=(x+1)(x+1)(x+1)cm^3=(x+1)^3cm^3=(x^3+3x^2+3x+1)cm^3$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

محترم ښوونکي دې د مونوم ضرب په مونوم کې زده کوونکو ته توضیح کړي او بیا دې زده کوونکي ددې لوست لـومړی فعالیـت سرته ورسوي.

بیادې محترم ښوونکي لومړی مثال د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره حل کـړي، همدارنګـه د مونـوم ضـرب پـه پولینـوم کـې توضیح او دویم مثال حل کړئ.

د (22) مخ فعالیت دې زده کوونکي حل کړي. د پولینوم ضـرب پـه پولینـوم کـې دې توضـیح شـي. دریـم او څلـورم مثـال د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره حل کړئ.

د (23) او (24) مخونو فعالیتونه دې زده کوونکي حل کړي. ښوونکي دې د (24) مخ پوښتنه پر تخته حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د زده کړې پیاوړتیا لپاره دې لومړۍ پوښتنه حل شي.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

1- ضرب یې کړئ:

$(a-b+1)(a+b-1)$

$(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$

$(x^2-3x+1)(x^2+3x+1)$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- که $x+\frac{1}{x}=5$ وي $x^4+\frac{1}{x^4}$ قیمت پیدا کړئ:

$$(x+\frac{1}{x})^2=5^2 \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=25$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=25-2=23 \Rightarrow (x^2+\frac{1}{x^2})^2=(23)^2$$

$$x^4+2+\frac{1}{x^4}=529 \quad \Rightarrow \quad x^4+\frac{1}{x^4}=529-2$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=527$$

- څرنګه چې مطابقتونه ددې ټولګي په مفرداتو کې شامل نه دي، او په تیرو ټولګیو کې لوستل شوي دي چې ځینې مطابقتونه په لاندې ډول دي:

$1:\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\qquad$ $2:\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$3:\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $\qquad$ $4:\ (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$5:\ (a+b)^2=(a-b)^2+4ab$ $\qquad$ $6:\ (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$7:\ (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ $\qquad$ $8:\ (a+b)^3=a^3+.3a^2b+3ab^2+b^3$

$9:\ (a-b)^3=a^3-.3a^2b+3ab^2-b^3$ $\qquad$ $10:\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$11:\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$12:\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

د پوښتنو ځوابونه:

1- ضرب یې کړئ.

$-2xy(2x^2+2y^2-2)$ $\qquad$, $\qquad$ $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$

حل:

$-2xy(2x^2+2y^2-2)=-4x^3y-4xy^3+4xy$

$(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)=-20x^3y^5z^3$

2- یو بکس چې لوړوالی یې x انچه، اوږدوالی یې $x+1$ او سور یې $2x-4$ انچه دی، که لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

$a)\ 40in^3$ $\qquad$ $b)\ 24in^3$ $\qquad$ $c)\ 48in^3$ $\qquad$ $d)\ 20in^3$

حل:

$$x(x+1)(2x-4)=(x^2+x)(2x-4)=2x^3-4x^2+2x^2-4x=2x^3-2x^2-4x$$

څرنګه چې x=3in دی، نو د مکعب حجم V مساوي دی په:

$v = 2(3)^3 - 2(3)^2 - 4(3) = 54 - 18 - 12 = 54 - 30 = 24\,in^3$

د b جز سم دی.

3- د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

$b)\,-1$ $a)1$ $c)$ صفر $d)$ درې واړه سم نه دي

حل:

$$(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p} = (a^{p+q})^{p-q}(a^{q+r})^{q-r}(a^{r+p})^{r-p}$$

$$= a^{p^2-q^2} \cdot a^{q^2-r^2} \cdot a^{r^2-p^2} = a^{p^2-q^2+q^2-r^2+r^2-p^2} = a^o = 1$$

د (a) جز سم دی

د پولینوم وېش پر مونوم باندې

د درسي کتاب (25) **مخ** **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	د دې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د مونوم پر مونوم باندې، د پولینوم پر مونوم او د پولینوم وېشل پر پولینوم باندې زده کړي. • پولینوم پر مونوم او پولینوم پر پولینوم باندې وويشلای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې د پولينومونو د وېش اهميت درک کړي او د رياضي زده کړې ته علاقه مند شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	د لومړنيو فعاليتونو د سرته رسولو وروسته ددې لپاره چې د زده کړې لپاره انګيزه پيدا شي، د ورودي برخې پوښتنې دې له زده کوونکو وپوښتل شي: $\frac{\frac{4m^2}{n}}{n} = \frac{4m^2}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{4m^2}{n^2}$, $\frac{3mn^2}{-mn} = -3n$, $\frac{14x^5}{2x^2} = 7x^3$ $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{b}{1} = \frac{b}{a}$, $\frac{-x^2}{x} = -x$, $\frac{-n^a}{n^b} = -n^{a-b}$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

له دې وروسته چې محترم ښوونکی لومړی او دویم مثال د تختې پر مخ حل کړه. د (25) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب يې دا دی:

$a: 3x^3y^5 - 2x^9$ $\qquad b: \frac{1}{y+1}$ $\qquad c: \frac{5b}{3}$

د پولینوم وېش پر پولینوم دې توضيح شي او د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې دريم مثال حل شي او د 26 مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب يې $(a^2 - ab + b^2)$ دی.

څلورم او پنځم مثال دې ښوونکی د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي او د (27) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

شپږم مثال دې حل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره دې لاندې پوښتنې حل شي:

$$\left(x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}\right)\div\left(x+\frac{3}{4}\right)$$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د لوست د ارزونې لپاره لاندې پوښتنې دې له زده کوونکو وپوښتل شي.

$$(x^3-43x+42)\div(x^2+6x-7)$$

$$\frac{3x^4-4x^2+2x-1}{x-1}=?$$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

•

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

$$1-8y^3+z^3+6yz=(1-2y+z)(1+4y^2+z^2+2y+2yz-z)$$

$$8x^6+9x^3+1=(2x^2+3x+1)(4x^4-6x^3+7x^2-3x+1)$$

ځکه چې:

$$8x^6+9x^3+1=8x^6+1+27x^3-18x^3=(2x^2)^3+1^3+(3x)^3-3(2x^2)(1)(3x)$$

$$=(2x^2+1+3x)(4x^2+1+9x^2-2x^2-3x-6x^3)$$

$$=(2x^2+3x+1)(4x^4-6x^3+7x^2-3x+1)$$

• د y په کوم قیمت د $16y^2+9y+7+y^4+7y^3$ پولینوم پر y^3+3y+1 پوره وېشل کیږي؟

حل:

$$\begin{array}{l|l} y^4+7y^3+16y^2+9y+7 & y^3+3y+1 \\ \underline{-y^4 \quad \pm 3y^2 \pm y} & \overline{y+7} \\ \quad 7y^3+13y^2+8y+7 & \\ \underline{\quad -7y^3 \quad \pm 21y \pm 7} & \\ \quad 13y^2-13y & \end{array}$$

$$13y^2-13y=0$$

$$13y(y-1)=0$$

د $y=1$ او $y=0$ په قیمتونو پورتني پولینوم پر y^3+3y+1 پوره وېشل کیږي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- د P په کوم قیمت $3x^3-7x^2-9x+p$ پولینوم پر $x-13$ پوره ویشل کیږي.

حل: د $p=-5291$ په قمیت راکړل شوی پولینوم پر $x-13$ پوره وېشل کیږي.

2- د ویش حاصل یې پیدا کړئ.

$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$

$(x^2+x-6)\div(x-2)$

$(x^5-y^5)\div(x-y)$

$\frac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}$ $\frac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}$ $\frac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$

حل:

$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)=(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

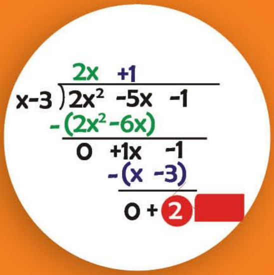
$(x^2+x-6)\div(x-2)=x+3$

$(x^5-y^5)\div(x-y)=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$

$$\frac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}=\frac{jk}{2}-\frac{3j^4k^3}{2}$$

$$\frac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}=4x^2+3x+\frac{5}{x}$$

$$\frac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}=3a^3b^5-2a^9$$



د باقیمانده قضیه

د درسي کتاب (29) **مخ   د لوست وخت:**(1 **درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته د وېش د عملیې پاتې (باقیمانده) د پیداکولو په طریقه وپوهیږي. • د باقیمانده قضیې په مفهوم پوه شي. • په دې وپوهیږي چې که د $p(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشل شي، پاتې له $p(a)$ سره مساوي ده. • د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش د عملیې پاتې پیدا کړئ. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې د باقیمانده له قضیې څخه استفاده وکړای شي او په اهمیت یې پوه شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارټ او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو وروسته د زده کړې د انګیزې د پیداکولو لپاره دې د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وپوښتل شي چې پاتې یې مساوي ده په: $R = p(4) = 4^3 - 6(4)^2 - 4 - 6 = 64 - 96 - 10 = -42$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

محترم ښوونکي دې د لومړی مثال له حلولو څخه وروسته د پاتې قضیې ثبوت زده کوونکو ته توضیح کړي. دویم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي او د (30) مخ فعالیت دې زده کوونکي په ډلو کې سرته ورسوي او خپل کار دې نورو ته توضیح کړي. بیا دریم او څلورم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ او د (31) مخ فعالیت دې یو زده کوونکي د تختې پر مخ کار کړي.په پای کې په پنځم مثال کې د وېش له عملیې پرته او د وېش عملیې د سرته رسولو په واسطه پاتې په لاس راوړئ او سره پرتله دې شي، تر څو په نتیجه کې زده کوونکي په دې وپوهیږي چې د باقیمانده قضیې په مرسته د وېش د عملیې باقي په اسانی سره په لاس راوړلای شو.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې:**

د لوست د پیاوړتیا او د زده کوونکو د لا ښې زده کړې لپاره کولای شي چې لاندې پوښتنې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

- د وېش د عمليې له سرته رسولو پرته که د $P(x)=x^3-3x^2+x-2$ پولينوم پر $(x-2)$ ووېشل شي باقيمانده به يې څو وي. (ځواب (-4))
- که د $P(x)=2x^3-7x^2+12x+3a$ پولينوم پر $(x-3)$ پوره ووېشل شي، د a قيمت پيدا کړئ. (ځواب $a=-9$)

د لوست ارزونه: (5) دقيقې:

محترم ښوونکيه! ددې لپاره چې د زده کوونکو له زده کړې څخه ډاډمن شي چې لاندې پوښتنې له دوی څخه وکړئ.

- د وېش د عمليې له سرته رسولو څخه پرته که د $p(x)=4x^3-13x+10$ پولينوم پر $(x-3)$ ووېشل شي، باقيمانده يې پيدا کړئ؟
- که د $P(x)=x^3-4x^2+bx-2$ پولينوم پر $(x-1)$ پوره ووېشل شي، د b قيمت پيدا کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- که $P(x)=2x^3-7x^2+12x+3a$ پولينوم پر(x-3) پوره ووېشل شي، د پاتې قضيې په مرسته د a قيمت عبارت دی له:

په دې حالت کې بايد $R=P(3)=0$ شي.

$P(3)=2\cdot3^3-7\cdot3^2+12\cdot3+3a=0$

$3a=-27$

$a=-9$

- که $a+b+c=7,\ ab+bc+ca=20$ وي د $a^2+b^2+c^2$ قيمت مساوي دی په:

$a+b+c=7$

$(a+b+c)^2=7^2$

$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=49$

$a^2+b^2+c^2+2(20)=49$

$a^2+b^2+c^2=49-40=9$

- که $P(x)=x^{79}+3x^{24}+5$ پر $(x-1)$ ووېشل شي باقيمانده عبارت ده له: R=9
- د باقيمانده قضيې په مرسته د a قيمت پيدا کولای شو چې که $P(x)=2x^2-ax^2-(2a-3)x+2$ پر $x+1$ ووېشل شي.

$P(-1)=2(-1)^3-a(-1)^2-(2a-3)(-1)+2=0$

$\Rightarrow -2-a+2a-3+2=0$

$\Rightarrow a-3=0$

$a=3$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د باقيمانده قضيې (Remainder theorem) په مرسته يې پاقي (پاتې) پيدا کړئ.

$(5x^3-x^2+4x+1)\div(x-3)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$

$(4y^2-y-6)\div(y-1.6)$

حل:

a) $P(3)=5(3)^3-(3)^2+4(3)+1=5\cdot 27-9+12+1=139$

b) د $(6x^2+15)\div(4x+9)$ باقیمانده مساوي ده په

$4x+9=0$

$4x=-9$

$x=-\frac{9}{4}$

$6(-\frac{9}{4})^2+15=6(\frac{81}{16})+15=\frac{3(81)}{8}+15=\frac{243+120}{8}=\frac{363}{8}=45\frac{3}{8}$

c) د $(4y^2-y-6)\div(y-1.6)$ پاتې مساوي ده په 2.64

d) د $(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$ باقیمانده عبارت ده له $\frac{83}{4}$

2- د باقیمانده قضیې په مرسته وواياست چې د k په کوم قیمت د $5x^3-k^2x^2+3kx-6$ پولینوم پر $(x+2)$ وویشو، تر خو -44 باقي شي؟

که چیرې د $(5x^3-k^2x^2+3kx-6)\div(x+2)$ پاتې -44 وي نو $k=-1$ یا $k=-\frac{1}{2}$ دی.

3- د k په کوم قیمت که د $2k^2y^4-ky^2+1$ پولینوم، پر $(y-\frac{1}{2})$ وویشل شي چې 2 باقي شي؟

حل: $k=4$ یا $k=-2$ دی.

4- که چیرې $m^2x^4-10x^2+2$ پولینوم پر $(x-1)$ وویشو او باقي 17 وي، د m قیمت به څو وي؟

حل: ددې لپاره چې پاتې 17 شي، باید $m=\pm 5$ وي.

$(x^5+1)\div(x+1)$

$P(-1)=(-1^5+1)$
$=-1+1=0$

د فکتور قضيهٔ

د درسي کتاب (33)مخ د لوست وخت:(1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • د فکتور د قضيې او د فکتور د معکوسې قضيې په مفهوم وپوهيږي. • په دې وپوهيږي چې څه وخت د $(x-a)$ دوه حده د يو پولينوم فکتور دی. • د فکتور او د باقيمانده قضيو ترمنځ په اړيکه وپوهيږي. • د فکتور د قضيې په مرسته د پولنيومونو فکتورونه پيدا کړای شي. • د فکتور د قضيې په مرسته الجبري افادې تجزيه کړای شي. • د فکتور له قضيې څخه د رياضي د مسايلو په حلولو کې استفاده وکړای شي او په اهيمت يې پوه شي، د مسايلو له حلولو څخه د رياضي د زده کړې سره علاقه مند شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وپوښتل شي: $P(1)=1^3-4\cdot1^2+1+2=1-4+1+2=0$ څرنګه چې $P(1)=0$ دی؛ نو $(x+1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ پولينوم يو فکتور دی.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

محترم ښوونکی دې د فکتور د قضيې له ثبوت کولو څخه وروسته د زده کوونکو په فعاله ونډې اخيستنې سره لومړی مثال حل کړي. د پوښتنو او ځوابونو په شکل دې لوست لومړنی فعاليت دې له زده کوونکو وپوښتل شي چې ځواب يې دا دی:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$
$$P(1)=2\cdot1^3-13(1)+26(1)-15=0$$

نو $(x-1)$ ددې پولينوم يو فکتور دی.

له دې وروسته چې محترم ښوونکی دويم، دريم او څلورم، مثال د زده کوونکي په ونډې اخيستنې سره د تختې پر مخ حل کړي. زده کوونکو دې د (34) مخ فعاليت دې زده کوونکي په ډلو کې کار وکړي او د خپل کار نتيجه دې د تختې پر مخ نورو ته توضيح کړي چې حل يې په دې ډول دی:

$$x-6=0 \Rightarrow x=6$$
$$6^6-36(6)^3+1296=6^6-6^5+6^4=46656-7776+1296\neq0$$

نو $(x-6)$ ددې پولينوم يو فکتور نه دی.

$x+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$20(-\frac{1}{8})+7(-\frac{1}{2})+6=0$

نو $(x+\frac{1}{2})$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

$x-0.1=0 \Rightarrow x=0.1$

$10(0.1)^3-11(0.1)^2+1=10(0.001)-11(0.01)+1=0$

نو $(x-0.1)$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

$x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{8})=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=0$

نو $(x-\frac{1}{2})$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

$x+5=0 \Rightarrow x=-5$

$(-5)^3+125=-125+125=0$

نو $(x+5)$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$(-2)^5+32=-32+32=0$

نو $(x+2)$ ددې پولینوم فکټور دی.

له دې وروسته چې محترم ښوونکی د فکټور د قضیې د معکوس مفهوم زده کوونکو ته توضیح کړ، لومړی دویم او دریم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره د تختې پر مخ حل کړي. د (35) مخ فعالیت د پوښتنو او ځوابونو په شکل له زده کوونکو وپوښتئ چې ځواب یې داسې دی:

$P(2)=2^3-4(2)^2+5(2)-2=0$

نو د 2 عدد ددې معادلې یو جذر دی. څلورم مثال پر تخته حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره لومړی پوښتنه د زده کوونکو په فعاله ونډې اخیستنې د تختې پر مخ حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

له دې وروسته چې ښوونکي د لوست لنډیز زده کوونکو ته ووایي، د لوست د ارزونې لپاره کولای شي د لاندې پوښتنې په شان پوښتنې له زده کوونکو وپوښتئ.

- فکټور د قضیې په مرسته وښایاست چې $(x+2)$ د $P(x)=x^3-6x^2+32$ د پولینوم یو فکتور دی.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- r د $P(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی که $P(r)=0$ شي.
- $(x-r)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکټور دی که $P(r)=0$ شي.
- که د $P(x)$ پولینوم په $(x-r)$ ووېشل شي او پاتې صفر شي، نو د دې پولینوم ګراف د x محور په r کې قطع کوي یا

گراف په r کې صفري نقطه لري.

- د k قيمت په هغه صورت کې چې راکړل شوي دوه حده د اړوندو پولنيومونو فکټورونه وي عبارت دی له:

$x^3+3x^2-x+k \quad : \quad x-2 \qquad \Rightarrow k=-18$

$kx^3-2x^2+x-6 \quad : \quad x+3 \qquad \Rightarrow k=-1$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د k دکوم قيمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولينوم يو فکټور دی؟

حل: د $K=-2$ په قميت د $(x-2)$ دوه حده د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولينوم يو فکټور دی.

2- ايا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولينوم يو فکټور دی؟

حل: څرنګه چې $P(-3)=(-3)^5-(3)^3+27(-3)^2-27=0$ کيږي، نو $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولينوم يو فکټور دی.

3- د فکټور د قضيې په مرسته وښاياست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ پولينوم يو فکټور دی، که نه؟

حل: $P(-7)=(-7)^3+8(-7)^2+8(-7)+7=-343+392-56+7=0$ څرنګه چې $P(-7)=R=0$ ده نو $(x+7)$ ددې پولينوم يو فکټور دی

4- د ويش د عمليې د سرته رسولو پرته وښاياست چې ايا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ پولينوم يو فکټور دی که نه.

حل: څرنګه چې $P(7)=7^4+2(7)^3-6(7)^2-14(7)-7=2401+686-294-98-7=3087-399\neq 0$

$R=P(7)=2087-399\neq 0$، نو $(y-7)$ د راکړل شوي پولينوم فکتور نه دی

5- وښاياست چې ايا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولينوم يو فکټور دی که نه؟

حل: $P(-\frac{1}{2})=2(-\frac{1}{2})^2+4(-\frac{1}{2})-2 \Rightarrow P(-\frac{1}{2})=2\cdot\frac{1}{4}-2-2=\frac{1}{2}-4\neq 0$، نو $(m+\frac{1}{2})$ ددې پولينوم فکټور نه دی.

6- د $x^3+x^2-10x+8$ پولينوم د فکټور د قضيې په مرسته تجزيه کړئ.

حل: $P(1)=1^3+1^2-10(1)+8=1+1-10+8=0$، نو $(x-1)$ ددې پولينوم يو فکټور دی.

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-10x+8 & x-1 \\ \underline{x^3\mp x^2} & x^2+2x-8 \\ \quad 2x^2-10x & \\ \quad \underline{2x^2\mp 2x} & \\ \qquad -8x+8 & \\ \qquad \underline{\mp 8x\pm 8} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(x-1)(x^2+2x-8)=(x-1)(x+4)(x-2) \qquad x^3+x^2-10x+8=(x-1)(x-2)(x+4)$

7- که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکټورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$P(1)=1+a+b+2=0$

$P(-1)=-1+a-b+2=0$

$a+b=-3$ $\qquad$ $-2-b=-1$

$a-b=-1$ $\qquad$ $-b=1$

$2a=-4$ $\qquad$ $\boxed{b=-1}$

$\boxed{a=-2}$

8- د k دکوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکټور دی؟

حل:

$Q(5)=5^3-5(5)^2-16(5)+k$

$125-125-80+k=0$

$-80+k=0 \Rightarrow \boxed{k=80}$

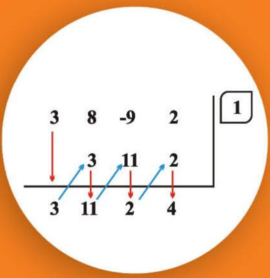
9- د k دکوم قیمت لپاره (-1) د $x^3-9x^2+14x+k=0$ معادلې یو جذر دی.

حل:

$(-1)^3-9(-1)^2+14(-1)+k=0$

$-1-9-14+k=0 \Rightarrow \boxed{k=24}$

ترکیبي وېش (Synthetic devision)



د درسي کتاب (37) مخ د تدریس وخت:(1 یو درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	د دې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د ترکیبي وېش د عملیې د سرته رسولو پړاونه زده کړي. • د ترکیبي وېش په مرسته د وېش حاصل (خارج قسمت) او پاتې پیدا کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې له ترکیبي وېش څخه استفاده وکړای شي او په اهمیت يې وپوهيږي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	د انګیزې د پیداکولو لپاره دې ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وپوښتل شي: $\begin{array}{cccc\|c} 3 & -1 & 2 & -5 & 2 \\ & 6 & 10 & 24 & \\ \hline 3 & 5 & 12 & 19 & \end{array}$ $Q(x)=3x^2+5x+12 \qquad R=19$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

محترم ښوونکی دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره لومړی مثال حل کړي او د ترکیبي وېش پړاوونه دې توضیح کړي. بیا دې د 38 مخ فعالیت زده کوونکي په ډلو کې حل کړي.

محترم ښوونکی دې دویم، دریم، څلورم او پنځم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د ترکیبي وېش په واسطه $P(x)=2x^4+x^3-3x^2+2x$ پر $(x+4)$ باندې وویشئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د لوست له لنډيز څخه وروسته د ارزونې لپاره دې د لوست له پوښتنو څخه د لومړۍ پوښتنې یوه برخه له زده کوونکو وپوښتي.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- که د $P(x)=3x^4-8x^2-11x+1$ پولینوم پر $(x-2)$ وویشل شي، د وېش حاصل او پاتې عبارت ده له:

$Q(x)=3x^3+6x^2+4x-3$ او $R=-5$

2- د ترکیبي وېش په واسطه ښودلای شو چې $(3x-2)$ د $P(x)=6x^3-4x^2+3x-2$ پولنيوم يو فکتور دی.

$3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

$P(\frac{2}{3})=6(\frac{2}{3})^3-4(\frac{2}{3})^2+3(\frac{2}{3})-2=\frac{48-48}{27}=0$

3- که د $P(x)=x^{79}+3x^{24}+5$ پولینوم پر $(x-1)$ وویشل شي، نو پاتې یې مساوي ده په:

$$P(1)=1^{79}+3(1)^{24}+5=1+3+5=9$$

4- که $P(x)=3x^4-8x^2+11x+1$ پولینوم پر $(x+2)$ وویشل شي، نو پاتې یې مساوي ده په: $R=p(-2)=-5$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د ترکیبي ویش په مرسته یې د ویش حاصل او باقیمانده پیدا کړئ.

$(10x^2+2x+11)\div(x+1)$

$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$

$(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

حل:

a)

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & 2 & 1 & -1 \\ & -10 & 8 & \\ \hline 10 & -8 & 9 & \end{array}$$

$Q(x)=10x-8$

$R=9$

b)

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -2 & 12 & 3/2 \\ & 3 & -6 & -12 & \\ \hline 2 & -4 & -8 & 0 & \end{array}$$

$2x-3=0$

$2x=3$

$x=\frac{3}{2}$

$Q(x)=\frac{2x^2-4x-8}{2}=x^2-2x-4 \qquad R=0$

c)

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -3 & 7 & -4 \\ & -20 & 80 & -308 & \\ \hline 5 & -20 & 77 & -301 & \end{array}$$

$Q(x)=5x^2-20x+77 \qquad R=-301$

d)

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 15 & -\frac{9}{4} \\ & -\frac{54}{4} & \frac{243}{8} & \\ \hline 6 & -\frac{54}{4} & \frac{363}{8} & \end{array}$$

$4x+9=0 \Rightarrow x=-\frac{9}{4}$

$Q(x)=\frac{6x-\frac{27}{2}}{4}=\frac{3}{2}x-\frac{27}{8} \qquad R=\frac{363}{8}$

e)

6	2	-1	20	$1/2$
	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	
6	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{83}{4}$	

$p-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$

$Q(x)=6x^2+5x+\frac{3}{2}$ $\qquad R=\frac{83}{4}$

2- د ترکیبي ویش په مرسته یې باقیمانده او د ویش حاصل پیداکړئ.

$(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

حل:

a)

1	0	-17	0	0	-9	3
	3	9	-24	-72	-216	
1	3	-8	-24	-72	-225	

$Q(x)=y^4+3y^3-8y^2-24y-72$ $\qquad R=-225$

b)

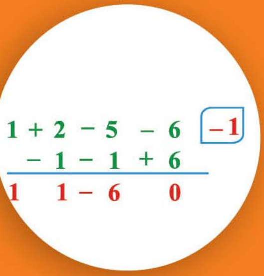
4	-2	0	5	5
	20	90	450	
4	18	90	455	

$Q(x)=4x^2+18x+90$ $\qquad R=455$

c)

1	8	8	7	-7
	-7	-7	-7	
1	1	1	0	

$Q(x)=x^2+x+1$ $\qquad R=0$



د ترکيبي وېش په مرسته د پولينوم د فکتور
او د پولينوم د قيمت پيدا کول

د درسي کتاب (41) مخ **د لوست وخت:(1 ساعت درسی)**

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي)

د دې لوست په پای کې زده کوونکو بايد:

- د ترکيبي وېش په مرسته د پولينوم د فکتور او قيمت پيدا کول زده کړي.
- د ترکيبي وېش په واسطه د پولينومونو قيمت او فکتور پيدا کړای شي.
- د ترکيبي وېش په واسطه د پولينومي معادلې جذرونه پيدا کړای شي.
- د رياضي د مسايلو په حلولو کې له ترکيبي وېش څخه استفاده وکړای شي او اهميت يې درک کړي.

د تدريس لارې (ميتودونه)

پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...

درسي او مرستندويه مواد

درسي کتاب، تخته، چارت او...

د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې

له لومړنو فعاليتونو څخه وروسته چې په مخکنيو لوستونو کې ويل شوي دي، د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 27 & 27 & -3 \\ & -3 & -18 & -27 & \\ \hline 1 & 6 & 9 & 0 & \end{array}$$

$Q(x) = x^2 + 6x + 9 \qquad R = 0$

څرنگه چې $R = 0$ دی، نو $(x+3)$ددې پولينوم يو فکتور دی.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په وړاندې اخيستنې سره لومړی، دويم او دريم مثال حل کړي او د 42 مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب يې داسې دی:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 10 & 5 & 1 \\ & 1 & 0 & 10 & \\ \hline 1 & 0 & 10 & 15 & \end{array}$$

نو د $(x = 1)$ لپاره ددې پولنيوم قيمت 15 دی.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 10 & 5 & 3 \\ & 3 & 6 & 48 & \\ \hline 1 & 2 & 16 & 53 & \end{array}$$

نو د $(x = 3)$ لپاره ددې پولنيوم قيمت 53 دی. څلورم مثال دې حل شي، په پنځم مثال کې د ترکيبي وېش په واسطه د پولينومي معادلې د جذرونو پيدا کول توضيح کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره د ترکیبي وېش په مرسته x په راکړل شوو قیمتونو کې د لاندې پولنیومونو قیمت پیدا کړئ:

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x \quad : \quad P(-4) = (392)$

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 2 \quad : \quad P(3) = (31)$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د لوست د ارزونې لپاره لاندې پوښتنې له زده کوونکو وکړئ:

1- د ترکیبي وېش په واسطه د k قیمت پیدا کړئ، که $(x-2)$ د $x^3 + 3x^2 - x + k$ پولنیوم یو فکتور وي چې ځواب یې داسې دی:

1	3	−1	k	2
	2	10	18	
1	5	9	k+18	

$k + 18 = 0$

$k = -18$

2- د ترکیبي وېش په واسطه د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ، چې $(x+3)$ د $kx^3 - 2x^2 + x - 6$ پولنیوم یو فکتور وي، چې ځواب یې داسې دی:

k	−2	1	−6	−3
	−3k	9k+6	−21−27k	
k	−3k−2	7+9k	−27−27k	

$-27 - 27k = 0$

$k = -1$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د الجبري افادو د مربع جذر پیدا کول

1: د تجزیې په واسطه:

$$\sqrt{\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{16}y^2} = ?$$

$$\sqrt{\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{16}y^2} = \sqrt{(\frac{1}{3}x)^2 + 2(\frac{1}{3}x)(\frac{1}{4}y) + (\frac{1}{4}y)^2} = \sqrt{(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y)^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y$$

2: د وېش په واسطه: $\sqrt{16x^4 - 24x^3 + 25 - 12x + 4}$ عبارت دی له:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - 3x + 2 \\
\hline
4x^2 & 16x^4 - 24x^3 + 25x^2 - 12x + 4 \\
 & -16x^4 \\
\hline
8x^2 - 3x & -24x^3 + 25x^2 \\
 & \mp 24x^3 \pm 9x^2 \\
\hline
8x^2 - 6x + 2 & 16x^2 - 12x + 4 \\
 & _16x^2 \mp 12x \pm 4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\frac{-24x^3}{8x^2} = -3x \qquad \frac{16x^2}{8x^2} = 2$

نو مطلوب جذر $\pm(4x^2 - 3x + 2)$ دی.

په همدې ډول $\sqrt{\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2+\frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9}}$ پیداکړئ.

حل:

$$\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2+\frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9} \\
\frac{x^2}{2} & \pm\frac{x^4}{4} \\
\hline
x^2-2x & -2x^3+4x^2 \\
 & \mp 2x^3 \pm 4x^2 \\
\hline
x^2-4x+\frac{a}{3} & \frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9} \\
 & -\frac{ax^2}{3}\mp\frac{4ax}{3}\pm\frac{a^2}{9} \\
 & 0
\end{array}$$

ځواب: $\pm(\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3})$

- د $(2a^2-5a+3)(2a^2+5a-12)(a^2+3a-4)$ مربع جذر عبارت دی له:

$$(2a^2-5a+3)(2a^2+5a-12)(a^2+3a-4)=(2a-3)(a-1)(2a-3)(a+4)(a-1)(a+4)$$
$$=(2a-3)(2a-3)(a-1)(a-1)(a+4)(a+4)$$

نو مربع جذر يې مساوي دی په: $\pm(2a-3)(a-1)(a+4)$

- له $9x^4-12x^3+10x^2-3x-3$ سره:

a: کومه افاده جمع کړو، تر څو مکمل مربع شي.

b: کومه افاده ترې تفریق کړو، تر څو مکمل مربع شي.

c: د x په کوم قیمت مکمل مربع کیږي.

$$3x^2-2x+1$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 9x^4-12x^3+10x^2-3x-3 \\
3x^2 & -9x^4 \\
\hline
6x^2-2x & -12x^3+10x^2 \\
 & \mp 12x^3 \pm 4x^2 \\
\hline
6x^2-4x+1 & 6x^2-3x-3 \\
 & \underline{-6x^2 \pm 4x \pm 1} \\
 & x-4
\end{array}$$

a: $-x+4$ ور سره جمع شي، ترڅو مکمل مربع شي.

b: $x-4$ ترې تفریق شي، تر څو مکمل مربع شي.

c: $x=4$ $x-4=0 \Rightarrow x=4$ نو د $x=4$ په قمیت مکمل مربع کیږي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- د ترکیبي ویش په مرسته وښایاست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولینوم یوفکټور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولینوم یو فکټور دی.

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 20 & 0 & 7 & 6 & -1/2 \\ & -10 & 5 & -6 & \\ \hline 20 & -10 & 12 & 0 & \end{array}$$

څرنګه چې $R=0$ دی؛ نو $(x+\frac{1}{2})$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & \end{array}$$

څرنګه چې $R=0$ دی؛ نو $(x+1)$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

2- ایا $(x-0.1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولینوم یو فکټور دی؟ ولې؟

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 10 & -11 & 0 & 1 & 0.1 \\ & 1 & -1 & -0.1 & \\ \hline 10 & -10 & -1 & 0.9 & \end{array}$$

څرنګه چې $R=0.9\neq 0$ دی نو $(x-0.1)$ ددې پولینوم یو فکټور نه دی.

3- د ترکیبي ویش په مرسته د y^3-6y^2-y+6 پولینوم قیمت د $y=6$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & -1 & 6 & 6 \\ & 6 & 0 & -6 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & \end{array}$$

نو $y=6$ لپاره ددې پولینوم قمیت صفر دی.

4-که(1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي ویش په مرسته یې نور جذرونه یې پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -10 & 8 & 1 \\ & 1 & 2 & -8 & \\ \hline 1 & 2 & -8 & 0 & \end{array}$$

$Q(x)=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

$x=-4 \qquad x=2$

ددې معادلې نور جذرونه 2 او 4 − دي.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي ویش په مرسته یې د k قیمت پیدا کړئ؟

حل:

1	4	k	8	-2
	-2	-4	$-2k+8$	
1	2	$k-4$	$-2k+16$	

$$-2k+16=0$$

$$-2k=-16$$

$$k=8$$

1- د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ؛ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ د پولینوم یو فکتور وي.

c: که د $P(x)=x^3+2x^2-3kx-10$ پولینوم پر $(x+3)$ وویشل شي او د 8 عدد باقي شي.

حل:

$a)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 125 & -5 \\ & -5 & 25 & -5k-125 & \\ \hline 1 & -5 & k+25 & -5k & \end{array}$$

$$-5k=0 \Rightarrow k=0$$

او یا

$$P(-5)=(-5)^3-5k+125=0$$
$$-125-5k+125=0$$
$$-5k=0$$
$$k=0$$

که $k=0$ وي، نو $(x+5)$ د راکړل شوي پولینوم یو فکتور دی.

$b)$

$$Q(1)=2(1)^4-3(1)^3-(1)-2k=0$$
$$2-3-1-2k=0$$
$$-2k-2=0$$
$$-2k=2$$
$$\boxed{k=-1}$$

که $k=-1$ وي، نو $(x-1)$ د راکړل شوي پولینوم یو فکتور دی.

c)

$$P(-3)=(-3)^3+2(-3)^2+9k-10=8$$
$$-27+18+9k-10=8$$
$$-19+9k=8$$
$$9k=27$$
$$\boxed{k=3}$$

2- د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې پیداکړئ.

$(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$ $(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$

$(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$ $(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$

حل:

a)

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 4 & 0 & 1 & -3 & -28 & -4 \\ & -4 & 0 & 0 & -4 & 28 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & \end{array}$$

$Q(x) = x^4 + x - 7 \quad , \quad R = 0$

b)

$$\begin{array}{rrrr|r} 30 & -20 & -100 & 1000 & 10 \\ & 300 & 2800 & 27000 & \\ \hline 30 & 280 & 2700 & 28000 & \end{array}$$

$Q(x) = 30x^2 + 280x + 2700 \quad , \quad R = 28000$

c)

$$\begin{array}{rrrrr|r} 5 & 0 & -6 & 3 & -4 & -4 \\ & -20 & 80 & -296 & 1172 & \\ \hline 5 & -20 & 74 & -293 & 1168 & \end{array}$$

$Q(x) = 5x^3 - 20x^2 + 74x - 293 \quad , \quad R = 1168$

d)

$$\begin{array}{rrr|r} 10 & -31 & 24 & 3/2 \\ & 15 & -24 & \\ \hline 10 & -16 & 0 & \end{array}$$

$Q(x) = 10x - 16 \quad , \quad R = 0$

3- د فکتور د قضیې په مرسته وښایاست چې $(x-1)$ د $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$ د پولینوم یو فکتور دی.

حل: څرنگه چې $P(1) = (1^3) - 4(1)^2 + 1 + 2 = 1 - 4 + 1 + 2 = 0$ دی نو $(x-1)$ د راکړل شوي پولینوم یو فکتور دی.

4- د فکتور د قضیې په مرسته وښایاست چې $(x - \frac{1}{2})$ د $P(x) = x^3 - \frac{1}{8}$ د پولینوم یو فکتور دی.

حل: څرنگه چې $P(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$ دی نو $(x - \frac{1}{2})$ د $P(x) = x^3 - \frac{1}{8}$ د پولینوم یو فکتور دی.

5- د ترکیبي ویش په مرسته د $x = -\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x) = 5x^2 + x - 9$ د پولینوم قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & -9 & -1/2 \\ & -\frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \\ \hline 5 & -\frac{3}{2} & -\frac{33}{4} & \end{array}$$

نو د $x = -\frac{1}{2}$ لپاره ددې پولینوم قیمت $-\frac{33}{4}$ دی.

6- د ترکیبي ویش په مرسته د $x=3$ لپاره د $K(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ د پولینوم قیمت پیداکړئ.

حل:

2	−3	4	1	3
	6	9	39	
2	3	13	40	

د $x=3$ لپاره ددې پولینوم قیمت 40 دی.

7- د ترکیبي ویش په مرسته وښایاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ د معادلې یو حل (جذر) دی.

حل:

1	−3	1	−3	3
	3	0	3	
1	0	1	0	

څرنګه چې $R=0$ دی، نو 3 عدد ددې پولنیومي معادلې یو جذر حل دی.

8- د فکټور د قضیې په مرسته وښایاست چې د 1− او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ د معادلې حلونه (جذرونه) دي.

حل:

$$(-1)^4-5(-1)^2+4=1-5+4=0$$
$$(2)^4-5(2)^2+4=16-20+4=0$$

نو د 1- او 2 عددونه د راکړل شوې معادلې جذرونه دي.

9- د ترکیبي ویش په مرسته د k قیمت پیداکړئ چې‌که $(x+3)$ د $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ پولینوم یو فکټور وي.

حل:

3	k	-22	24	-3
	-9	$-3k+27$	$9k-15$	
3	$k-9$	$-3k+5$	$9k+9$	

$$9k+9=0 \Rightarrow k=-1$$

په هغه صورت کې چې $(x+3)$ د راکړل شوي پولینوم یو فکټور وي، نو $k=-1$ دی.

10- د ترکیبي ویش په مرسته یې د ویش حاصل او باقي پیداکړئ.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$ $\qquad$ $(x^3-x^2-14x+11)\div(x-4)$

$(7x^4+41x^2-6)\div(x+6)$ $\qquad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

حل:

1	−1	−14	11	4
	4	12	−8	
1	3	−2	3	

$$Q(x)=x^2+3x-2 \qquad , \qquad R=3$$

په همدې ډول یې نورې 3 برخې هم حلیږي.

11- د b او c قيمتونه په داسې حال کې پيدا کړئ چې که د $P(x)=x^4+6x^3-20x^2+bx+c$ پولينوم پر x^2-3x+2 وويشو، باقي صفر شي.

حل:

$$\begin{array}{l|l} x^4+6x^3-20x^2+bx+c & x^2-3x+2 \\ \underline{-x^4 \mp 3x^3 \pm 2x^2} & x^2+9x+5 \\ \quad 9x^3-22x^2+bx & \\ \quad \underline{-9x^3 \mp 27x^2 \pm 18x} & \\ \qquad 5x^2+bx-18x+c & \\ \qquad \underline{-5x^2 \quad \mp 15x \pm 10} & \\ \qquad\quad bx-3x-10+c=0 & \\ \qquad\quad (b-3)x-10+c=0 & \end{array}$$

په پايله کې $b=3$ و $c=10$ دی.

12- د m قيمت په داسې حال کې پيدا کړئ چې که د $\mathrm{K(x)=2x^3+5x^2-mx+4}$ پولينوم پر x^2+2x-1 وويشو او باقي صفر شي.

حل:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+5x^2-mx+4 & x^2+2x-1 \\ \underline{\pm 2x^3 \pm 4x^2 \mp 2x} & 2x+1 \\ \quad x^2-mx+2x+4 & \\ \quad \underline{\pm x^2 \qquad \pm 2x \mp 1} & \\ \qquad -mx+5=0 & \\ \qquad -mx=-5 \qquad m=\frac{5}{x} & \end{array}$$

که $m=\frac{5}{x}$ وي، نو د $K(x)=2x^3+5x^2-1$ پولينوم پر x^2+2x-1 پوره وېشل کېږي.

13- که $K=3a(x-1)^2-a(x-1)-4$ او $L=16+b(x-1)-3b(x-1)^2$ وي $Kb+La$ پيدا کړئ.

حل: لومړی پولينوم په b کې او دويم پولينوم په a کې ضربوو:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Kb=3ab(x-1)^2-ab(x-1)-4b} \\ &\underline{\mathrm{La=-3ab(x-1)^2+ab(x-1)+16a}} \\ &\mathrm{Kb+La=-4b+16a} \\ &=16a-4b \end{aligned}$$

14- د $x^3+y^3+z^3-3xyz$ قيمت پيدا کړئ که $x+y+z=11$ او $xy+yz+zx=20$ وي.

حل:

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$1 = x^2+y^2+z^2+2\cdot 20$

$x^2+y^2+z^2 = -39$

$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$= (x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\right] = (1)(-39)-20 = -59$

15-که $x+y=6$ او $xy=8$ وي، د x^3+y^3 قیمت پیدا کړئ.

حل:

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \Rightarrow (6)^2 = x^2+y^2+2\cdot 8$

$x^2+y^2 = 36-16 = 20 \Rightarrow x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

$x^3+y^3 = (6)(20-8) = (6)(12) = 72$

16- د x په کوم قیمت د $P(x)=12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $(3x^2-1)$ پوره ویشل کیږي؟

حل:

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \hline \pm 12x^4 \qquad \mp 4x^2 & 4x^2+x-3 \\ \hline \quad 3x^3-9x^2+x & \\ \quad \pm 3x^3 \qquad \mp x & \\ \hline \qquad -9x^2+2x+5 & \\ \qquad \mp 9x^2 \qquad \pm 3 & \\ \hline \qquad\quad 2x+2=0 & \\ \qquad\quad x=-1 & \end{array}$$

یا په بل عبارت $P(-1)=0$ کیږي.

17- د p دکوم قیمت لپاره د $K(x)=3x^3-7x^2-9x+p$ پولینوم پر $(x-13)$ پوره د وېشلو وړ دی؟

حل:

$K(13) = 3(13)^3-7(13)^2-9(13)+P = 6591-1183-117+P = 0$

$\Rightarrow p = -5291$

18-که د $P(x)=2x^3-x^2+3x-1$ پولینوم پر $(2x+1)$ وویشل شي، د ویش د عملیې د سرته رسولو پرته ویلای شئ

چې پاتې(باقي مانده) به څومره وي؟

$a)\ -3$ $\qquad b)\ -\frac{3}{2}$ $\qquad c)\ 3$ $\qquad d)\ \frac{7}{2}$

حل: د a جز سم دی ځکه چې:

$2x+1=0$

$2x=-1$

$x=-\frac{1}{2}$

$$P(-\frac{1}{2})=2(-\frac{1}{2})^3-(-\frac{1}{2})^2+3(-\frac{1}{2})-1$$

$$=2(-\frac{1}{8})-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-1=\frac{-1-1-6-4}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

19- د m قیمت به څو وي، که د $P(x)=5x^2+6x-7$ پولینوم پر $(x+m)$ وویشل شي تر څو باقي مانده (1) شي؟

a) 2 b) $-\frac{4}{5}$ c) -4 d) a او b سم دي

حل: د d جز سم دی، ځکه چې:

$$P(-m)=5(-m)^2-6m-7=5m^2-6m-7$$

$$5m^2-6m-7=1$$

$$5m^2-6m-8=0$$

$$m=\frac{6\pm\sqrt{36+160}}{10}=\frac{6\pm14}{10}=\begin{cases}2\\-\frac{4}{5}\end{cases}$$

$m=2$ یا $m=-\frac{4}{5}$

20-که د $P(x)=x^3+3x^2-5x-8$ پولینوم، پر $(x+3)$ وویشل شي د ویش د عملیې له سرته رسولو پرته ووایاست چې باقي څومره ده؟

$a)$ صفر $b)$ 13 $c)$ -23 $d)$ 7

حل:

$$P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-5(-3)-8$$

$$P(-3)=-27+27+15-8=7$$

څرنګه چې $R=7$ دی، نو د d جز سم دی.

21-که چیرې $x=4$ ، $y=-3$ او $z=2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

$a: x^2yz+zxy^2+3xyz^2$ $b: \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}z^2$

حل:

a) $(4)^2(-3)(2)+(2)(4)(-3)^2+3(4)(-3)(2)^2\Rightarrow -96+72-144=-168$

b) $\frac{1}{2}(4)^2-\frac{1}{3}(-3)^2+\frac{1}{4}(2)^2$

$\frac{1}{2}(16)-\frac{1}{3}(9)+\frac{1}{4}(4)$

$8-3+1=6$

22- د x د راکړ شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي ویش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)=2x^3+3x^2-2x+5$: $x=2$

$P(x)=3x^3+4x^2-5x+6$: $x=-1$

$P(x)=2x^4-5x^3+4x-1$: $x=1$

$P(x)=4x^4+6x^3+x^2+x-3$: $x=-2$

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 & 2 \\ & 4 & 14 & 24 & \\ \hline 2 & 7 & 12 & 29 & \end{array}$$

$P(2)=29$

په همدې ډول نور يې هم حليږي.

23- د لاندې معادلو يو، يو جذر راکړ شوی دی، د ترکيبي ويش په مرسته يې نور جذرونه پيدا کړئ.

$x^3-3x^2+x-3=0$ يو جذر يې (3) دی.

$x^3-5x^2+7x+13=0$ يو جذر يې (-1) دی.

$x^4-5x^2+4=0$ يو جذر يې (-1) دی.

$x^4-x^3-9x^2-11x-4=0$ يو جذر يې (-1) دی.

حل:

a)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ & 3 & 0 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$(x-3)(x^2+1)=0$

څرنګه چې $x^2=-1$ کيږي، نو په حقيقي عددونه کې جذر نه لري.

په دې معنا چې معادله يو حقيقي جذر لري چې د (3) عدد دی.

b)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 7 & 13 & -1 \\ & -1 & 6 & -13 & \\ \hline 1 & -6 & 13 & 0 & \end{array}$$

$(x^2-6x+13)(x+1)=0$ معادله يو حقيقي جذر لري چې د (-1) عدد دی.

c)

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & -1 \\ & -1 & 1 & 4 & -4 & \\ \hline 1 & -1 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x^3-x^2-4x+4)=0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 4 & 1 \\ & 1 & 0 & -4 & \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x-1)(x^2-4)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$

په نتيجه کې د معادلې جذرونه عبارت دي له: $x=2$, $x=-2$, $x=-1$, $x=1$

1	−1	−9	−11	−4	−1
	−1	2	7	4	
1	−2	−7	−4	0	

$(x+1)(x^3-2x^2-7x-4)=0$

1	−2	−7	−4	−1
	−1	3	4	
1	−3	−4	0	

$(x+1)(x+1)(x-4)(x+1)=0$

$x_1=-1 \qquad x_2=-1 \qquad x_3=4 \qquad x_4=-1$

24-که $P(x)=0$ وي، د دې پولينوم درجه څو ده؟

$a)1$ $\qquad b)-1$ $\qquad c)$ صفر $\qquad d)$ تعريف شوې نه ده

حل: د d جز سم دی د صفري پولينوم درجه تعريف شوي نه ده

25- د هغه مستطيل له مساحت څخه چې بعدونه يې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطيل مساحت تفريق کړئ چې بعدونه يې $(x+3)$ او $(x-1)$ وي.

حل:

$(x+2)(x+5)-(x+1)(x+3)=x^2+7x+10-(x^2+4x+3)$
$=x^2+7x+10-x^2-4x-3=3x+7$

26-که $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ وي او $a=13$ ، $b=5$ ، $c=12$ او $P=\dfrac{a+b+c}{2}$ وي، د A قيمت پيدا کړئ.

حل:

$P=\dfrac{13+5+12}{2}=15$

$A=\sqrt{15(15-13)(15-5)(15-12)}=\sqrt{(30)(10)(3)}=\sqrt{900}=30$

27-که $(x-1)^3$ او x^3+ax^2+bx+c معادل پولينومونه وي، د b قيمت مساوي دی په:

$a)\ 1 \qquad b)\ 3 \qquad c)\ -3 \qquad d)\ -1$

حل:که $x^3+ax^2+bx+c=x^3-3x^2+3x-1$ وي؛$(b=3)$ ، نو د b جز سم دی.

28- د $(a-\dfrac{2}{a-1})\ (a\div\dfrac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) $a(a+1)$ $\qquad$ b) $a(a-2)$ $\qquad$ c) $\dfrac{a-2}{a}$ $\qquad$ d) $\dfrac{a-1}{a}$

حل: $\dfrac{a(a-1)}{a+1}\cdot\dfrac{a^2-a-2}{a-1}=\dfrac{a(a-1)(a-2)(a+1)}{(a+1)(a-1)}=a(a-2)$ وي، نو د b جز سم دی.

29- د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2 $\qquad$ b) x^2+y^2 $\qquad$ c) $2x^2-y$ $\qquad$ d) $x-y$

حل: $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)=(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ ؛نو a جز سم دی.

30- لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او وواياست چې درجې يې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

حل: a) $3x^5-5x^2+9$, $n=5$ b) $-x^5-x^2+xy^2z^3$, $n=5$ c) 3 , $n=0$

31- د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

$a)\ 7$ $b)\ -7$ $c)\ 1$ $d)\ -1$

حل: $Q(-1)=(-1)^2+3(-1)-5=1-3-5=-7$ ؛ نو b جز سم دی.

32-که $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ پولینومونه وي، د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$ $P(0)+Q(0)$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

حل:

$$P(x)-Q(x)=x^2-2x+3-(2x^2+3x-1)=x^2-2x+3-2x^2-3x+1=-x^2-5x+4$$
$$P(x)-P(x)=(x^2-2x+3)-(x^2-2x+3)=0$$
$$P(0)+Q(0)=3-1=2$$
$$[P(x)+Q(x)]+P(x)=3x^2+x+2+x^2-2x+3=4x^2-x+5$$
$$P(1)-Q(-1)=1-2+3-(2-3-1)=2-(-2)=2+2=4$$

33- لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

حل:

$y^3-3xy^2+4x^2y+x^3$ $y^4+4xy^3+2x^2y^2-3x^3y+x^4$

34- په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ

13 , $\sqrt{2}x$, 0 , $\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

حل:

a) $\sqrt{2}\,x$ یو پولنیوم دی او هم یوه ناطقه الجبري افاده ده.

b) $\frac{3x^2}{2}$ یو پولنیوم دی او هم یوه ناطقه الجبري افاده ده.

c) 13 یو ثابت پولینوم دی.

d) 0 صفري پولینوم دی.

e) $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ یوه غیر ناطقه الجبري افاده ده.

f) $y^2-\frac{1}{y^2}$ پولینوم نه دی، خو ناطقه الجبري افاده ده.

35- د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

$a)\ 1$ $b)$ صفر $c)\ -1$ $d)\ 2$

حل: $1+2x+3x^2+3x-5-2x^2-x^2-5x+4=3x^2-3x^2+5x-5x+5-5=0$؛ د b جز سم دی.

36- د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده يې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ دی ؛ نو بله افاده $(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ ده.

37- د ويش حاصل يې پيدا کړئ.

$(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$ $(a^3+b^3)\div(a+b)$

$(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$ $(a^5-b^5)\div(a-b)$

$\dfrac{x^{a-2}}{x}$ $\dfrac{-m^a}{m^b}$

حل:

a)

$$\begin{array}{l|l} a^3+b^3 & a+b \\ \hline -a^3 \quad \pm a^2b & a^2-ab+b^2 \\ \hline -ab+b^3 & \\ \mp a^2b \quad \mp ab^2 & \\ \hline ab^2+b^3 & \\ -ab^2 \quad \pm b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \hline \pm 12x^4 \quad \mp 4x^2 & 4x^2+x-3 \\ \hline 3x^3-9x^2+x & \\ \pm 3x^3 \quad \mp x & \\ \hline -9x^2+2x+5 & \\ \mp 9x^2 \quad \pm 3 & \\ \hline 2x+2 & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\ \hline \pm 4x^3 \pm 2x^2 & 2x^2-6x+9 \end{array}$$

$$-12x^2+12x$$
$$\mp 12x^2 \mp 6x$$
$$18x+6$$
$$\pm 18x \pm 9$$
$$-3$$

$d)\quad \dfrac{a^5-b^5}{a-b}=\dfrac{(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^2+b^4)}{(a-b)}=(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^2+b^4)$

او یا:

$$\begin{array}{l|l} a^5-b^5 & a-b \\ \hline _a^5 \mp a^4b & a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \end{array}$$

$$a^4b - b^5$$
$$_a^4b \mp a^3b^2$$
$$a^3b^2 - b^5$$
$$_a^3b^2 \mp a^2b^3$$
$$a^2b^3 - b^5$$
$$_a^2b^3 \mp ab^4$$
$$ab^4 - b^5$$
$$_ab^4 \mp b^5$$
$$0$$

$e)\quad \dfrac{x^{a-2}}{x}=x^{a-2-1}=x^{a-3}$

$f)\quad \dfrac{-m^a}{m^b}=-m^{a-b}$

38- ضرب يې کړئ.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)\qquad (\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)\qquad (m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)\qquad (2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

حل:

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)=a^{4x}-2a^{2x}-2a^{2x}+4=a^{4x}-4a^{2x}+4$

$(e^x+1)(e^x-1)=e^{2x}-1$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)=0.001x^6$

$$(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{16}x+\frac{1}{8}$$

$$(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)=2m^4-m^2n^2-4m^2n^2+2n^2=2m^4-5m^2n^2+2n^4$$

$$(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)=(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$$

39- لومړی لاندې افادې ساده او بیا یې جمع کړئ.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

حل:

a) $(a-1)+1-(a-1)-3=a-1+1-a+1-3=-2$

b) $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2=-10mn+m-m^2-m+m^2=-10mn$

c) $(y^2-1)+(y^2-1)=2y^2-2$

d) $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]=-4a+4b-5+2a+b-a+b=-3a+6b-5$

e) $10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]=10[-\{-x^2+1+5\}-x^2+2x]$

$=10[x^2-6-x^2+2x]=10[2x-6]\Rightarrow 20x-60$

f) $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)=10x+10-x-1-3x-6=6x+3$

g) $mn-4+mn-5=2mn-9$

40- که $a+b=9$ او $ab=20$ وي $(a-b)$ پیدا کړئ.

حل:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$81=a^2+b^2+40$

$41=a^2+b^2$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$(a-b)^2=41-40=1$

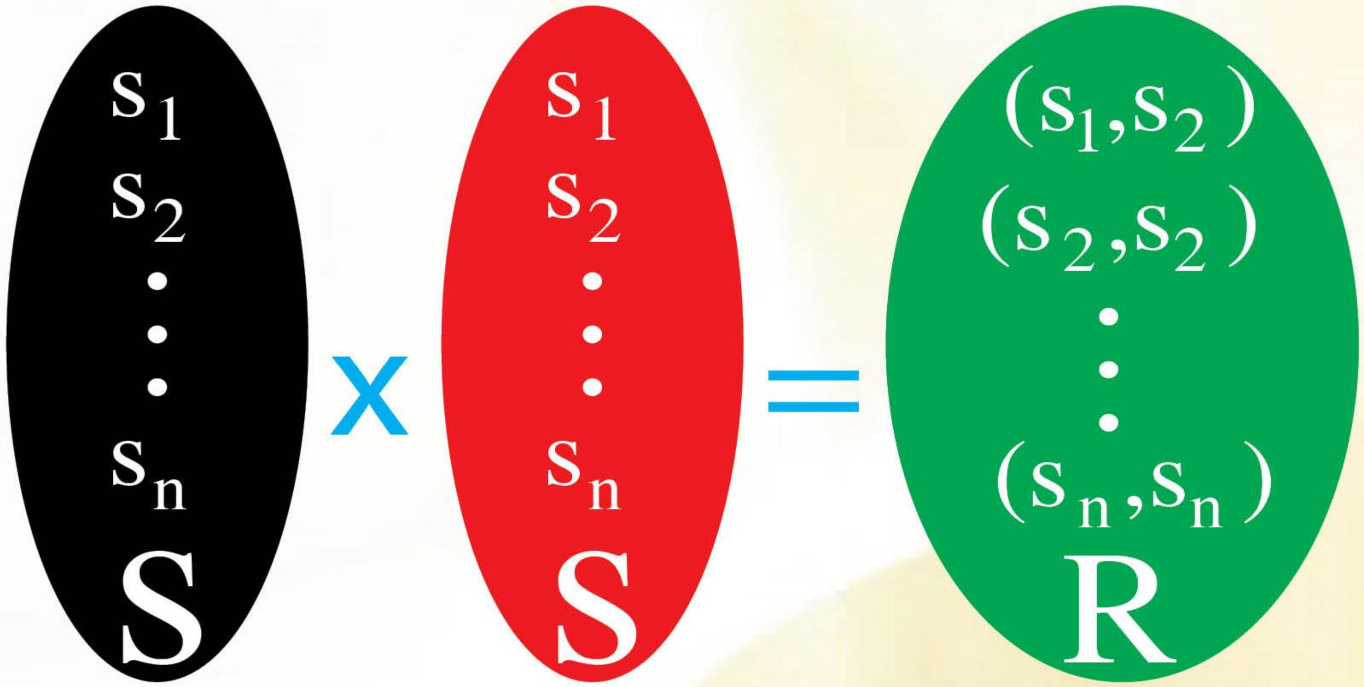
$a-b=\pm1$

41- که $a+b=7$ او $a-b=1$ وي a^2+b^2 ، $4ab$ او $8ab(a^2+b^2)$ پیدا کړئ.

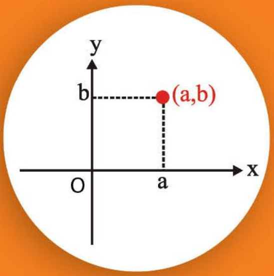
حل:

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$
$$49-1=4ab$$
$$48=4ab$$
$$24=2ab$$
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$
$$49=a^2+b^2+24$$
$$25=a^2+b^2$$
$$a^2+b^2=25$$
$$2ab=24$$
$$ab=12$$
$$8ab(a^2+b^2)=8\cdot 12\cdot 25=96\cdot 25=2400$$

دویم څپرکی
رابطه



s_1
s_2
s_n
S
x
s_1
s_2
s_n
S
=
(s_1, s_2)
(s_2, s_2)
(s_n, s_n)
R



مرتبې جوړې او کارتيزيني مستوي

د درسي کتاب: (53)مخ **د لوست وخت:** (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • مرتبې جوړې او کارتيزيني مستوي وپېژني. • په دې وپوهيږي چې د نقطو وضعيه کميات په کومه ناحيه کې مثبت او په کومه ناحيه کې منفي دي. • هغه نقطې چې وضعيه کميات يې راکړل شوي وي په کارتيزيني مستوي کې تعين کړای شي. • د رياضي دمسايلو په حل کې د نقطو د موقعيت پيدا کولو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، پوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته له چارت څخه په استفادې او يا د تختې پر مخ د مرتبو جوړو د مساوي کېدو شرط دې توضيح شي د (x,y) او (a,b) مرتبې جوړې هغه وخت سره مساوي دي چې $x=a$ او $y=b$ وي او $(a,b)\neq(b,a)$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

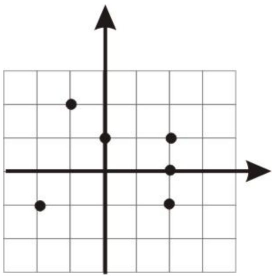
د زده کوونکو په وړاندې اخيستنې سره دې لومړی مثال حل شي او د (53) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب يې په لاندې ډول دی:

$(a+1, 2b-3)=(0,-1)$

$a+1=0 \Rightarrow a=-1$

$2b-3=-1 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1$

کارتيزيني مستوي، قايم محورونه او د وضعيه کمياتو مبدا دې په شکل کې ور وښودل شي او د محورونو مثبت او منفي جهتونه دې واضح شي. بيا دې د دويم او دريم مثال نقطې په شکل کې وټاکل شي. بيا دې زده کوونکي د (55) مخ فعاليت په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي چې شکل يې په لاندې ډول دی:



$(2,0),(2,1),(-2,-1),(-1,2),(2,-1)$ او $(0,1)$

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې:**

د زده کوونکو په وړاندې اخيستنې سره لومړی او دويمه پوښتنه حل کړي.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د لوست له لنډیز څخه وروسته دریمه پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

په عمومي حالت کې

$(a,b) \neq (b,a)$

$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow [(a=c) \wedge (b=d)]$

a: اگر $(x-2y, 2x+y) = (3,1)$ وي د x او y قیمتونه عبارت دي له:

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=3 \\ 4x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1$$

b: که د $(2, y-1)$ او $(x+3,-3)$ دوې مرتبې جوړې سره مساوي وي، د x او y قیمتونه مساوي دي په:

$x=-1$

$y=-2$

c: که د $(4a+1, 2b+a) = (5, 3a-4b)$ وي، د a او b قیمتونه مساوي دي په:

$a=1$

$b=3$

d: $(2-3a, 3b-3) = (2b+3, 1+a)$ وي، د a او b قیمتونه عبارت دي له:

$a=-1$

$b=1$

e: که $(-2^n+1, y+1, 2x-3) = (-7, 3n, 5)$ وي، د $2n+y-x$ قیمت عبارت دی له:

$-2^n+1=-7$	$y+1=3n$	$2x-3=5$
$n=3$	$y=8$	$x=4$

$\Rightarrow 2n+y-x = 6+8-4 = 10$

f: که $(3x-2y, 2^{x+y}) = (x, 8^{-2})$ وي، د (x,y) مرتبه جوړه مساوي ده په:

$3x-2y = x \Rightarrow 2x = 2y$

$2^{x+y} = 8^{-2} = 2^{-6} \Rightarrow x+y=-6$

ددې معادلو له حل څخه لرو چې:

$y=-3$ و $x=-3 \Rightarrow (x,y) = (-3,-3)$

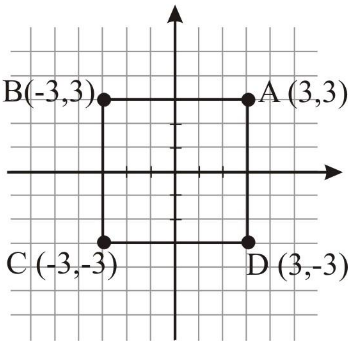
د پوښتنو ځوابونه:

1- که د P د نقطې فاصله مثبت او ترتیب یې منفي وي، د P نقط په کومه ربعه کې واقع ده؟

حل: د P نقطه په څلورمه ناحیه کې واقع ده.

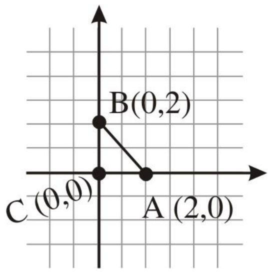
2- که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، داکوم ډول هندسي شکل دي؟

حل: دا هندسي شکل مربع ده.



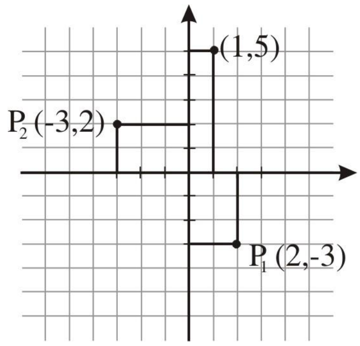
3- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه يې $A(2,0)$, $B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړې او ووآیاست چې د اکوم ډول مثلث دي؟

حل: دا قایمه زاویه متساوي الساقین مثلث دی.



4- د $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$ او $P_3(1,5)$ نقطې و وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

حل:

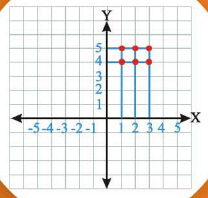


5- ووایاست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربعه کې واقع دي؟

$(1,5)$, $(-5,1)$, $(-4,-6)$, $(4,-5)$, $(-\frac{1}{2},-2)$

$(-\frac{1}{2},2)$, $(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$, $(0,-1)$

حل: $(1,5)$ په لومړی ناحیه کې، $(-5,1)$ په دویمه ناحیه کې، $(-4,-6)$ په دریمه ناحیه کې، $(4,-5)$ په څلورمه ناحیه کې، $(-\frac{1}{2},-2)$ په دریمه ناحیه کې، $(-\frac{1}{2},2)$ په دویمه ناحیه کې، $(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ په لومړۍ ناحیه کې، د $(2,0)$ نقطه د X پر محور او د $(0,-1)$ نقطه د y پر محور واقع ده.



د کارتیزیني ضرب حاصل او گراف یې

د درسي کتاب مخ: (57)   **د لوست وخت:** (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: ● د دوو سټونو د کارتیزیني ضرب حاصل د پیداکولو طریقه زده کړي. ● د کارتیزیني ضرب حاصل په تعریف وپوهیږي. ● د $A\times B$ د سټ د عناصرو شمېر پیدا کړای شي. ● د A او B د دوو سټونو کارتیزیني ضرب حاصل پیدا کړای شي. ● د A او B د دوو سټونو د کارتیزیني ضرب حاصل په شکل کې وښودلای شي. ● د ریاضي په موضوعاتو کې د ضرب له دې حاصل څخه استفاده وکړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنو فعالیتونو څخه وروسته د چارت او یا د تختې له مخې د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ، که پوه نه شو د مثالونو له حلولو وروسته به یې ځواب پیدا کړای شي چې ځواب یې په لاندې ډول دی: $A=\{1,2,3\}\ ,\quad B=\{4,5\}$ $A\times B\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4)(3,4)\}$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

لومړی فعالیت دې د 58 مخ د فعالیت د سرته رسولو وروسته زده کوونکي سرته ورسوي.

د زده کوونکو په ونډې اخیستنې د $A\times B$ له تعریفولو څخه وروسته لومړی مثال حل کړئ. د 58 مخ فعالیت دې زده کوونکي کار کړي چې ځواب یې په لاندې ډول دی:

$A\times B=\{(-4,1),(-4,4),(-1,1),(-1,4),(0,1)(0,4)\}$

$A\times A=\{(-4,-4),(-4,-1),(-4,0),(-1,-4),(-1,-1)(-1,0),(0,-4),(0,-1),(0,0)\}$

$B\times B=\{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4)\}$

بیا دې دویم او دریم مثال زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي،. ددې لپاره چې د $A\times B$ د ضرب حاصل په شکل کې وښودلای شي. څلورم، پنځم او شپږم مثال دې حل شي. د 59 مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او د ګروپ نماینده دې خپل کار د تختې پر مخ وښيي چې ځواب یې په لاندې ډول دی:

$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د (60) مخ له پوښتنو څخه لومړۍ پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

که $A=\{3,4\}$ او $B=\{0,-1\}$ وي د $A\times B$ ګراف رسم کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د A او B د دوو (چې تش نه وي) سټونو د کارتیزیني ضرب حاصل عبارت دی له:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$$

- د R^2 د سټ عناصر د وضعیه کمیاتو د مستوي د ټولو هغو نقطو سټ دی چې:

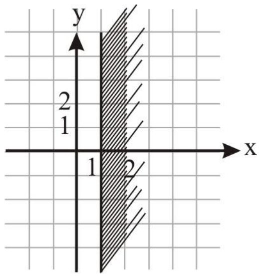
$$R^2=R\times R=\{(x,y)\mid x\in R, y\in R\}$$

- مثال: د مختصاتو په مستوي کې د دویمې ناحیې د نقطو سټ د دوو سټونو د دکارتي ضرب په شکل په دې ډول ښودل کیږي:

$A=\{x\mid x\in R\ ,\ \ x<0$ $\qquad B=\{y\mid y\in R\ ,\ y>0\}$

$A\times B=\{(x,y)\mid x,y\in R\ \ ,\ \ x<0\wedge y>0\}$

- په لاندې شکل کې هغه ساحه چې توره شوې ده د کومو سټونو د دکارتي ضرب حاصل ګراف دې.



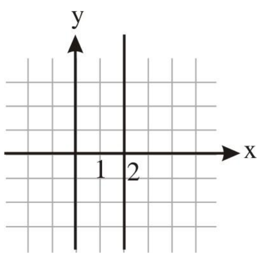
حل:

$A=\{x\mid x\in R\ ,\ x\geq 1\}$ $\qquad B=\{y\mid y\in R\}$ $\qquad A\times B=\{(x,y)\mid x,y\in R\ ,x\geq 1\}$

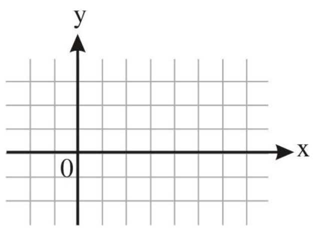
د $R\times\{0\}$ او $\{2\}\times R$ ګرافونه په لاندې ډول دي:

$R\times\{0\}=\{(x,0)\mid x\in R\}$ $\qquad \{2\}xR=\{(2,y)\mid y\in R\}$

- د $R\times\{0\}$ کارتیزیني ضرب حاصل ټولې هغه نقطې دي چې د x پر محور او د $\{2\}\times R$ د کارتیزیني ضرب حاصل ټولې هغه نقطې دي چې د x=2 پر خط واقع دي.



$\{2\}\times R$



$R\times\{0\}$

• د A د هر سټ لپاره لرو چې: $A\times\phi=\phi$ و $\phi\times A=\phi$ دی.

مثال: که $A=\{a,b,c\}$ او $B=\{x,y\}$ وي:

$A\times B=\{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$

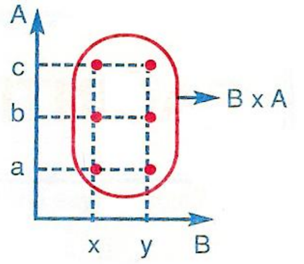
$n(A)=3$

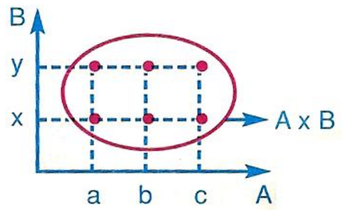
$n(B)=2\Rightarrow n(A\times B)=3\cdot 2=6$

$B\times A=\{(x,a),(x,b),(x,c),(y,a),(y,b),(y,c)\}$

$n(B\times A)=n(B)\cdot n(A)=2\cdot 3=6$

$n(A\times B)=n(B\times A)$

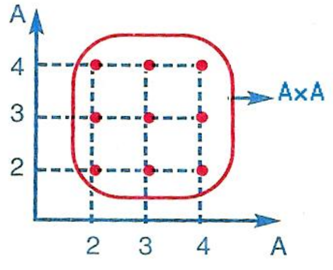




مثال: که $A=\{2,3,4\}$ وي :

$A\times A=\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

$n(A\times A)=n(A)\times n(A)=3\times 3=9$



مثال: که $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,4\}$ او $C=\{1,2,3\}$ وي:

$a:\quad A\times(B\cup C)$ $\qquad b:\quad (A\times B)\cup(A\times C)$

$a:\quad B\cup C=\{1,2,3,4\}$

$A\times(B\cup C)=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$

$b:\quad A\times B=\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

$A\times C=\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$

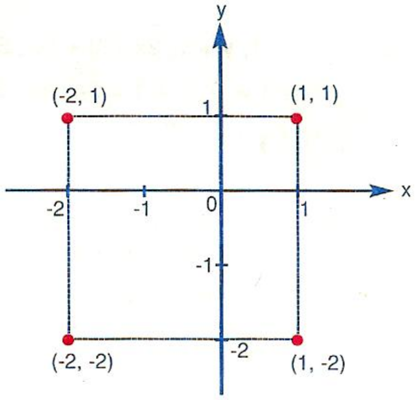
$(A\times B)\cup(A\times C)=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$

په پایله کې:

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

• که $A=\{-2,1\}$ وي $A\times A$ په شکل کې په داسې ډول ښودلای شو:

$A\times A=\{(-2,-2),(-2,1),(1,-2),(1,1)\}=A^2$

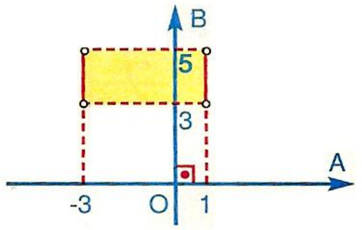


- که $A=\{x:|x+1|\leq 2, x\in IR\}$ او $B=\{y:|y-4|<1, y\in IR\}$ وي $A\times B$ گراف په لاندې ډول دی:

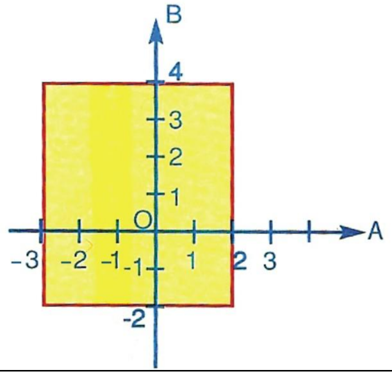
$A=\{x:-2\leq x+1\leq 2, x\in R\}=\{x:-3\leq x\leq 1, x\in R\}=[-3,1]$

$B=\{y:-1<y-4<1, y\in R\}=\{y:3<y<5, y\in R\}=(3,5)$

$\Rightarrow A\times B=[-3,1]\times(3,5)$



- که $A=[-3,2]$ او $B=[-2,4]$ وي $A\times B$ په شکل کې داسې ښودل کیږي.



د پوښتنو ځوابونه:

1- که:

i) $B=\{2,4\}$ او $A=\{-1,1,3\}$

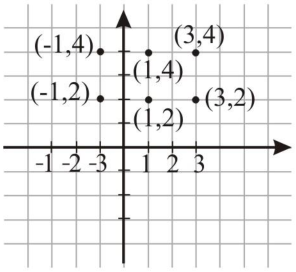
ii) $B=\{2,3\}$ او $A=\{-1,1\}$

وي $A\times B$ پیدا او په شکل کې یې وښایاست.

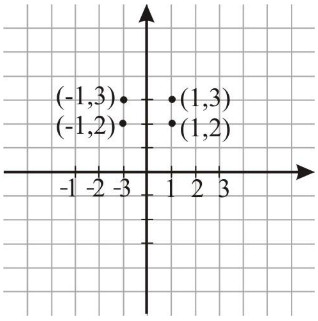
حل:

i) $A\times B=\{(-1,2),(-1,4),(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)\}$

ii) $A\times B=\{(-1,2),(-1,3),(1,2),(1,3)\}$



i

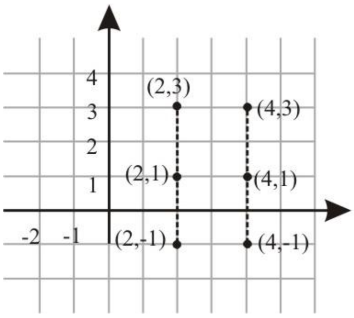


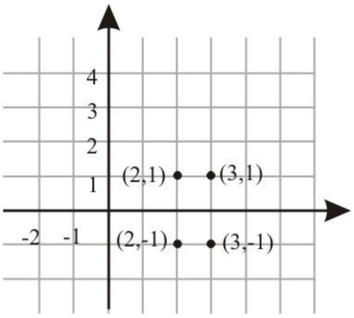
ii

2- د لومړۍ پوښتنې د سټونو لپاره $B \times A$ پیدا اوپه شکل کې یې وښایاست

حل:

$$B \times A = \{(2,-1),(2,1),(2,3),(4,-1),(4,1),(4,3)\}$$





$$B \times A = \{(2,-1),(3,-1),(2,1),(3,1)\}$$

3- که $A = \{1,2,3\}$ وي $A \times A$ پیداکړئ

حل:

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

4- که $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وي، $A \times A, B \times A, A \times B$ او $B \times B$ پیداکړئ.

حل:

$$A \times B = \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}$$
$$B \times A = \{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$$
$$A \times A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$
$$B \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$

رابطه (Relation)

د درسي کتاب (61) مخ **د لوست وخت: (1 درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: ● د رابطې اود معادلې رابطې تعريفونه زده کړي. ● د رابطو د تعريف او قيمتونو ناحيې پيدا کړای شي. ● په A کې او له A څخه په B کې د رابطو شمير پيدا کړای شي. ● د يوې رابطې معکوس او د تعريف او قيمتونو ناحيې يې پيدا کړای شي. ● د رياضي د مسايلو په حلولو کې لـه رابطو او د رابطو لـه خاصيتونو څخه استفاده وکړای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنو فعاليتونو څخه وروسته (عطاالله Related عزت‌الله) به شکل (عطاالله R عزت‌الله) په شکل ليکل شوي دي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

د رابطې له تعريفونو څخه وروسته د زه کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې لومړی، دويـم او دريـم مثـال حـل شـي او د 62 مـخ فعاليت دې زده کوونکي په مناسبو گروپونو کې سرته ورسوي، محترم ښوونکي دې متوجه اوسي چې په دې فعاليت کې تېروتنـه شوې ده $R=\{(x,y)\,|\,x+y=5\}$ مثبته علامه، منفي شوې ده چې ځواب يې په لاندې ډول دی:

$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$
$$R=\{(x,y)\,|\,x+y=5\}$$
$$R=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

څلورم مثال دې حل شي، د يوې رابطې د تعريف ناحيـه(Domain) اود قيمتونو ناحيـه(Range)دې زده کوونکـو تـه توضيح شي. لومړی او دويم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي.زده کوکوي دې د 63 مـخ فعاليـت سـرته ورسـوي چې ځواب يې په دې ډول دی: $\{0,8,16\}=$ د R د قيمتونو ناحيه

معکوسه رابطه دې تعريف شي او اړونده مثال دې حل شي. هممارنگـه معادلـه رابطـه ا و د هغې خاصـيتونه دې توضيح شـي او اړونده مثال دې هم حل شي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې:

لومړی پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې:

دويمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

دوه ګونې رابطه (Binary Relation):

که R د $A \times B$ يو فرعي ست وي، نو R له A څخه B ته د دوه ګونې رابطې په نامه يادېږي.

لکه: $(a,b) \in R$ چې د (a,b) لومړی عنصر د Domain په نامه چې $a \in A$ وي او د (a,b) دويم عنصر د Range په نامه يادېږي، چې $b \in B$ وي.

که $A = \{a,b,c\}$ او $B = \{1,2\}$ وي نو $R = \{(a,1),(b,1),(c,1)\}$ له A څخه B دوه ګونې رابطه ده.

$\text{Domain } R = \{a,b,c\}$ و $\text{Range } R = \{1\}$

همدارنګه $T = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$ په A کې دوه ګونې رابطه ده.

$\text{Dom}T = \{a\}$ $\quad$ $\text{Range } R = \{a,b,c\}$

مثال: په لاندې رابطو کې چې د حقيقي عددونو په سټ کې تعريف شوې دي د هر يوې د تعريف او قيمتونو ناحيې پيدا کړئ.

- $1 + y = -3 \Rightarrow y = -3 - 1 \Rightarrow y = -4$

$S = \{(x,y) \mid x,y \in R \wedge y = -4\}$

$\text{Dom} S = IR$

$\text{Range} S = \{-4\}$

- $2x + 1 = 7 \Rightarrow 2x = 7 - 1 \Rightarrow x = 3$

$S = \{(x,y) \mid x,y \in R \wedge x = 3\}$

$\text{Dom} S = \{3\}$

$\text{Range} S = R$

- $x = 2y - 1$

$S = \{(x,y) \mid x,y \in R \wedge x = 2y - 1\}$

x	−1	1	3	5	−3	−5	−7	...
y	0	1	2	3	−1	−2	−3	...

$S = \{(-1,0),(1,1),(3,2),(5,3),(-3,-1),(-5,-2),(-7,-3)\}$

$\text{Dom} S = \{-1,1,3,5,-3,-5,-7\ldots\} = R$ $\quad$ $\text{Range} S = \{0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots\} = R$

ددې رابطې ځينې قيمتونه په لاندې جدول کې ليدل کيږي.

- $x^2 + y^2 = 4$

$S = \{(x,y) \mid x,y \in R \wedge x^2 + y^2 = 4\} = \{(2,2),(-2,-2)\}$

$\text{Dom} S = \{2,-2\}$

$\text{Range} S = \{2,-2\}$

- $9x^2 + 16y^2 = 644$

$S = \{(\pm4,5),(-4,-5),(4,-5),(-4,5)\}$

$Dom\,S=\{4,-4\}$

$Range\,S=\{5,-5\}$

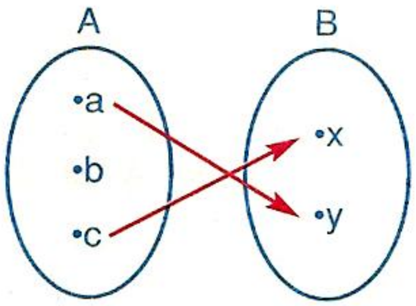
- که $A=\{x,y\}$ او $B=\{1,2\}$ وي:

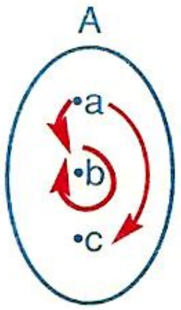
$n(A\times B)=n(A)\times n(B)=2\cdot 2=4$

لیکن له A څخه و B ته د رابطو شمېر عبارت دی له:

$2^{n(A\times B)}=2^4=16$

- که $\beta\subset A\times B$ او $\beta\subset A\times A$ وي د β رابطه په شکل کې داسې ښودل کېږي:

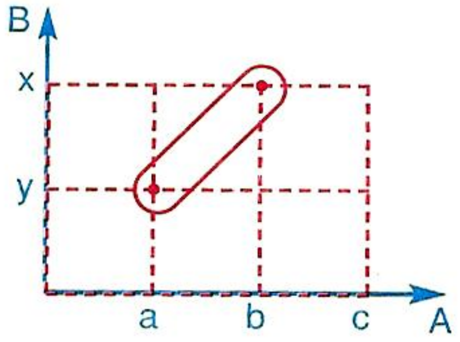




- که $A=\{a,b,c\}$ او $B=(x,y)$ وي او هم $\beta\subset A\times A$ وي:

$\beta=\{(a,y),(b,x)\}$

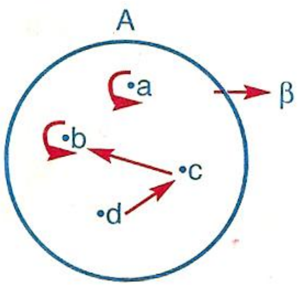
چې د β شکل په دې ډول دی.

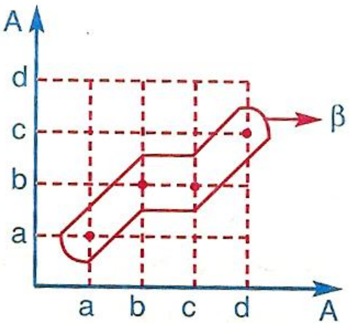


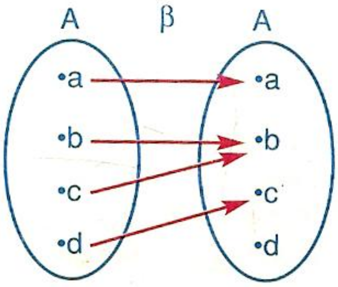
- که $A=\{a,b,c,d\}$ او β په A کې یوه رابطه وي:

$\beta=\{(a,a),(b,b),(c,b),(d,c)\}$

د β رابطه په لاندې شکلونو کې وګورئ.







د رابطې معکوس: $\beta \subset A\times B \Rightarrow \beta^{-1}=\{(y,x)\mid (x,y)\in\beta\}$

مثال: که $A=\{a,b\}$ او $B=(1,2,3)$ وي نو :

$$\beta=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}\Rightarrow \beta^{-1}=\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$$

مثال: که

$$\beta=\{(x,y)\in R\times R \mid x-y<2\}$$
$$\beta^{-1}=\{(x,y)\in R\times R \mid y-x<2\}$$

- د $R=\{(x,y)\mid y=2x+1\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي ده R^{-1} عبارت ده له:

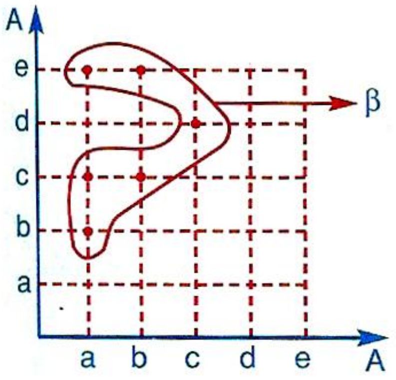
$$y=2x+1\Rightarrow y-1=2x\Rightarrow x=\frac{y-1}{2}$$

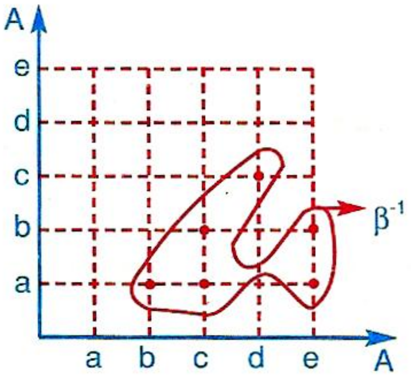
$$R^{-1}=\{(x,y)\mid (x,y)\in R\ , y=\frac{x-1}{2}\}$$

مثال: که $A=\{a,b,c,d,e\}$ او β یو رابطه وي:

β او β^{-1} په لاندې شکلونو کې وګورئ.

$$\beta=\{(a,b),(a,c),(a,e),(b,c),(b,e),(c,d)\}\Rightarrow \beta^{-1}=\{(b,a),(c,a),(e,a),(c,b),(e,b),(d,c)\}$$

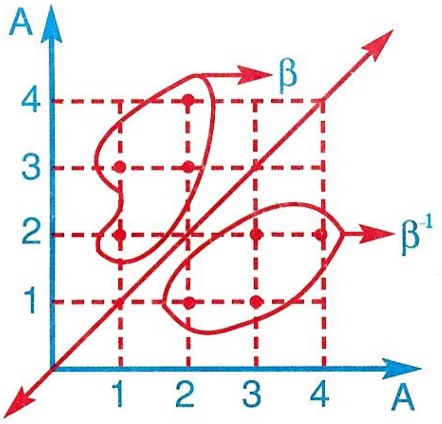




مثال: که $A=\{1,2,3,4\}$ او β له A څخه و A ته یوه رابطه وي:

$$\beta=\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4)\}\Rightarrow \beta^{-1}=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$$

د β او β^{-1} شکلونه په دې ډول دی.



مثال: که $\beta=\{(x,y):3x-y=4\}$ یوه رابطه وي، نو β^{-1} عبارت ده له:

$\beta^{-1}=\{(x,y):3y-x=4\}$

- معادله رابطه:

د A په سټ کې د β رابطې ته معادله رابطه وايي چې:

1- که β په A کې یوه داسې رابطه وي چې د $\forall x\in A$ لپاره $(x,x)\in\beta$ وي. (انعکاسي خاصیت)

2- $\forall(x,y)\in\beta\Rightarrow(y,x)\in\beta$ (تناظري خاصیت)

3- که $x,y,z\in A$ وي $\forall[(x,y)\in\beta\wedge(y,z)\in\beta]\Rightarrow(x,z)\in\beta$ (انتقالي خاصیت)

مثال: په هندسه کې د مثلثونو د انطباق منښې رابطه یوه معادله رابطه ده،

$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ABC}$ (انعکاسي خاصیت)

$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{DEF}\Rightarrow\overset{\Delta}{DEF}\sim\overset{\Delta}{ABC}$ (تناظري خاصیت)

$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{DEF}\sim\overset{\Delta}{KLM}\Rightarrow\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{KLM}$ (انتقالي خاصیت)

د پوښتنو ځوابونه:

1- که $A=\{1,2\}$ و $B=\{0,4,6\}$ وي.

- له A څخه په B کې درې رابطې ولیکئ.
- له B څخه په A کې څلور رابطې ولیکئ.
- په A کې څلور رابطې ولیکئ.

حل:

$$\text{i)}\ A\times B=\{(1,0)(1,4)(1,6)(2,0)(2,4)(2,6)\}$$
$$R_1=\{(1,0)(1,4)\}$$
$$R_2=\{(1,6)(2,4)\}$$
$$R_3=\{(2,0)(2,4)(2,6)\}$$

درې پورتنی رابطې له A څخه په B کې دي.

له B څخه و A ته څلور رابطې عبارت دي له:

$$\text{ii)}\ B\times A=\{(0,1)(0,2)(4,1)(4,2)(6,1)(6,2)\}$$
$$R_1=\{(0,1)(0,2)(4,1)\}$$
$$R_2=\{(6,1)\}$$
$$R_3=\{(4,1)(4,2)\}$$
$$R_4=\{(0,1)(0,2)(4,1)(4,2)(6,1)(6,2)\}$$

په A کې څلور رابطې عبارت دي له:

iii)

$A \times A = \{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)\}$

$R_1 = \{(1,1)\}$

$R_2 = \{(1,2)\}$

$R_3 = \{(1,1)(1,2)(2,1)\}$

$R_4 = \{(1,1)(2,1)(2,2)\}$

2- که $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{1,3,5\}$ وي او $R = \{(x,y)|y < x\}$ ، له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

حل:

$A \times B = \{(1,1)(1,3)(1,5)(2,1)(2,3)(2,5),(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$

$R = \{(2,1),(3,1),(4,1),(4,3)\}$

3- که $R = \{(x,y)|y+1 = 2x^2\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي او د تعریف ساحه یې ټول طبیعي عددونو وي، د R د قیمتونو ساحه پیدا کړئ

حل: څرنګه چې $R = \{(1,1)(2,7)(3,17)(4,31)(5,49)\ ...\}$ چې ددې رابطې Range مساوي دي په:

$\{1,7,17,31,49\ ...\}$

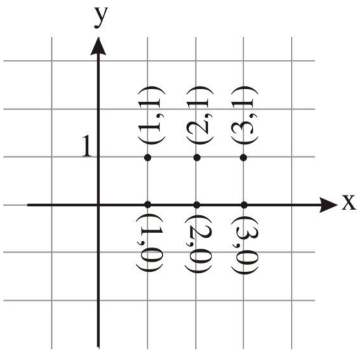
1- که $A=\{1,3,5\}$ او $B=\{2,4,6\}$ وي $A\times B$ ، $B\times A$ او $A\times A$ پیدا کړئ.

حل:

$$A\times B=\{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$$
$$B\times A=\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}$$
$$A\times A=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$

2- که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{0,1\}$ وي $A\times B$ په شکل کې وښایاست.

حل: څرنګه چې $A\times B=\{(1,0)(1,1)(2,0)(2,1)(3,0)(3,1)\}$



3- که چیرې $(x-2y,2x+y)=(3,1)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$(x-2y,2x+y)=(3,1)$$

$$\begin{array}{l} x-2y=3 \\ 2x+y=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x-4y=\ \ 6 \\ \pm 2x\pm\ \ y=\pm 1 \\ \hline -5y=5 \\ y=-1 \end{array}$$

$$x+2=3$$
$$x=1$$

4- په $A=\{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

حل: څرنګه چې $A\times A=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$ دی؛ نو $R=\{(1,1),(3,3),(5,5)\}$ دی.

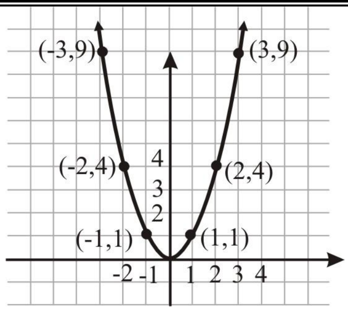
5- که $A=\{a,b\}$ وي د A^2 عناصرو ولیکئ.

حل: $A^2=A\times A=\{a,b\}\times\{a,b\}=\{(a,a)(a,b)(b,a)(b,b)\}$

6- که $R=\{(x,y)|y=x^2\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوې وي د R د رابطې ګراف رسم کړئ.

حل: $R=\{(x,y)/y=x^2\}$ د R د رابطې ګراف په لاندې ډول دی:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	...
y	0	1	1	4	4	9	9	...

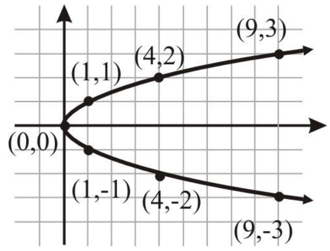


7- که $R=\{(x,y)|y^2=x\}$ رابطه دحقیقی عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R د رابطی ګراف رسم کړئ.

حل: $R=\{(x,y)/y^2=x\}$

x	0	1	4	9
y	0	±1	±2	±3

$y=\pm\sqrt{x}$



8- که $R=\{(1,-1)\ ,\ (2,-2)\ ,\ (3,-3)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحي وټاکئ.

حل: $RangeR^{-1}=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $DomR^{-1}=\{-1,-2,-3\}$ دی.

9- که $R=\{(1,2)\ ,\ (1,3)\ ,\ (1,4)\ ,\ (1,5)\}$ وي د R او R^{-1} د تعریف اوقیمتونو ساحي ولیکئ.

حل:

$Dom_R=\{1\}$ $\qquad$ $Range_R=\{2,3,4,5\}$

$Dom\,R^{-1}=\{2,3,4,5\}$ $\qquad$ $Range\,R^{-1}=\{1\}$

10- که $A=\{3,6,12\}$ او $B=\{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمیر او له A څخه په B کې درابطو شمیر پیداکړئ.

حل: له A څخه و B ته د رابطو شمېر مساوي دی؛ په: $2^{2\times3}=2^6=64$ په A کې د رابطو شمېر مساوي دی؛

په: $2^{3\times3}=2^9=2^3\cdot2^3\cdot2^3=8\cdot8\cdot8=512$

11- که د $(4a+1\ ,\ 2b+a)$ او $(5\ ,\ 3a-4b)$ دوه مرتبي جوړي سره مساوي وي د a او b قیمتونو پیدا کړئ.

حل:

$$(4a+1,\ 2b+a)=(5,3a-4b)$$

$$4a+1=5 \qquad 2b+a=3a-4b$$

$$4a=4 \qquad 2b+1=3-4b$$

$$a=1 \qquad 6b=2$$

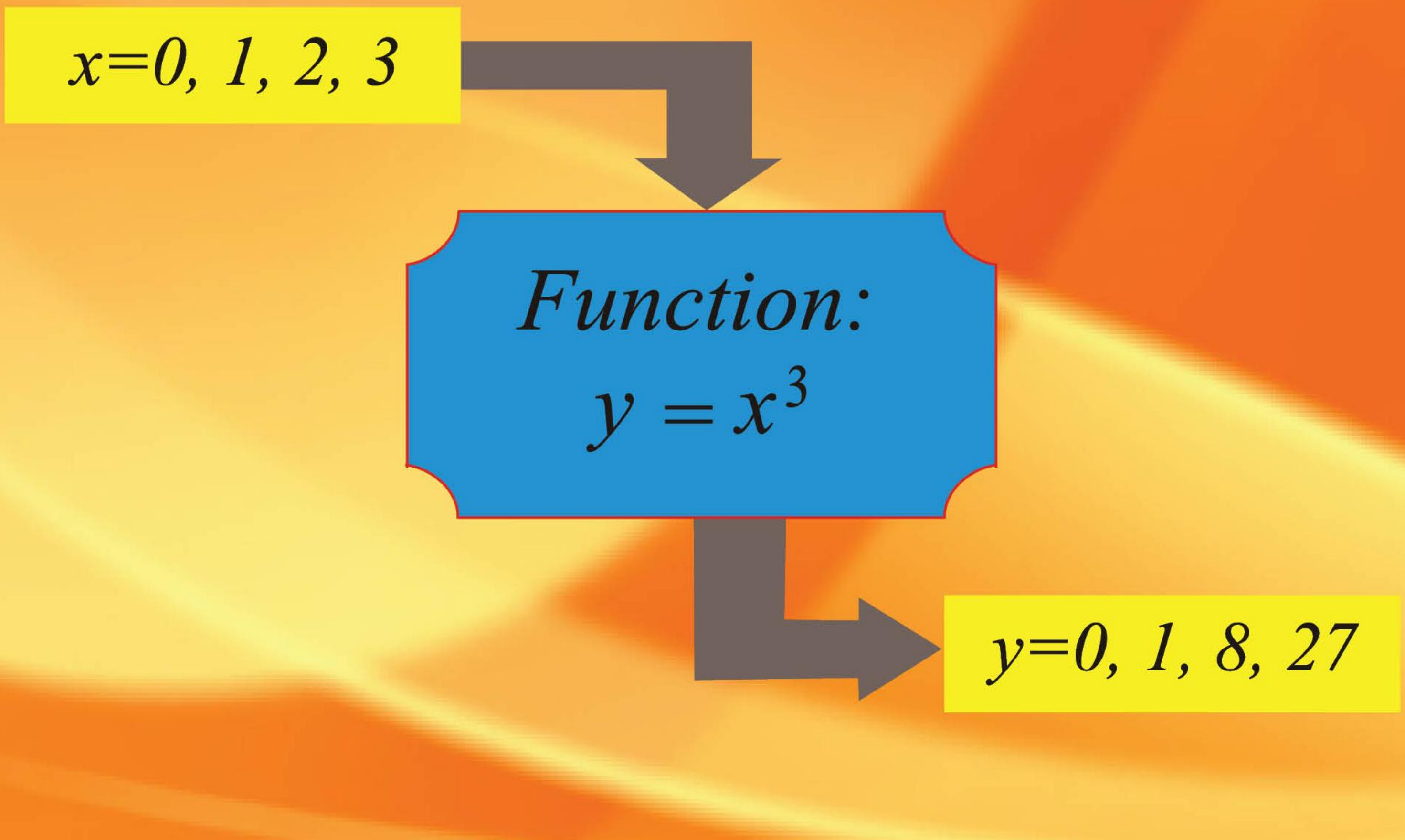
$$b=\frac{1}{3}$$

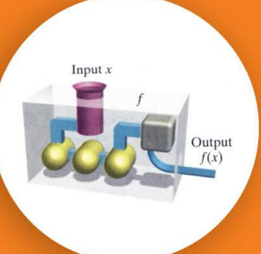
12- که $A=\{a\ ,\ b\ ,\ c\}$ او $B=\{x\ ,\ y\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیدا کړئ.

حل: $B\times A=\{(x,a)(x,b)(x,c)(y,a)(y,b)(y,c)\}$ $\qquad$ $A\times B=\{(a,x)(a,y)(b,x)(b,y)(c,x)(c,y)\}$

دریم څپرکی

تابع


x=0, 1, 2, 3
Function:
y = x3
y=0, 1, 8, 27



تابع(Function)

د درسي کتاب (69) **مخ** **د تدريس وخت**(1 **درسي ساعت**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد ددې لوست په پای کې: • د تابع تعريف زده کړي او ازاد او مقيد متحول وپيژني. • د تابع د تعريف او قيمتونو د ناحيو توپير وکړای شي. • د تابع او رابطې توپير پيدا کړای شي. • زده کړي چې څه وخت يو جدول يا د مرتبو جوړو سټ يوه تابع ښيي. • د رياضي د مسايلو په حل کې د تابع له مفهوم څخه ګټه واخيستلای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، ګروپي او يوکيسز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او ...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د ورودي شکل په اړوند دې پوښتنه وشي او په دې ډول دې واضح شي چې زده کوونکي تابع ته د يو ماشين په شان فکر وکړي چې (Input) د ازاد متحول او (output) د مقيد يا مربوطه متحول په حيث وپيژني.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**

ددې لوست فعاليت کولای شي چې په جلا جلا ډول له هر زده کوونکي وپوښتئ او همکاري ورسره وکړي. په ورځني ژوند کې په هندسي مسايلو او د فزيك په برخه کې د تابع مختلف مثالونه ورکړل شي.

د مربع د مساحت جدول او د نړۍ د نفوسو جدول واضح کړي او په هغوی کې ازاد او مقيد متحولونه زده کوونکو ته وښيي د تابع له تعريف څخه وروسته په مرتبو جوړو کې ،(Domain) او(Range) ورونښودل شي، بيا دې زده کوونکي د (71) مخ فعاليت سرته ورسوي.

محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په وړاندې اخيستنې سره لومړی، دويم، او دريم مثالونه په چارت اويا پر تخته حل کړي تر څو زده کوونکي د تابع مفهوم په جدول د مرتبو جوړو په سټ او په دياګرامو کې درک کړي .

په هغه وخت کې د مرتبو جوړو سټ يوه تابع ښيي چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي او يا د لومړي سټ هر عنصر د دويم ست له يو عنصر سره اړيکه ولري.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**

د دې لوست د پوښتنو لومړی پوښتنه د تختې پر مخ حل کړي.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې**

د لوست له لنډيز څخه وروسته د پوښتنو دويمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

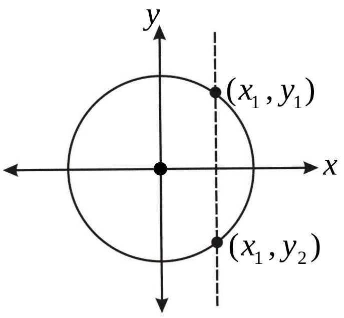
د تابع مفهوم لومړی پلادلایپ نیتز لـه خـوا پـه 1696م کـال کې وړانـدې شـوه، یوهـان برنرلـي پـه 1718م کې د متحولینـو پـه تحلیلولو سره یې د تابع اصطلاح په کار یوړه.

اویلر په (1707-1783م) کال د منحني ګانو په خاصیتونو کې د $F(x)$ علامه وکاروله.

کلیرو په 1734م کال کې د تابع له مفهوم څخه ګټه واخیستله.

دیریکله په (1805-1859م) کې تا بع د تعریف او قیمتونو ناحیې مطرح کړې.

د تابع عمومي مفهوم چې د تعریف او قیمتونو د ناحیو لپاره یو ست په نظر کې نیول کیږي د ریچارد ددګیند لـه خـوا پـه (1831-1961) کې مطرح شوه، د (1900م) کال په شاوخوا کې د لومړي ځل لپاره تابع د مرتبو جوړو د ست په شکل تعبیر شـوه. نـن ورځ د ریاضي اساسي موضوعات لکه: لیمټ، مشتق، انتیګرال، تفاضلي معادلې، محاسبوي میتودونه او نور د تـابع د خاصـیتونو او تحولاتو په اساس مطالعه کیږي.



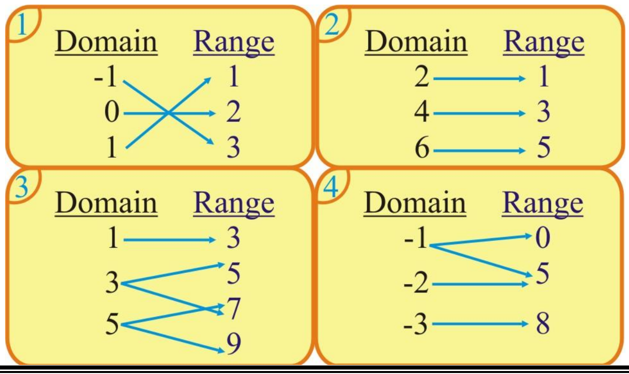
همدارنګه د فزیک فورمولونه او زیاتره طبیعي پیښې د تابع په مرسته توضیح کیږي. تـابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې هیڅ دوه مرتبې جوړې یې د لومړنیو مساوي او دویمو مختلفو عناصرو لرونکي نه وي، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي (x_1, y_1) او (x_1, y_2) مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي یا د یو x_1 لپاره د y_1 او y_2 دوه مختلف قیمتونه وجود لري. همدارنګه د y له محور سره موازي خط ګراف د (x_1, y_1) او (x_1, y_2) په نقطو کې قطع کوي، نو دا ګراف د تابع ګراف نه دی.

- د x له محور سره موازي مستقیم خط یوه تابع ښيي لیکن د y محور سره موازي خط چې د x=c په شکل دی، یوه تابع نه ښيي، همدارنګه $|y| = 2$ یوه تابع نه ده، ځکه y کولای شي چې د 2 او 2- قیمتونه ولري.
- که $f = \{(m,2), (n, p), (m, 3a-5)\}$ یوه تابع وښيي د a قیمت مساوي دی په:

$$3a - 5 = 2 \Rightarrow 3a = 5 + 2 \Rightarrow a = \frac{7}{3}$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- کوم یو له لاندینیو جدولونو څخه یوه تابع ښکاره کوي؟



حل: د $5,2,1$ او 6 جدولونه يوه تابع ښيي، 3 او 4 جدولونه يوه تابع نه ښيي.

2- د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کوم يو يې يوه تابع ښکاره کوي؟ د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې تعين کړي.

$1-\quad \{(2,4)\,,(3,6)\,,(4,8)\,,(5,10)\}$

$2-\quad \{(-1,4)\,,(0,3)\,,(1,2)\,,(2,1)\}$

$3-\quad \{(10,-10)\,,(5,-5)\,,(0,0)\,,(5,5)\,,(10,10)\}$

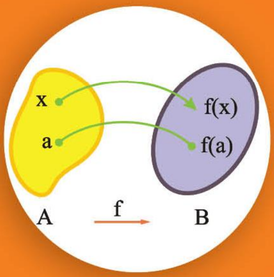
$4-\quad \{(-10,10)\,,(-5,5)\,,(0,0)\,,(5,5)\,,(10,10)\}$

$5-\quad \{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

$6-\quad \{(1,1)\,,(2,1)\,,(3,1)\,,(1,2)\,,(2,2)\,,(3,2)\}$

حل:

- د لومړۍ برخې د مرتبو جوړو سټ يوه تابع ښيي چې د تعريف ناحيه يې $Dom=\{2,3,4,5\}$ او $Range=\{4,6,8,10\}$ دی.
- د دويمې برخې د مرتبو جوړو سټ يوه تابع ښيي چې د تعريف ناحيه يې $Dom=\{-1,0,1,2\}$ او $Range=\{4,3,2,1\}$ دی.
- د دريمې برخې د مرتبو جوړو سټ يوه تابع نه ښيي او يوه رابطه ده چې د تعريف ناحيه يې $Dom=\{10,5,0\}$ او $Range=\{-10,-5,0,5,10\}$ دی.
- د څلورمې برخې د مرتبو جوړو سټ يوه تابع ښيي چې: $Dom=\{-10,-5,0,5,10\}$ او $Range=\{10,5,0\}$ دی.
- د پنځمې برخې د مرتبو جوړو سټ يوه تابع ښيي چې: $Dom=\{0,1,2,3,4,5\}$ او $Range=\{11,1,2\}$ دی.
- د شپږمې برخې د مرتبو جوړو سټ يوه تابع نه ښيي، بلکې يوه رابطه ښکاره کوي چې: $Dom=\{1,2,3\}$ او $Range=\{1,2\}$ دی.



د يوې تابع د ليکلو طريقې او د تابع قيمت

د کتاب (73)مخ   د تدريس وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد ددې لوست په پای کې: • دتابع د ليکلو طريقې او د تابع د قيمت پيداکول زده کړي. • د يوې تابع د ښودلو مختلف ډولونه وپيژني. • د مختلفو تابعګانو قيمت د x د مختلفو قيمتونو لپاره پيداکړای شي. • وپوهيږي چې يوه معادله څه وخت يوه تابع ښيي. • د رياضي د مسايلو په حل کې د يوې تابع د قيمت د پيداکولو اهميت درک کړي.
د تدريس طريقې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او ...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشير، چارت او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيداکولو لپاره د ورودي برخې پوښتنې له زده کوونکو وپوښتئ، يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکې ده چې د هر x لپاره يوه y وجود ولري. همدارنګه يوه رابطه او يا يو جدول په هغه صورت کې د يوې تابع ښودونکی دی چې د تعريف د ناحيې هر عنصر يوازې د قيمتونو د سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې

د تابع د ښودلو د طريقو له توضيح کولو وروسته دې زده کوونکي فعاليتونه سر ته ورسوي او محترم ښوونکي دې د دوی د کارونو څارنه وکړي، بيا دې د زده کوونکو په وړاندې اخيستنه لومړی او دويم مثال حل شي او د (74) مخ د فعاليت پوښتنې يا له زده کوونکو څخه په جلا جلا ډول و پوښتني او يا دا چې په ګروپونو کې دې کار کړي او د ګروپونو نماينده ګان دې خپل کار د تختې پر مخ توضيح کړي. زده کوونکو ته په وړاندې ورکولو سره دريم، څلورم او پنځم مثال حل کړي، بيا دې د (76) مخ فعاليت زده کوونکي سرته ورسوي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې

که $f(x)=3x-1$ او $g(x)=x^2$ وي؛ $F(0), F(a), F(5a-2), F[F(1)]$ او $g(5p-2)$ پيداکړئ:

$F(0)=1$ $F(a)=3a-1$ $F[F(1)]=5$

$f(5a-2)=15a-7$

$g(5p-2)=25p^2-20p+4$

د لوست ارزونه: (5) دقيقې

د لوست له لنډيز څخه وروسته کولای شئ د ارزيابي لپاره د پوښتنو دويمه پوښتنه په جلا، جلا ډول له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- که $F(x)=x^2-4$ او $F(x)=6x+2$ وي؛ a) $F(x+h)$, b) $F(x+h)-F(x)$ او c) $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ مساوي دي په

a) $F(x+h)=x^2+2xh+h^2-4$ b) $2xh+h^2$ c) $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=2x+h$

a) $6x+6h+2$ b) $6h$ c) 6

- په لاندې معادلو کې کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$a: \quad 4x-2y^3+5=0$ $b: \quad y^2-x+1=0$

حل:

a :

$2y^3=4x+5$ $y^3=2x+\frac{5}{2}$ $y=\sqrt[3]{2x+\frac{5}{2}}$

نو پورتنی معادله یوه تابع ښیي.

$b: \quad y^2=x-1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x-1}$

چې یوه تابع نه ده ځکه چې د x د یو قیمت لپاره د y دوه قیمتونه موجود دي.

د مثال په ډول که x=5 وي y=2 او y=-2 کیږي.

- په لاندې تابعګانو کې د $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ قیمت پیدا کړئ.

$f(x)=x+1 \quad \rightarrow 1$

$f(x)=3x+7 \quad \rightarrow 3$

$f(x)=x-x^2 \quad \rightarrow -2x-h+1$

$f(x)=\sqrt{x} \quad \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

- له لاندنیو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$1: \ y=3x^2-12$: (یوه تابع ده)

$2: \ y^2=4x+1$: (y د x تابع نه ده)

$3: \ 3x+2y=12$: (یوه تابع ده)

$4: \ x^2+y^2=9$: (y د x تابع نه ده)

- که $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$ وي $f(\frac{1}{x})$ عبارت دی له:

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$$

د $x+\frac{1}{x}$ پرځای $\frac{1}{x}$ عوض کوو:

$$f(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^3-3\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x}\Rightarrow f(\frac{1}{x})=\frac{1-3x^2}{x^3}$$

- که $f(x)=x^2+2x+3$ وي $f(2x-1)$ عبارت دی له:

$$f(2x-1)=(2x-1)^2+2(2x-1)+3=4x^2+2$$

- که $f(2x-3)=x^2-1$ وي، $f(x)$ عبارت دی له:

$$2x-3=t\Rightarrow x=\frac{t+3}{2}\ ,\ f(2x-3)=x^2-1\Rightarrow f(t)=(\frac{t+3}{2})^2-1=\frac{t^2+6t+9}{4}-1$$

$$=\frac{t^2+6t+9-4}{4}=\frac{t^2+6t+5}{4}$$

د پوښتنو ځوابونه

1- که $g(x)=x^2+x-2$ او $f(x)=2x^2+3x-1$ وي $g(-2),f(-3)\ ,g(2)-g(-3)$ او $\frac{f(0)\cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

حل:

$$g(-2)=(-2)^2-2-2=4-4=0$$

$$F(-3)=2(-3)^2+3(-3)-1=18-9-1=8$$

$$g(2)-g(-3)=?$$

$$g(2)=2^2+2-2=4$$

$$g(-3)=(-3)^2-3-2=9-5=4$$

$$g(2)-g(-3)=4-4=0$$

$$\frac{F(0)\cdot g(2)}{F(-3)}=\frac{(-1)(0)}{8}=\frac{0}{8}=0$$

2- که $f(x)=x^2-x$ او $g(x)=\sqrt{x+4}$ وي، $f(-2),g(0)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

حل:

$$F(-2)=(-2)^2-(-2)=4+2=6$$

$$g(0)=\sqrt{0+4}=\sqrt{4}=2$$

$$F(x-1)=(x-1)^2-(x-1)=x^2-2x+1-x+1=x^2-3x+2$$

3- که $g(x)=3\sqrt{x}$ او $h(x)=1+4x$ وي، $h(16),\ h(-3)$ او $g(-4)$ پیدا کړئ.

حل:

$$h(16)=1+4(16)=1+64=65$$

$$h(-3)=1+4(-3)=1-12=-11$$

$g(-4)=3\sqrt{-4}$ (تعریف شوی نه دی)

4- که $f(x)=\frac{15}{x-3},\ g(x)=16+3x-x^2$ او $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي، نو $f(6)\ ,g(-7)$ او $f(0)+g(4)-h(-3)$ پیدا کړئ.

حل:

$$F(6)=\frac{15}{6-3}=\frac{15}{3}=5$$

$$g(-7)=16+3(-7)-(-7)^2=16-21-49=16-70=-54$$

$F(0) + g(4) - h(-3) = ?$

$F(0) = \frac{15}{0-3} = -5$

$g(4) = 16 + 3(4) - 4^2 = 16 + 12 - 16 = 12$

$h(-3) = \sqrt{25 - (3)^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

$F(0) + g(4) - h(-3) = -5 + 12 - 4 = 3$

5-که $g(x) = \sqrt{x+40} - 2$ وي، $g(12)$, $g(5)$, $g(4)$, $g(0)$ او $g(-2)$ پیداکړئ.

حل:

$g(12) = \sqrt{12+40} - 2 = \sqrt{52} - 2$

$g(5) = \sqrt{5+40} - 2 = \sqrt{45} - 2$

$g(4) = \sqrt{4+40} - 2 = \sqrt{44} - 2$

$g(0) = \sqrt{0+40} - 2 = \sqrt{40} - 2$

$g(-2) = \sqrt{-2+40} - 2 = \sqrt{38} - 2$

6- ایا د $x^2 + xy = 1$ معادله یوه تابع ښیي؟

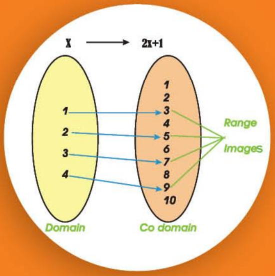
حل:

$x^2 + xy = 1$

$xy = 1 - x^2$

$y = \frac{1-x^2}{x} = \frac{1}{x} - x$

څرنگه چې د هر x لپاره یو y وجود لري، نو د $x^2 + xy = 1$ معادله د یوې تابع ښودونکې ده.



د يوې تابع د تعريف د ناحيې پيدا کول،
د يوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د تابع پېژندنه

د کتاب (77)مخ **د لوست وخت (2 درسي ساعت)**

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد ددې لوست په پای کې: • د يوې تابع د تعريف د ناحيې پيداکول زده کړي. • د ګراف له مخې د تابع پېژندل او د يوې تابع د ګراف رسمول زده کړي. • د تابعګانو د تعريف ناحيې پيدا کړای شي. • د تابعګانو ګرافونه رسم کړای شي. • د تابع ګراف وپيژني. • د رياضي د مسايلو په حل کې د تابع د ګراف د رسمولو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	فعاله زده کړه (پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحثونه...)
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشير، چارت او... .
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيداکولو لپاره ورودي پوښتنه له زده کوونکو وپوښتې، څرنګه چې زموږ د بحث لاندې تابعګانې حقيقي تابعګاني دي، نو د هرې تابع د تعريف ناحيه ټول حقيقي عددونه نه وي. د مثال په ډول د $F(x)=2x-1$ د تابع تعريف په ناحيه کې ټول حقيقي عددونه شامل دي، خو د $h(x)=\dfrac{3}{x-5}$ د تابع د تعريف په ناحيه کې د (5) عدد شامل نه دی.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې

د لوست لومړنی فعاليت کيدای شي چې په جلا جلا توګه له زده کوونکو وپوښتل شي، محترم ښوونکي دې لارښوونه وکړي او لومړی مثال دې د زده کوونکو په ونډوه اخيستنه سره حل کړي .

د(78) مخ فعاليت دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونو کې حل کړي، د (79) مخ د څلورو شکلونو په برخه کې له زده کوونکو وپوښتئ، محترم ښوونکي دې لارښوونه وکړي، د (79) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي لومړی، دويم مثالونه يا پر تخته او يا په يو چارت کې رسم کړئ، د (81) مخ فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې حل کړي د دريم او څلورم مثال ګرافونه دې يا په چارت او يا د تختې پر مخ توضيح کړي.

د لوست تحکيم: (7) دقيقې

د $g(x)=-\sqrt{\dfrac{2}{x^2+9}}$ د تعريف ناحيه وټاکي.

حل: د $g(x)$ تابع د تعريف ناحيه ټول حقيقي عددونه يا $\mathrm{Dom}\,g(x)=(-\infty,+\infty)$ دی.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د ارزونې لپاره د لاندینو پوښتنو په شان پوښتنې له زده کوونکو وکړئ:

- د $F(x)=(3x+5)^{\frac{1}{2}}$ د تعریف ناحیه پیدا کړئ.
- د $g(x)=x+6$ د تعریف ناحیه پیدا کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د لاندې تابعگانو د تعریف ناحیه (Domain) پیدا کړئ.

a) $F(x)=x^4$ b) $F(x)\sqrt{16-x^2}$ c) $F(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

d) $F(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}}$ e) $F(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

حل:

a) $\text{dom}F(x)=(-\infty,+\infty)$ b) $\text{dom}F(x)=[-4,4]$ c) $\text{dom}F(x)=[3,+\infty]$

d) $\text{dom}F(x)=(-\infty,+\infty)$ e) $\text{dom}F(x)=(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$

د تابع گراف F د $=\{(x,y),\, y=F(x),\, x\in Dom_F\}$

- د پارامتریک معادلې گراف (Parametric Graphing) په دې ډول گرافونو کې x او y د یو بل دریم متحول مثلا t تابع وي چې t ته پارامتر وايي او دې معادلې ته پارامتریک معادله وايي د مثال په ډول:

$f(t)=(x,y)\qquad x=x(t)\qquad y=y(t)$

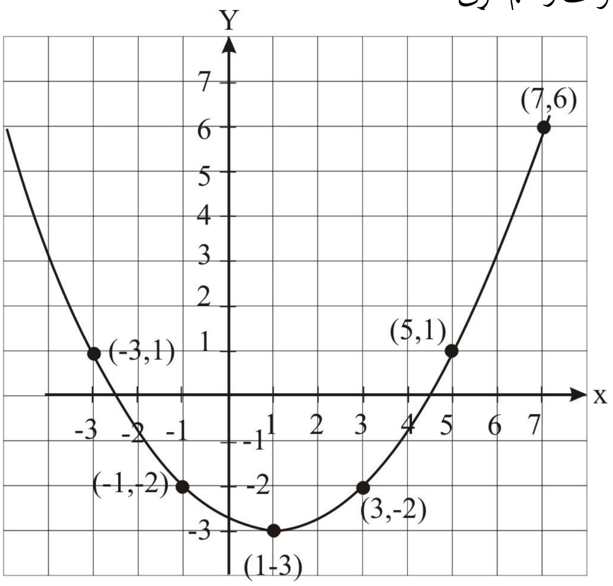
مثال: لاندې گراف رسم کړئ.

$x=2t+1$

$y=t^2-3$

حل:

t	$x=2t+1$	$y=t^2-3$	(x,y)
-2	-3	1	$(-3,1)$
-1	-1	-2	$(-1,-2)$
0	1	-3	$(1,-3)$
1	3	-2	$(3,-2)$
2	5	1	$(5,1)$
3	7	6	$(7,6)$



- د هرې درجې لرونکي پولینومي تابع یا هره ترجذر لاندې پولینومي تابع چې د جذر درجه یې تاقه وي او یا د ساین او کوساین د تابعگانو د تعریف ناحیې ټول حقیقي عددونه دي، د مثال په ډول د لاندې تابعگانو د تعریف ناحیې ټول حقیقي عددونه دي.

$$g(x)=\frac{1}{5}x^4-x^3-|x|\qquad P(x)=\sin x-\cos x^2+1\qquad h(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

• د لوګاریتمي تابعګانو د تعریف ناحیه چې د $f(x)=k\log_v u$ شکل ولري، عبارت ده له:

$u>0$

$v>0$

$v\neq 1$

د مثال په ډول: د $y=2\log_x(x+2)$ د تعریف ناحیه عبارت ده له:

$x+2>0\Rightarrow x>-2 \quad , \quad x>0 \quad x\neq 1$

$\Rightarrow (0,1)\cup(1,+\infty)$

د $g(x)=\log_{x-1}(9-x^2)$ د تعریف ناحیه عبارت ده له:

$dom_g=(1,2)\cup(2,3)$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې تابعګانو د تعریف ساحې (Domain) وټاکئ.

$f(x)=\sqrt{x^2-9} \qquad g(x)=2x-5 \qquad h(x)=\sqrt{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{x+1} \qquad g(x)=|x-3| \qquad h(x)=\dfrac{3}{x-4}$

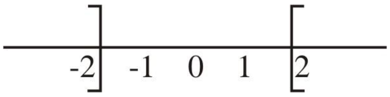
$f(x)=\dfrac{7x}{x^2-16} \qquad g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)} \qquad h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24} \qquad f(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$

حل: $x^2-9\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2-3^2\geq 0 \;,\; (x-3)(x+3)\geq 0 \;\Rightarrow\; (-\infty,-3]\cup[3+\infty)$

نو ددې تابع د تعریف ناحیه $Dom_f=(-\infty,-3]\cup[3+\infty)$

$g(x)=2x-3 \qquad Dom_g=IR=(-\infty,+\infty)$

$h(x)=\sqrt{x^2-4} \;\Rightarrow\; x^2-4\geq 0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x+2)\geq 0$



$Domh(x)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

$F(x)=\sqrt{x+1} \;\Rightarrow\; x+1\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq -1$

$DomF(x)=[-1,+\infty) \qquad Dom\,F(x)=\{x\in IR/x\geq -1\}$

$g(x)=|x-3| \;\Rightarrow\; Dom\,g(x)=IR \;\vee\; Dom\,g(x)=(-\infty,+\infty)$

$h(x)=\dfrac{3}{x-4} \;\Rightarrow\; Dom\,h(x)=IR-\{4\}$

$Dom\,h(x)=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$

$F(x)=\dfrac{7x}{x^2-16}=\dfrac{7x}{(x-4)(x+4)} \qquad Dom\,F(x)=IR\setminus\{-4,4\}$

$DomF(x)\{x\in IR/x\neq -4\wedge x\neq 4\}$ یا

$g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)} \qquad Domg(x)=IR-\{-3,7\}$

$Domg(x)=\{x\in IR/x\neq -3\wedge x\neq 7\}$ یا

$h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24}=\dfrac{4}{(x+3)(x+8)} \;\Rightarrow\; Domh(x)=IR-\{-3,-8\}$

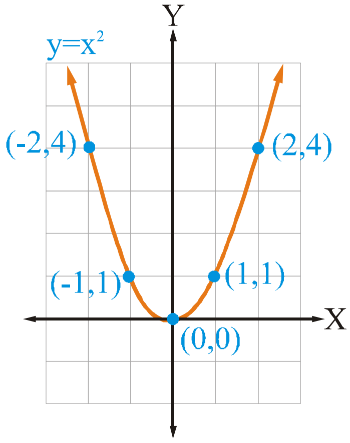
$F(x)=\frac{3}{x^2+4} \quad \Rightarrow DomF(x)=IR$ یا $Dom\,F(x)=(-\infty,+\infty)$

ځکه چې د x په هیڅ قیمت د تابع مخرج نه صفر کیږي.

2- د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ د تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

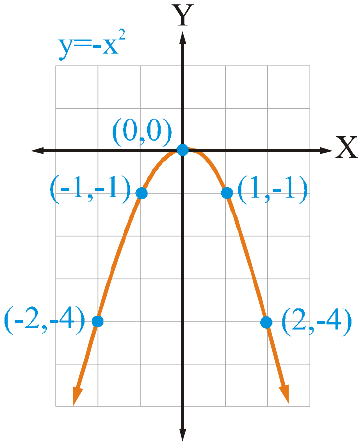
حل: د $F(x)=x^2$ د تابع ګراف

x	0	1	−1	2	−2
$f(x)$	0	−1	−1	−4	−4



د $f(x)=-x^2$ تابع ګراف

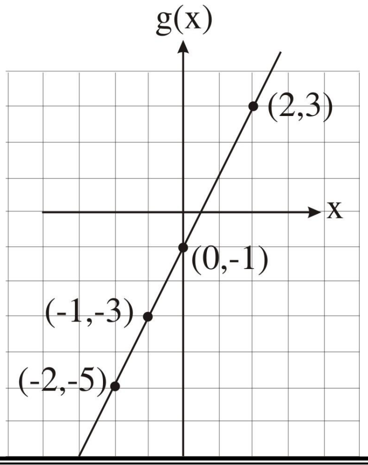
x	0	1	−1	2	−2	3	−3
f(x)	0	−1	−1	−4	−4	9	9



3- د $g(x)=2x-1$ تابع ګراف رسم کړي که $x=-3,-2,-1,0,1,2,3,$ وي.

حل: د $g(x)=2x-1$ تابع ګراف

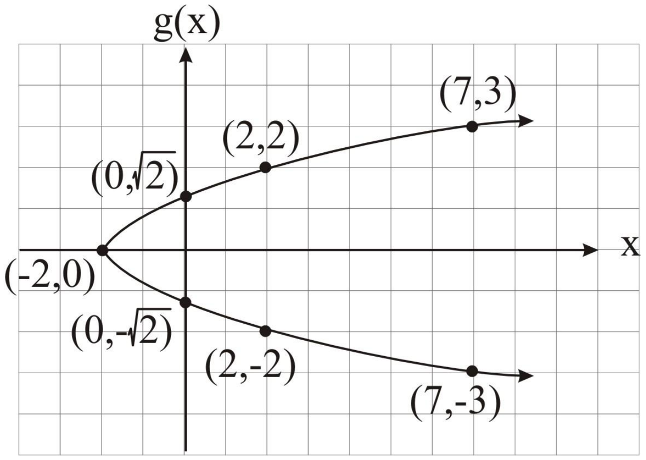
x	0	1	2	3	−1	−2	−3
$g(x)$	−1	1	3	5	−3	−5	−7



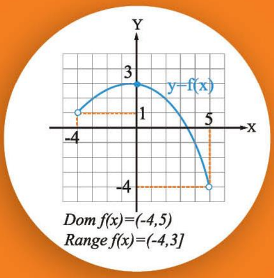
4- د $x = y^2 - 2$ ګراف رسم کړي او آیا دا د یوې تابع ګراف دی؟ ولې؟

حل: د $x = y^2 - 2$ رابطې ګراف رسم کړئ.

x	0	2	-2	7
y	$\pm\sqrt{2}$	± 2	0	± 3



څرنګه چې د یو x لپاره دوه y وجود لري، نو د $x = y^2 - 2$ معادله یو تابع نه ښیي، له بلې خوا له y محور سره موازي خط دا ګراف په دوو نقطو کې قطع کوي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف نه دی.



د تابع د ګراف له مخې د تابع د قیمتونو،
د تابع د تعریف ناحیې او قیمتونو د ناحیو پیدا کول

د کتاب (83)مخ　　　　　د تدریس وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	زده کوونکي باید ددې لوست په پای کې: • د تابع دګرا ف له مخې د تابع د تعریف او قیمتونو د ناحیو پیداکول زده کړي . • دګراف له مخې د یوې تابع قیمتونه پیداکړای شي. • دګراف له مخې د x په راکړل شوو قیمتونوکې دتابع قیمت پیداکړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولوکې د تابع د تعریف او قیمتونو له ناحیو څخه ګټه واخیستلای شي او اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې میتودونه	فعاله زده کړه (پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول)
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشیر، چارت... .
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د انګیزې د پیداکولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ او د شکل له مخې د تابع د تعریف او قیمتونو ناحیه پیداکړئ: $\text{Dom}\,F(x)=(4,5)$ $\text{Rang}F(x)=(-4,3]$

د لوست د بهیر فعالیتونه: (28) دقیقې

په داسې حالت کې چې د دوو راکړل شوو شکلونو چارت موجود وي Dom او $Range$ په دواړو شکلونوکې وښودل شي، بیا دې د(83) مخ فعالیت زده کوونکي سرته ورسوي او خپل کار دې نورو ته توضیح کړي، د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره د لومړي او دویم مثالونو شکلونه دې توضیح شي، په دویم شکل کې دګراف د تقاطع نقطې د X له محور سره پیداکړئ چې $F(-2), F(3)$ او $F(5)$ دي چې $F(5)=F(3)=F(-2)=0$ دي.

په پای کې د دریم مثال په شکل کې دې د تعریف او قیمتونو ناحیې وټاکل شي.

د لوست تحکیم: (7) دقیقې

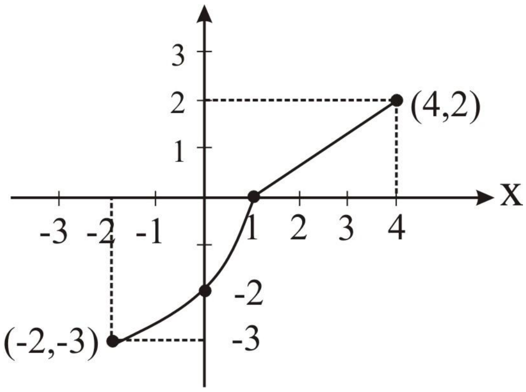
په لاندې شکل کې $F(-2), F(0), F(1)$ و $F(4)$ پیداکړئ.

$F(-2)=-3$

$F(0)=-2$

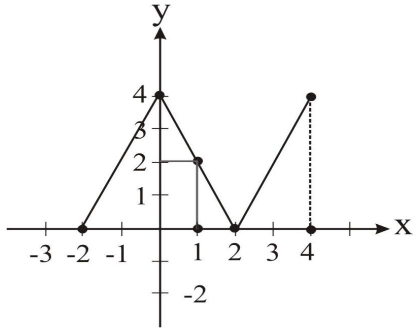
$F(1)=0$

$F(4)=2$



د لوست ارزونه: (5) دقيقې

په لاندې شکل کې $F(-2), F(0), F(1)$ او $F(4)$ پيدا کړئ.



په لاندنيو تابعګانو کې $f(1)$, $f(-1)$ او $f(0)$ قيمتونه پيدا کړئ.

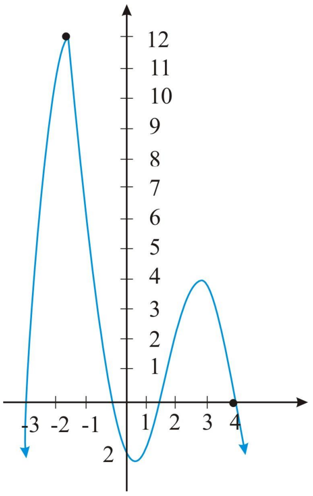
$f(x)=3x^2-5x+1$ $\quad$ $f(x)=x^2+15x-4$

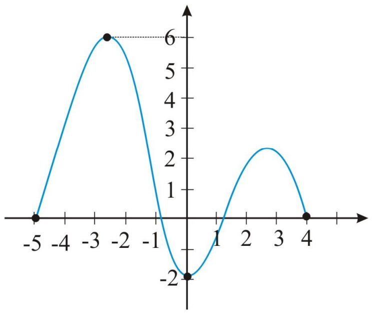
$f(x)=3(x-9)^2$ $\quad$ $f(x)=2x^3-6x-2$

$f(x)=(x-5)(x+7)$ $\quad$ $f(x)=-144x^2-64x$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

$Dom=(-\infty,+\infty) \quad Range=(-\infty,12]$





$\text{Dom}=[-5,4]$ او $\text{Range}=[-2,6]$

- د $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعګانې هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو تابعګانو د تعريف او قيمتونو ناحيې سره مساوي وي، د مثال په ډول $f(x)=x^6$ او $g(x)=|x|$ که فرض کړو چې د دواړو تابعګانو د تعريف ناحيه $\{-1,0,1\}$ وي چې د $x=-1$ لپاره د تابع قيمت $f(x)=(-1)^6=1$ او $g(x)=|-1|=1$ کيږي.
$f(x)=g(x)$ او $x=1$ لپاره د تابع قيمت $f(x)=1$ او $g(x)=1$ او د $x=0$ لپاره د تابع قيمت $f(x)=0$ او $g(x)=0$ ده، په نتيجه کې په راکړل شوي د تعريف په ناحيه کې د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې سره مساوي دي.
- د $f(x)=\frac{x}{x}$ او $g(x)=1$ دوې تابعګانې سره مساوي نه دي، ځکه چې $domf(x)=R-\{0\}$ او د هرې يوې ثابتې تابع د تعريف ناحيه د حقيقي عددونو سټ دی

• د $f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$ او $g(x)=\cos x$ دوې تابعګاني یو له بله سره مساوي نه دي، ځکه چې

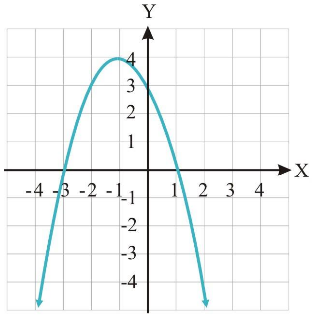
$D_f = D_g = IR$ لیکن $f(x)=|\cos x|$ او $g(x)=\cos x$ دی، نو $f(x)\neq g(x)$ دي.

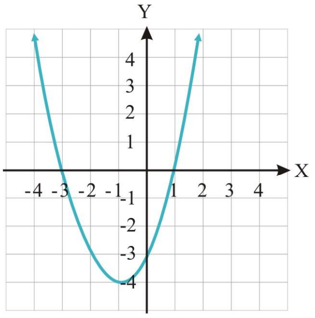
د پوښتنو ځوابونه

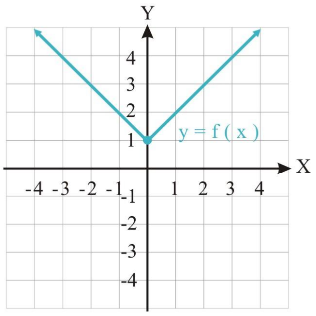
په راکړل شوو شکلونو کې:

a- د تابع د تعریف ساحه b- د تابع د قیمتونو ساحه c- د x له محور سره د ګراف تقاطع ټکي

d- د y له محور سره دتقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.







f(-1)=?   f(3)=?

حل:

له لومړی شکل کې:

a) د لومړی شکل د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه $(-\infty,+\infty)$ دي.

b) دلومړی شکل د قیمتونو ناحیه $[-4,+\infty)$ ده.

c) ګراف د X محور $(1,0)$ او $(-3,0)$ په نقطوکې قطع کوي.

d) د y محور د $(0,-3)$ په نقطه‌کې قطع کوي.

په دویم شکل کې:

a) د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه یا $(-\infty,+\infty)$ دي.

b) د تابع د قیمتونو ناحیه $(-\infty,+4]$ یا $\{y\in IR / y\leq 4\}$ ده.

c) د X محور د $(1,0)$ او $(-3,0)$ په نقطوکې قطع کوي.

d) د y محور د $(0,3)$ په نقطه‌کې قطع کوي.

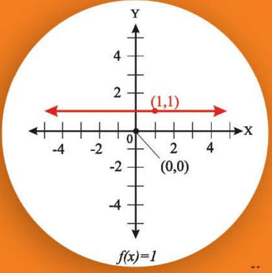
په دریم شکل کې:

a) د تابع د تعریف ناحیه د ټولو حقیقي عددونو سټ دی.

b) د تابع د قیمتونو ناحیه $[1,\infty)$ ده یا $\{y\in IR / y\geq 1\}$ ده.

c) د x له محور سره تقاطع نه لري.

d) د y محور د $(0,1)$ په نقطه‌کې قطع کوي $F(3)=4$ او $F(-1)=2$



ځینې خاصې تابعګانې

د کتاب (87)مخ **د تدریس وخت (2 درسي ساعت)**

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	• د ثابتې، عینیت او مطلقه قیمت د تابعګانو تعریفونه زده کړي. • د ثابتې، عینیت، مطلقه قیمت او څو معادله یې تابعګانو ګرافونه رسم کړای شي. • د ګراف له مخې د تابع ډول وپیژني. • د ریاضي د مسایلو په حل کې له دې تابعګانو څخه استفاده وکړای شي او اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	فعاله زده کړه (پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول)
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشیر، چارت... .
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته په داسې حل کې چې د ورودي برخې ګرافونه (د ثابتې تابع، ګراف، د عینیت او مطلقه قیمت تابعګانو ګرافونه) موجود وي، په دې برخه کې له زده کوونکو وپوښتئ.

د لوست بهیر او فعالیتونه(28) دقیقې

د (87) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي، بیا دې ثابته تابع تعریف شي، لومړی مثال د زده کوونکو په ونډه اخیستنه سره حل ا وګراف یې رسم کړي. د عینیت او مطلقه قیمت د تابع ګانو له تعریفولو څخه وروسته دې د دوی مثالونه حل شي د څو معادله یې تابع لومړی مثال دې حل شي او د (90) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي بیا دې محترم ښوونکی د څو معادله یې تابع ګراف رسم کړي او د (91) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي د علامې تابع (signFunction) له تعریفولو څخه وروسته ددې تابع ګراف رسم کړئ.

د لوست پیاوړتیا: (7) دقیقې

له پوښتنو څخه لومړنی پوښتنه حل کړئ.

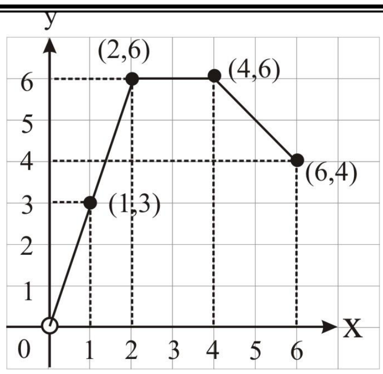
د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د لوست د ارزونې لپاره د پوښتنو دویمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• د لاندې څو معادله یې تابع ګراف رسم کړئ:

$$F(x)=\begin{cases}3x & : 0<x\le 2\\ 6 & : 2<x\le 4\\ -x+10 & : 4<x\le 6\end{cases}$$



- که چیرې د یوې تابع د تعریف ناحیه د څو سټونو په واسطه تقسیم شوي وي، په دې ډول چې ددې سټونو اتحاد د تابع د تعریف له ناحیې سره مساوي وي او د محور پر مخ د هر سټ لپاره د ځانګړې معادلې په واسطه تعریف شوي وي، نو په دې حالت کې څو معادله یې تابع لاس ته راځي یعنې :

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & : \quad x\in D_1 \\ f_2(x) & : \quad x\in D_2 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ f_n(x) & \qquad x\in D_n \end{cases}$$

$$\forall_i \in N : D_i \cap D_j = \phi \qquad\qquad D_1 \cup D_2 \ldots \cup D_n = D_f$$

مثال: د f تابع په لاندې ډول تعریف شوې ده، ګراف یې رسم، د تعریف او قیمتونو ناحیې یې هم وټاکئ

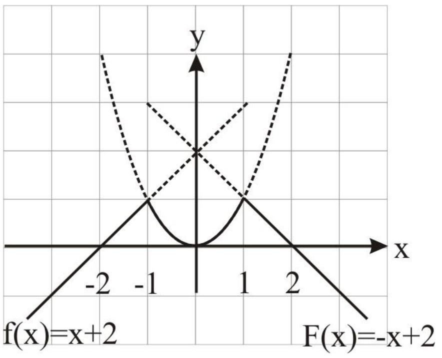
$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & : \quad x>1 \\ x^2 & : \quad -1\le x\le 1 \\ x+2 & : \quad x<-1 \end{cases}$$

حل:

x	2	3	4
f(x)	0	−1	−2

x	−2	−3	−4
f(x)	0	−1	−2

x	0	1	−1
f(x)	0	1	1



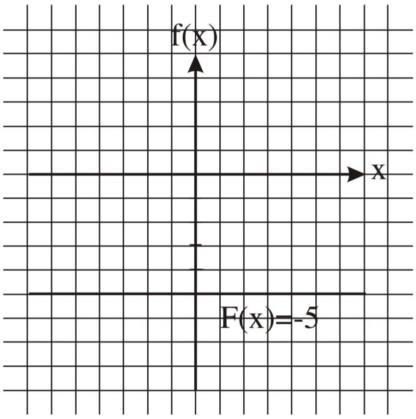
- ایا د $\begin{cases} 2 & , \quad x\ge 1 \\ x-1 , & \quad x<2 \end{cases}$ رابطه یوه تابع ښیي؟

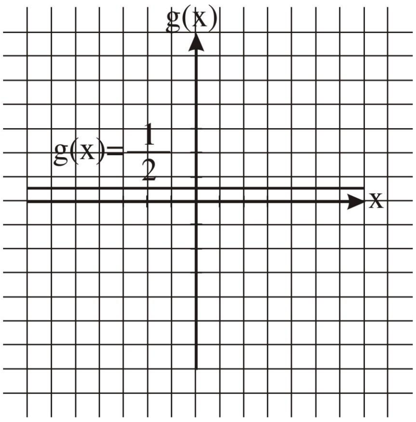
حل: دا رابطه یوه تابع نه ده، د مثال په ډول که $x=1.5$ وي له لومړۍ معادلې څخه y=2 او له دویمې معادلې څخه $y=\frac{1}{2}$ په لاس راځي، په دې معنا چې د یو x لپاره د y دوه قیمتونه موجودیږي.

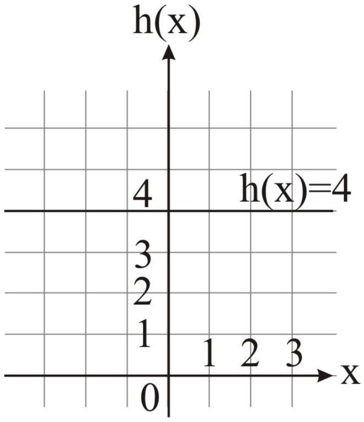
د پوښتنو ځوابونه

1- د $f(x)=-5$, $g(x)=\frac{1}{2}$ او $h(x)=4$ تابعگانو گرافونه رسم کړئ.

حل:



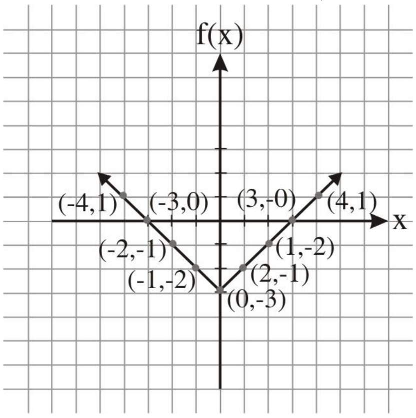




2- د $f(x)=|x|-3$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
$f(x)$	-3	-2	-2	-1	-1	0	0



3- که $f(x)=\begin{cases}-x \Leftarrow x<0\\ x \Leftarrow x\geq 0\end{cases}$ وي، د $f(16), f(-3,2), f(0)$ پیدا کړئ.

حل:

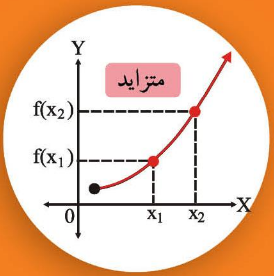
$F(0)=0$

$F(-3.2)=-(-3.2)=3.2$

$F(16)=16$

4- که $h(x)=\begin{cases} x+1 \Leftarrow -1\le x<0 \\ -x+1 \Leftarrow 0\le x\le 1 \end{cases}$ وي د h(x) د تعریف ناحیه وټاکئ.

حل: $Dom\, h(x)=[-1,1]$



متزايدي او متناقصې تابعگاني

د کتاب مخ (93) **د تدريس وخت (1 درسي ساعت)**

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • د متزایدي او متناقصې تابع تعریف زده کړي • د جفتې او طاقې تابع په تعریف پوه شي. • د تابع د گراف له مخې تعین کړای شي چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده. • د گراف له مخې جفته او طاقه تابع وپیژني. • د رياضي د مسايلو په حل کې د متزايدو او متناقصو تابعگانو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او ...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشير، چارت او ... .
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړيو فعاليتونو څخه وروسته په داسې حال کې چې د (93) مخ د دريو شکلونو چارت موجود وي او يا د تختې پر مخ رسم شوي وي له زده کوونکو څخه د ورودي پوښتنه وپوښتل شي لومړی شکل د متزايدې تابع، دويم شکل د متناقصې تابع او دريم شکل نه متزايده او نه متناقصه (ثابته تابع) ده.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې

د متزايدې او متناقصې تابع له تعريفولو څخه وروسته د $F(x)=x^2$ او $F(x)=-x^2$ مثال د شکل له مخې توضيح شي چې په کومو انټروالونو دا تابعگانې متزايدې اوپه کوموکې متناقصې دي.

د (94) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي. محترم ښوونکي دې لاربښوونه وکړئ، د جفتې او طاقې تابع له تعريف کولو څخه وروسته لومړی او دويم مثال په داسې حال کې چې د شکلونو چارت موجود وي او يا د تختې پر مخ رسم شوي وي، واضح کړي.

دريم مثال چې د طاقې تابع د لا ښې پیژندنې لپاره راوړل شوي دي محترم ښوونکي دې حل کړي

د لوست پیاوړتیا: (7) دقيقې

له لاندې تابعگانو څخه کومه يوه يې جفته، کومه يوه طاقه او کومه يوه يې نه طاقه او نه جفته ده؟

$F(x)=x^2$ يوه جفته تابع ده

$F(x)=x^4+x^2+5$ يوه جفته تابع ده

$F(x)=2x+3$ نه جفته او نه طاقه تابع ده

$F(x)=\dfrac{2}{x-6}$ نه جفته او نه طاقه تابع ده

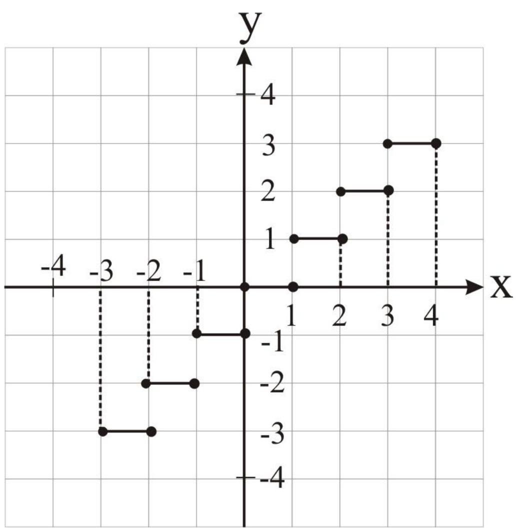
د لوست ارزونه: (5) دقيقې

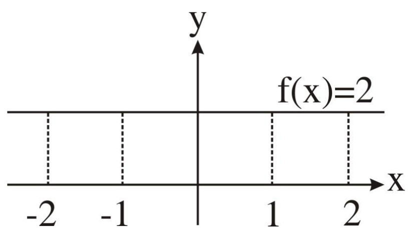
د لوست له لنډيز وروسته لومړۍ پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ .

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- که د تابع ګراف نظر د Y محور ته متناظر وي، نو تابع جفته ده او که ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته متناظر وي، نو تابع طاقه ده له دې پرته تابع نه طاقه او نه جفته ده. ثابته تابع هر وخت جفته تابع ده او د $F(x) = 0$ تابع هم جفته ده او هم طاقه.
- د $F(x) = [x]$ تابع د لوی تام عدد یا زینه یي تابع په نوم یادیږي، هغه عدد ښیي چې له x کوچنی او یا ورسره مساوي وي د مثال په ډول: $[\pi] = 3$, $[-6.9] = -7$, $[-5] = -5$, $[8.4] = 8$

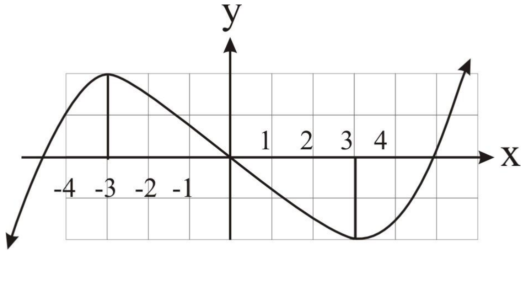
د $f(x) = [x]$ تابع ګراف د $(-3,3)$ په انټروال کې رسم شوي دي چې په هیڅ انټروال کې دا تابع نه متزایده او نه متناقصه ده، همدارنګه ثابته تابع نه متزایده ده او نه متناقصه، د مثال په ډول: $F(x) = 2$

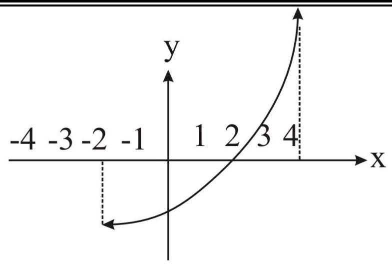




- لاندې تابع ګانې په کوم انټروال کې متزایدې او په کوم انټروال کې متناقصې دي.

د $(-\infty, -3]$ او $[3, +\infty)$ په انټروال کې متزایده او $[-3, 3]$ په انټروال کې متناقصه ده.





د $(-\infty,+\infty)$ په انټروال کې متزایده ده، هیڅکله هم متناقصه نه ده.

- د $y=-4x+2 \longleftarrow$ د $(-\infty,+\infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

د $y=x^2+4 \longleftarrow$ د $[0,+\infty)$ په انټروال کې متزایده او د $(-\infty,0]$ په انټروال کې متناقصه ده.

د $y=-|x+2| \longleftarrow$ د $(-\infty,-2]$ په انتروال کې متزایده او د $[-2,+\infty)$ په انتروال کې متناقصه ده.

د $y=x+|x| \longleftarrow$ تابع د $[0,\infty)$ په انټروال کې متزایده ده.

جفتي او طاقې تابعګانې

1- د f تابع د جفتې تابع په نامه یادیږي. که د هر $x\in D_f$ لپاره $-x$ هم د تابع د تعریف په ناحیه کې شامل وي او د $f(-x)=f(x)$ رابطه صدق وکړي.

2- د f تابع طاقه ده، که د هر $x\in D_f$ لپاره $-x$ هم د تابع د تعریف په ناحیه کې شامل وي او $f(-x)=-f(x)$ رابطه صدق کړي، د مثال په ډول د $F(x)=3x^2$ یوه جفته او $g(x)=x^3+9x$ یوه طاقه تابع ده.

3- د $F(x)=0$ هم جفته او هم طاقه تابع ده ځکه چې $F(-x)$ هم صفر کیږي.

4- د څو طاقو تابعګانو الجبري مجموعه طاقه ا و د څو جفتو تابعګانو الجبري مجموعه جفته ده.

5- د طاقې او جفتې تابع د جمعې او تفریق حاصل نه طاق دی او نه جفت.

6- د دوو طاقو تابعګانو ترکیب طاقه تابع ده، خو د دوو جفتو تابعګانو ترکیب او یا د یوې جفتې او یوې طاقې تابع ترکیب جفته تابع ده.

7- د طاقې تابع مشتق او انتیګرال جفته تابع ده او د هرې جفتې تابع مشتق طاقه تابع ده.

د پوښتنو ځوابونه

1- د لاندینیو تابعګانو څخه کومه یوه یې متزایده، کومه یوه یې متناقصه او کومه یوه نه متزایده او نه متناقصه ده؟

$f(x)=x^3+x \quad , \quad f(x)=x^2+x \quad , \quad f(x)=x^2-x^4$

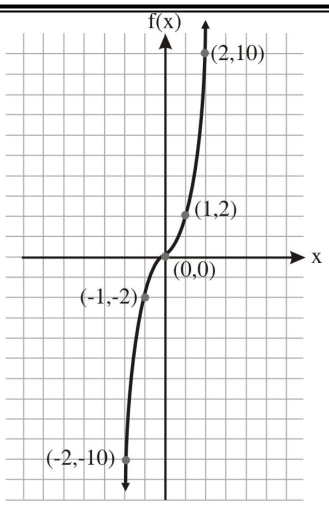
حل: د $f(x)=x^3+x$ په تابع کې که $x_1=2$ او $x_2=3$ وي، نو څرنګه چې $F(x_1)<F(x_2)$ ده یا $29>10$ دی، نو د $f(x)$ دتابع د $(-\infty,+\infty)$ په انتروال کې متزایده ده.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-10	-2	0	2	10

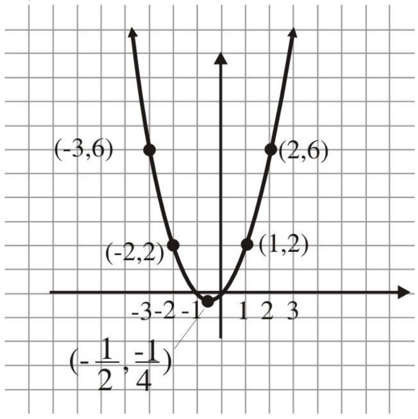
د $F(x)=x^2+x$ تابع

$F(2)=2^3+2=8+2=10$

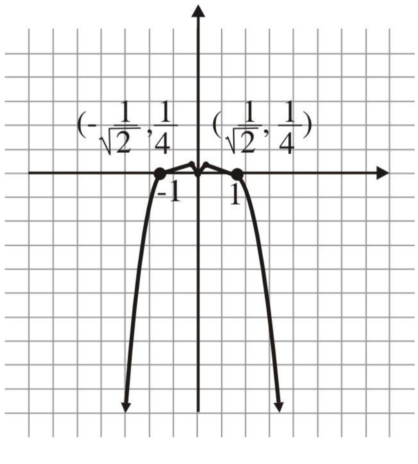
$F(3)=3^3+2=27+2=29$



x	0	1	2	-1	$-1/2$	-2	-3
$f(x)$	0	2	6	0	$-1/4$	2	6



د $(-\infty,-\frac{1}{2})$ په انتروال کې تابع متناقصه او د $(-\frac{1}{2},\infty)$ په انتروال کې متزایده ده.



x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
f(x)	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0

تابع $F(x)=x^2-x^4$

دا تابع د $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ په انټروال کې متزایده او د $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ په انتروال کې متزایده

او د $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ په انتروال کې متناقصه ده.

2- د لاندینیو راکړل شوو تابعګانو څخه کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

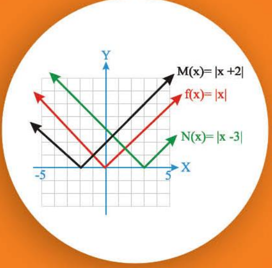
$f(x)=x \quad , \quad f(x)=|x| \quad , \quad f(x)=x^4 \quad , \quad f(x)=x^5$

حل: د $F(x)=x$ تابع طاقه ده ځکه چې $F(-x)=-x$ ده.

$F|-x|=|-x|=x=|x|$ ده، نو $F(x)=|x|$ جفته ده.

$F(x)=x^4$ تابع هم جفته تابع ده $F(-x)=(-x)^4=x=F(x)$

$F(x)=x^5$ يوه طاقه تابع ده، ځکه چې $F(-x)=(-x)^5=-x=-f(x)$



انتقال(Translation)

د درسي کتاب (97)مخ **د تدریس وخت (2 درسي ساعتونه)**

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	زده کوونکي باید ددې لوست په پای کې: • د ګراف د انتقال په مفهوم وپوهیږي. • د عمودي او افقي انتقال په مفهوم پوه شي. • د یوې تابع د ګراف له مخې انتقال شوي ګرافونه رسم کړای شي. • د عمودي او افقي انتقال په توپیر وپوهیږي. • د عمودي او افقي انتقالونو ترکیب درک کړي. • د ګرافونو په رسمولو کې د انتقال او د انتقالونو له ترکیب څخه ګټه واخیستلای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشیر، چارت او ... .
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته په داسې حال کې چې چارت او یا ورودي شکل پرتخته رسم شوي وي، ورودي پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ. ترڅو زده کوونکي فکر کولو ته مجبور شي، په لومړي شکل کې د مطلقه قیمت د تابع ګراف درې واحده ښیې، خواته او دوه واحده کیڼې خواته په افقي ډول انتقال شوي دي. په دویم شکل کې د مطلقه قیمت تابع ګراف په افقي ډول د څلورو واحدو په اندازه ښیې خواته انتقال شوي دي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

ددې لوست د (97) مخ لومړنې فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او محترم ښوونکي دې لارښوونه وکړي.

د عمودي انتقال له تعریفولو وروسته دې لومړی او دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستې سره حل شي، په داسې حال کې چې د شکلونو چارت موجود وي او یاپر تخته رسم شوي وي، د افقي انتقال یا(Horizitan Transalation) له تعریفولو وروسته دې دریم مثال حل شي او د (100) مخ دویم فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي. محترم ښوونکي دې کوښښ وکړي چې په ګروپونو کې د زده کوونکو د کار کولو په وخت کې د دوي له کار څخه څارنه وکړي، تر څو ټول زده کوونکي یو له بله سره په مشوره کولو کې فعاله ونده واخلي او د ستونزې د پیدا کیدو په صورت کې دې هغوی ته لارښوونه وشي.

ددې لپاره چې د ګراف د عمودي او افقي انتقال د ترکیب مفهوم ښه واضح شي، څلورم او پنځم مثال دې محترم ښوونکي کار کړي.

د لوست پیاوړتیا: (7) دقیقې

د $F(x)=|x|$ تابع دګراف له انتقال څخه د $g(x)=3|x|-1$ تابع ګراف رسم کړئ.

x	$f(x)=\|x\|$	$g(x)=3\|x\|-1$
-2	2	$3\|-2\|-1=5$
-1	1	$3\|-1\|-1=2$
0	0	$3\|0\|-1=-1$
1	1	$3\|1\|-1=2$
2	2	$3\|2\|-1=5$

محترم ښوونکي دې داګراف رسم کړي.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د لوست د ارزونې لپاره کولای شي چې د لومړې پوښتنې یوه برخه له زده کوونکو وپوښتي.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- په عمودي او افقي ډول دګراف کش کول او انعکاس چې $c>1$ وي:

- که د $y=f(x)$ د تابع ګراف د c د عامل په اندازه په عمودي ډول کش شي، د $y=cf(x)$ ګراف لاس ته راځي.
- د c د عامل په اندازه په عمودي ډول د $y=f(x)$ د تابع ګراف له فشار ورکولو څخه د $y=(\frac{1}{c})f(x)$ تابع ګراف لاس ته راځي.
- د c د عامل په اندازه په افقي ډول د $y=f(x)$ د تابع ګراف له فشار ورکولو څخه د $y=f(cx)$ تابع ګراف لاس ته راځي.
- په عمودي ډول د c د ضربي عامل په اندازه $y=f(x)$ تابع ګراف له کش کولو څخه د $y=f(\frac{x}{c})$ ګراف لاس ته راځي.
- د x د محور پر شاوخوا د $y=f(x)$ تابع له انعکاس څخه د $y=-f(x)$ تابع ګراف لاس ته راځي.
- د y محور پر شاوخوا د $y=F(x)$ تابع له انعکاس څخه د $y=f(-x)$ تابع ګراف لاس ته راځي.

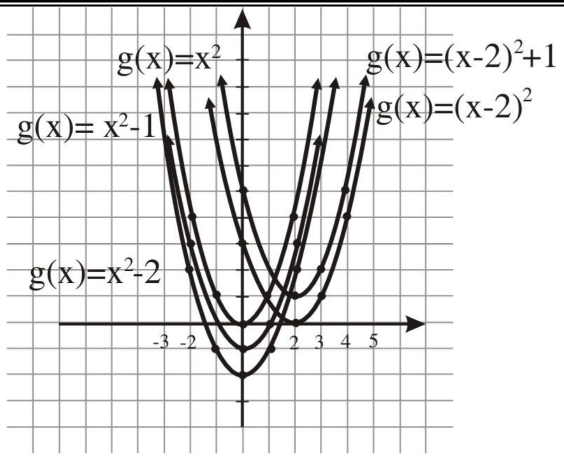
د پوښتنو ځوابونه

1- د $y=x^2$ دګراف له انتقال څخه د لاندینیو تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

$g(x)=x^2-2$, $g(x)=(x-2)^2$, $g(x)=x^2-1$, $g(x)=(x-2)^2+1$

حل:

x	$y=x^2$	$g(x)=x^2-2$	$g(x)=(x-2)^2$	$g(x)=(x-2)^2+1$	$g(x)=x^2-1$
0	0	−2	4	5	−1
1	1	−1	1	2	0
−1	1	−1	9	10	0
2	4	2	0	1	3
−2	4	2	16	17	3
3	9	7	1	2	8
4	16	14	4	5	15



2- د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع گراف رسم کړئ او ددې گراف له انتقال څخه د $f(x)=\sqrt{x}+2$ او $f(x)=\sqrt{x+2}$ تابعگانو گرافونه رسم کړئ.

حل:

$F(x)=\sqrt{x}$

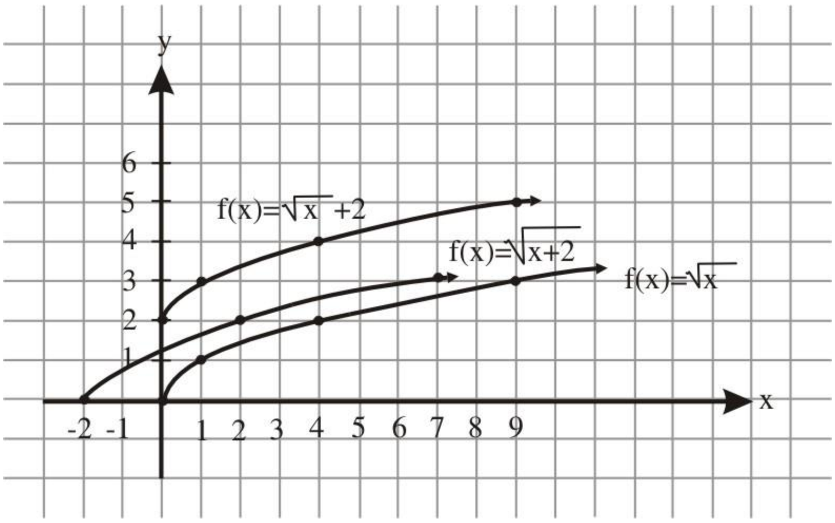
x	0	1	4	9
$f(x)$	0	1	2	3

$F(x)=\sqrt{x+2}$

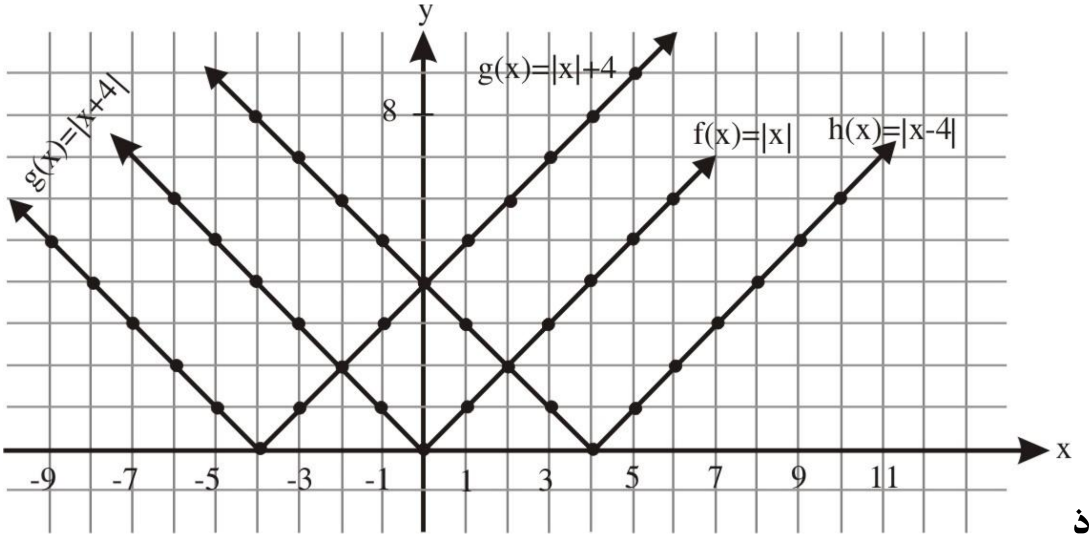
x	−2	2	7
f(x)	0	2	3

$F(x)=\sqrt{x}+2$

x	0	1	4	9
f(x)	2	3	4	5



3: د $f(x)=|x|$ د تابع گراف رسم کړئ او ددې گراف له انتقال څخه د $g(x)=|x|+4$, $g(x)=|x+4|$ او $h(x)=|x-4|$ تابعگانو گرافونه رسم کړئ.



ذ

x	0	1	3	5	−1	−2	−3
$f(x)=\|x\|$	0	1	3	5	1	2	3

x	0	1	−1	2	−2	3
$\|x\|+4$	4	5	5	6	6	7

x	0	1	6	9
$\|x-4\|$	4	3	2	5

x	0	−1	1	−2	−6
$\|x+4\|$	4	3	5	2	2

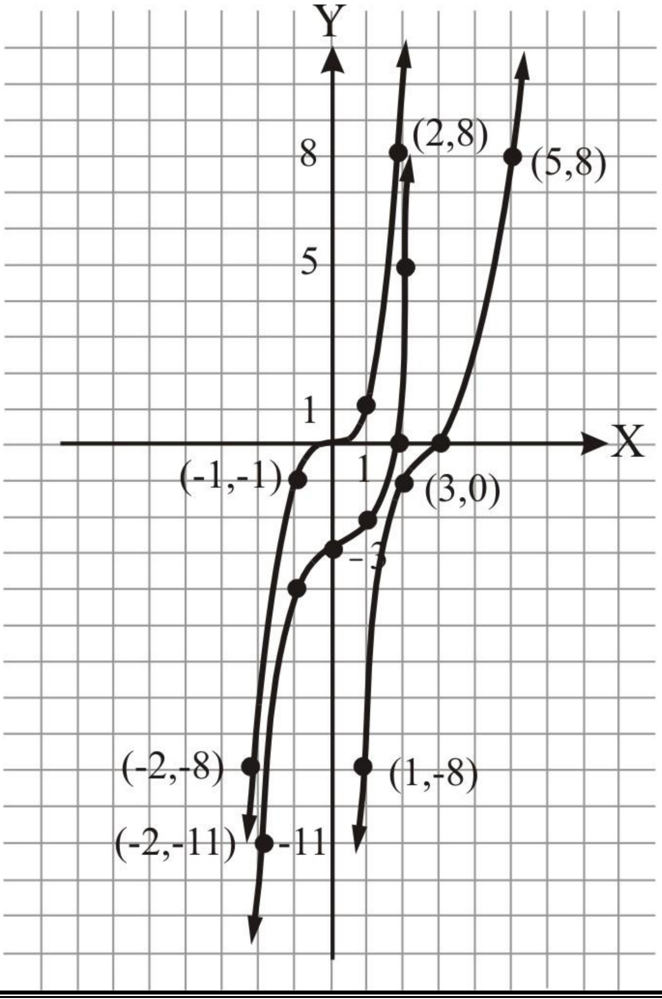
4: د $f(x)=x^3$ د تابع گراف له انتقال څخه د $g(x)=x^3-3$ او $g(x)=(x-3)^3$ تابعگانو گرافونه رسم کړئ.

حل:

x	0	1	2	−1	−2
$f(x)$	0	1	8	−1	−8

x	0	1	2	−1	−2
$g(x)=x^3-3$	−3	−2	5	−4	−11

x	0	1	2	3	5
$g(x)=(x-3)^3$	−27	−8	−1	0	8



$f(x)=\sqrt{4-x}$

$g(x)=\sqrt{3+x}$

$(f+g)(x)=?$

د تابعګانو عمليې

د کتاب (103)مخ   د تدريس وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد دې لوست په پای کې: • د تابعګانو د جمعې، تفريق، ضرب او وېش عمليې زده کړي. • د تابعګانو د جمعې، تفريق، ضرب او وېش د حاصلونو د تعريف ناحيې وټاکلای شي. • تابعګانې سره جمع، تفريق، ضرب او يوه پر بله وويشلای شي. • د رياضي د مسايلو په حل کې دتابعګانو د څلورګونو عمليو اهميت درک او له زده کړې څخه يې د رياضي له مضمون سره علاقه پيدا شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او ... .
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته د انګيزې د پيدا کولو لپاره بايد ورودي پوښتنه له زده کوونکو وپوښتل شي: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+2+2x+11=3x+13$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+2-(2x+11)=x+2-2x-11=-x-9$

د لوست بهير او فعاليت: (28) دقيقې

د تابعګانو د عمليو له تعريف کولو او د دوی د تعريف د ناحيو له ټاکلو وروسته دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره لومړی او دويم مثال د تختې پر مخ حل شي، بيا دې ددې لوست لومړی فعاليت زده کوونکي سرته ورسوي، تر څو چې زده کوونکي د تابعګانو د ناحيو ټاکنه چې ددې څېرکي په لومړنيو لوستونو کې ويلې دي، زده کړي. له دې وروسته چې ښوونکي دريم مثال حل کړي، ددې لوست فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي، بيا دې محترم ښوونکي د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره څلورم او پنځم مثالونه حل کړي او دتعريف ناحيې دې يې د عددونو پر محور وښودل شي. ددې لپاره چې وپوهيږي چې يوه تابع څرنګه په يو ثابت عدد کې ضرب کړو، شپږم مثال دې حل شي.

د لوست پياوړتيا: (7) دقيقې

د موضوع د لا ښې زده کړې لپاره د پوښتنو د (a) برخه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې

د لوست د ارزونې لپاره لاندې پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

که $f(x)=5x^2$ او $g(x)=3x-1$ وي نو $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $f\cdot g$ او $\dfrac{f}{g}$ پيدا کړئ؟

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

دتابعگانو د عمليو خاصيتونه

- اگر g,h و f توابع و t,n,m و p اعداد ثابت باشند؛ داريم که:

1) $h+g=g+h$ 2) $f\cdot g=g\cdot f$

3) $(f+g)+h=(f+g)+h$ 4) $(f\cdot g)h=(f\cdot g)h$

د $\alpha(x)=0$ او $k(x)=1$ تابعگانو لپاره لرو چې:

5) $f+\alpha=f$

6) $f\cdot k=f$

7) $f+(g+h)=l(f+g)+h$

8) $f(g+h)=fg+fh$ $m(f+g)=mf+mg$

9) $(m+n)f=mf+nf$

10) $m(fg)=(mf)g$

11) $(pt)f=P(tf)$

- پام مو وي چې $\text{dom}(\frac{f}{g})(x)$ د درسي کتاب د (104) مخ په دريم مثال کې په لاندې ډول ليکل شوي دي.

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x/x\neq 2\ ,\quad x\neq 1\}$$

د انتروال په شکل يې په دې ډول هم ليکلای شو:

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$$

- که $f(x)=x+3$ او $g(x)=-x-1$ وي، د $f+g$ او $f-g$ گرافونه رسم کړئ.

حل:

$(f+g)(x)=x+3-x-1=2$

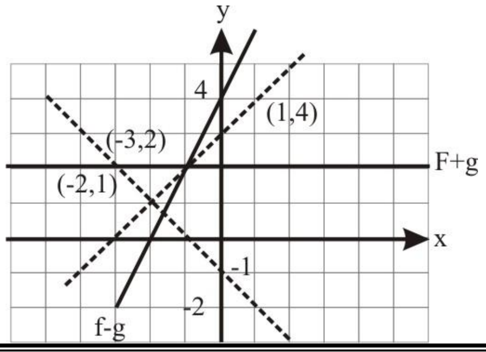
$(f-g)(x)=x+3+x+1=2x+4$

$y=x+3$

x	0	−1	−2	−3	1
f(x)	3	2	1	0	4

x	0	−2	1
(f − g)(x)	4	0	6

x	0	−1	−2	−3
g(x)	−1	0	1	2



د پوښتنو ځوابونه

لاندې تابعګانې په پام کې ونيسئ:

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ و $(\frac{f}{g})(x)$ پيدا کړئ.

2- د تعريف ناحيې هم وټاکئ.

$a: f(x)=2x+3 \qquad g(x)=x-1$

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x+3)+(x-1)=3x+2$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x+3)-(x-1)=x+4$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(2x+3)(x-1)=2x^2-2x+3x-3=2x^2+x-3$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x+3}{x-1}$$

$b: f(x)=x-5 \qquad g(x)=3x^2$

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x-5)+(3x^2)=3x^2+x-5$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x-5)-(3x^2)=-3x^2+x-5$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x-5)(3x^2)=3x^3-15x^2$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-5}{3x^2}$$

$c: f(x)=2x^2-x-3 \qquad g(x)=x+1$

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x^2-x-3+x+1=2x^2-2$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=2x^2-x-3-(x+1)=2x^2-2x-2$$
$$(f-g)(x)=2x^3+4x^2-4x-3$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x^2-x-3}{x+1}=2x-3$$

$d: f(x)=\sqrt{x} \qquad g(x)=x-5$

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+(g)=\sqrt{x}+x-5$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-x+5$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x}(x-5)=x\sqrt{x}-5\sqrt{x}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

$e: f(x)=\sqrt{x+4} \qquad g(x)=\sqrt{x-1}$

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-1}=\sqrt{(x+4)(x-1)}=\sqrt{x^2+3x-4}$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-1}}$

$f: f(x)=\sqrt{3x} \qquad g(x)=\sqrt{x^2-1}$

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{3x^2}+\sqrt{x^2-1}$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{3x}-\sqrt{x^2-1}$

$(f-g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{3x}(\sqrt{x^2-1})=\sqrt{3x^3-3x}$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2-1}}$

د دویم جز حل: $(-\infty,\infty)$ یا $dom\, g=IR \qquad dom\, f=IR$

$:a$

$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(\frac{f}{g})(x)IR\cap IR\setminus\{x/g(x)\neq 0\}=IR\setminus\{-1\}=\{x\in IR/x\neq -1\}=(-\infty,-1\cup(-1,\infty)$

$:b$

$dom(f+g)(x)=dom(f-g)(x)=dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq 0\}$

$:c$

$dom(f+g)(x)=dom(f-g)(x)=dom(f\cdot g)(x) \qquad dom(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR\setminus\{-1\}$

$dom\frac{f}{g}(x)=\{x\in IR \mid x\neq -1\}$

$:d$

$dom\, f=\{x\in IR/x\geq 0\} \qquad dom\, g=IR$

$dom(f+g)(x)=dom(f-g)(x)=dom(f\cdot g)(x)$

$[0,\infty)\cap IR=[0,\infty) \qquad dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\geq 0\ ,\ \ x\neq 5\}$

$[0,5)\cup(5,\infty)$ يا $[0,\infty)-\{5\}$ يا

:e

$dom\ f=\{x/x+4\geq 0\ ,\ x\geq -4\}$ يا $[-4,\infty]$

$dom\ g=\{x/x-1\geq 0\ ,\ x\geq 1\}$ يا $[1,\infty]$

$\text{dom}(f+g)(x)=\text{dom}(f-g)(x)=\text{dom}(f\cdot g)(x)=[-4,\infty)\cap[1,\infty)=[1,\infty)$

يا

$\{x\in IR/\ 1\leq x\}$

$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=(1,\infty)$

:f

$\text{dom}\,f=[0,\infty)$, $\text{dom}\,g=\{x\in IR/x\leq -1$ يا $x\geq 1\}$

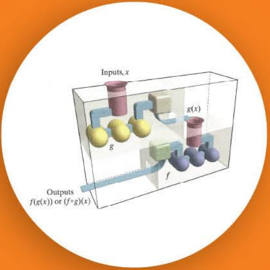
$dom(f+g)(x)=dom(f-g)(x)=dom(f\cdot g)(x)=[0,\infty)\cap[1,\infty)\cap(-\infty,-1]=[1,+\infty)$

$dom(\frac{f}{g})(x)=dom\ f\cap dom\ g\setminus\{x/g(x)\neq 0\}$

$dom\ f=[0,\infty)$

$dom\ g=\{x/x\in IR, x<-1\ , x>1\}$

$dom\ f\cap domg=(-\infty,-1)\cap[0,\infty)\cap(1,\infty)=(1,\infty)$



د تابعګانو ترکیب یا مرکبې تابعګانې

د درسي کتاب (107) مخ   د تدریس وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	دې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د مرکبو تابعګانو په تعریف وپوهیږي • تابعګانې یوه له بلې سره ترکیب کړای شي. • د تابعګانو د ترکیب مفهوم درک کړای شي. • د مرکبو تابعګانو د تعریف ناحیې پیدا کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې د مرکبو تابعګانو د خاصیتونو اهمیت درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او ...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او ... .
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د ورودي شکل په برخه کې له زده کوونکو وپوښتئ د ورودي شکل مفهوم دا دی چې که تابع ته د یو ماشین په شان فکر وکړو په لومړني ماشین کې input یا x د $g(x)$ د تابع د تعریف ناحیه ده او په دویم ماشین کې $g(x)$ د F د تابع د تعریف ناحیه ده چې له ترکیب څخه وروسته تابع د $(Fog)(x)$ یا $F(g(x))$ او یا د F[g(x)] په شکل ښودل کیږي.
د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې دې لوست فعالیت دې د ښوونکي په مرسته زده کوونکي سره ورسوي او متحرم ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره لومړی او دویم مثالونه حل کړي. د (108)مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سره ورسوي او خپل کار دې نورو ته توضیح کړي. دې لوست دریم او څلورم مثال دې ښوونکي حل کړي او د Fog د تعریف ناحیه دې په شکل کې وښودل شي. په همدې ډول دې پنځم مثال حل شي او د x په یو مشخص قیمت کې دې د دوو تابعګانو د ترکیب طریقه زده کوونکو ته توضیح شي او زده کوونکي دې د (110) مخ فعالیت سره ته ورسوي.	
د لوست پیاوړتیا: (7) دقیقې که $F(x)=5x^2$ او $g(x)=3x-1$ وي؛ gof او gog پیدا کړئ.	
د لوست ارزونه: (5) دقیقې که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=-x^2$ وي؛ $(gog)(2)$, $(fog)(2)$ او $(fof)(-2)$ پیدا کړئ.	
د ښوونکي لپاره اضافي معلومات که $f(x)=4x^2+1$ او $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$ وي.	

$(fog)(-1)$ $(gof)(2)$ عبارت دي له:

حل:

$$f(2)=4(2)^2+1=17$$

$$g(17)=\frac{1}{17+2}=\frac{1}{19}\Rightarrow (gof)(2)=\frac{1}{19}\Rightarrow (gof)(2)=\frac{1}{19}$$

د $(fog)(-1)$ د پیداکولو لپاره لومړی $g(-1)$ پیدا کړئ:

$$g(-1)=\frac{1}{-1+2}=1$$

$$f(1)=4(1)^2+1=5\Rightarrow (fog)(-1)=5$$

- که $x=0.25$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي

$$f(0.25)=\sqrt{0.25}\approx 0.5$$

$$f^2(0.25)=\sqrt{\sqrt{0.25}}\approx 0.7071$$

$$f^3(0.25)=\sqrt{\sqrt{\sqrt{0.25}}}\approx 0.8409$$

$$f^4(0.25)=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{0.25}}}}\approx 0.9170$$

- که $g(2x-1)=2x+3$ وي، نو $g(x)$ عبارت دی له:
- ښـې خـوا $2x+3$ د $2x+3=2x-1+4$ پـه شـکل لیکـو، اوس کـه د $2x-1$ پـر ځـای x وضـع کـړو، نـو $g(x)=x+4$ کیږي.
- که د A له سټ څخه د B سټ ته f یوه تابع وي چې د تعریف ناحیه یې $\{1,2\}$ او د قیمتونو ناحیه یې $\{a,c\}$ وي او g د C له سټ څخه و D ته یوه داسې تابع وي چې د تعریف ناحیه یې $\{a\}$ او د قیمتونو ناحیه یې $\{n\}$ وي، نو د gof مرکبه تابع به له A څخه وD ته وي چې ددې مرکبې تابع د تشکیل شرط دا دی چې د f د تابع د قیمتونو ناحیه (د f د قیمتونو یوه برخه) د g د تابع د تعریف ناحیې فرعي سټ وي. D_{gof} د f د تابع د تعریف د ناحیې عناصر دي یا $\{x\in D_f\}$ $D_{gof}=$ دي، په دې شرط چې مرکبه تابع موجود وي یعنې د f د تابع د قیمتونو ناحیه (اویا یوه برخه یې) چې په دې مثال کې یوازې $\{a\}$ هر عنصر یا د g د تعریف ناحیه ده نو:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \ / \ f(x)\in D_g\}$$

یعنې د gof په مرکبه تابع کې د تعریف ناحیه له f او د قیمتونو ناحیه له g څخه ټاکو.

مثال: که د $f(x)=2x+1$ د تابع د تعریف ناحیه $x\geq 0$ او د $g(x)=3x-2$ د تعریف ناحیه $-3<x<5$ وي، د gof تابع د تعریف ناحیه عبارت ده له:

د تعریف په اساس $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$ لومړی D_g پیداکوو او د x پرځای د f د تابع په D_g کې لیکو

$$D_g\Rightarrow -3<x<5\Rightarrow -3<f(x)<5$$

$$-3<2x+1<5\Rightarrow -4<2x<4\longrightarrow -2<x<2$$

او ددې نتیجې تقاطع له D_f سره پیداکوو:

$$-2<x<2\cap x\geq 0$$

چې ددې ځواب $2 \le x \le 0$ د $(gof)_{(x)}$ تابع د تعریف ناحیه ده.

یا کولای شو په پورتني مثال کې د fog د تعریف ناحیې د پیدا کولو لپاره په دې ډول عمل کوو:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

لومړی د f تابع ناحیه پیدا کوو، بیا د x پر ځای باید g(x) ولیکو او تقاطع یې له D_g سره په لاس راوړو:

$$D_f =: \longrightarrow x \ge 0 \Rightarrow g(x) \ge 0 \Rightarrow 3x-2 \ge 0 \Rightarrow x \ge \frac{3}{2} \cap D_g$$

نو د fog د تابع د تعریف ناحیه له $\frac{2}{3} \le x < 5$ څخه عبارت ده.

- که $f(x) = \frac{2}{x-3}$ او $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$ وي، fog او د تعریف ناحیه یې پیدا کړئ.

$$D_f = IR - \{3\}$$
$$D_g = R - \{-1\}$$
$$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \in IR, x \ne -1, \frac{x-2}{x+1} \ne 3\}$$
$$= \{x \mid x \in IR, x \ne -\frac{5}{2}\} = IR - \{-\frac{5}{2}, -1\}$$
$$(fog)(x) = f(\frac{x-2}{x+1}) = \frac{2}{\frac{x-2}{x+1} - 3} = \frac{2x+2}{-2x-5}$$

- که چیرې (fog)ولرو او وغواړو چې f(x) په لاس راوړو، د g(x)=t مساوات د t له جنسه پیدا کوو او په $(fog)_{(x)}$ کې یې د x پر ځای وضع کوو.

د مثال په ډول که $(fog)_{(x)} = 6x-3$ وي، غواړو f(x) په لاس راوړو او که $g(x) = 3x-2$ وي.

$$g(x) = t \longrightarrow 3x-2 = t \longrightarrow 3x = t+2 \longrightarrow x = \frac{t+2}{3}$$

اوس که $\frac{x+2}{3}$ د x پرځای په 6x-3کې عوض کړو، f(x) په لاس راځي:

$$f(x) = 6(\frac{x+2}{3}) - 3 = 2(x+2) - 3 = 2x+4-3 = 2x+1$$

مثال: که $g(4x+1) = 2x-11$ وي، $g_{(x)}$ او $g(-1)$ پیدا کړئ.

$$4x+1 = t \Rightarrow 4x = t-1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{4}$$

اوس په 2x-11کې د x پر ځای قیمت یې $\frac{t-1}{4}$ عوض کوو، البته د $\frac{t-1}{4}$ پر ځای د $\frac{x-1}{4}$ بردو لرو چې:

$$g(x) = 2(\frac{x-1}{4}) - 11 = \frac{x-1}{2} - 11 = \frac{x-1-22}{2} = \frac{x-23}{2} \Rightarrow g(-1) = \frac{-1-23}{2} = -12$$

ځینې وختونه په لنډ ډول داسې په لاس راځي:

مثال: که $g(2x-1) = 2x+3$ وي، $g(x)$ پیدا کړئ.

د مساوات ښي خوا یا له 2x+3 څخه 2x-1 جوړوو:

2x+3=2x-1+4

اوس د 2x-1 پر ځای که x عوض کړو، g(x)=x+4 کیږي.

- که $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ وي f(x) پیدا کړئ.

حل: لومړی باید له $x^2+\frac{1}{x^2}$ څخه $x+\frac{1}{x}$ جوړ کړو او بیا د $x+\frac{1}{x}$ پر ځای د x متحول ولیکل شي.

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=(x+\frac{1}{x})^2-2 \Rightarrow f(x)=x^2-2$$

- که $f(x)-3f(-x)=3x$ وي، f(x) په لاس راوړئ، د x پر ځای x- عوض کوو لرو چې:

F(-x)=-3f(x)=-3x

ددې لپاره چې f(-x) له منځه یوسو، دویمه معادله د 3 په عدد کې ضربوو:

$$\begin{cases} f(x)-3f(-x)=3x \\ f(-x)-3f(x)=-3x \end{cases}$$

$$f(x)-9f(x)=3x-9x \Rightarrow -8f(x)=-6x \Rightarrow f(x)=\frac{6x}{8}=\frac{3x}{4}$$

- که $f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x+1$ وي f(x) پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې x او $\frac{1}{x}$ لرو نو، په راکړل شوي رابطه کې د x پر ځای $\frac{1}{x}$ لیکو چې د $f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{2}{x}+1$ رابطه په لاس راځي:

$$f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x+1 \qquad f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{2}{x}+1$$

ددې لپاره چې $f(\frac{1}{x})$ مو حذف کړې وي، دویمه معادله د (2−) په عدد کې ضربوو او دواړه رابطې سره جمع کوو:

$$f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x+1$$

$$-2f(x)-4f(x)=\frac{-4}{x}-2$$

$$-3f(x)=2x+1-\frac{4}{x}-2=2x-\frac{4}{x}-1$$

نو $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3x}+\frac{1}{3}$ کیږي.

د پوښتنو ځوابونه

1- که $f(x)=-3x+2$ او $g(x)=x^3$ وي:

$$(f+g)(x) \quad , \quad (f-g)(x) \quad , \quad (g\cdot f)(x) \quad , \quad (\frac{g}{f})(x) \quad , \quad (g-f)(x)$$

په لاس راوړئ او هم یې د تعریف ناحیې وټاکئ.

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-3x+2+x^3$

$\operatorname{dom} f=IR \quad , \quad \operatorname{dom} g=IR \Rightarrow \operatorname{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$

$(g-f)(x)=x^3-(-3x+2)=x^3+3x-2$

$\operatorname{dom}(g-f)(x)=IR$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=x^3(-3x+2)=-3x^4+2x^3 \quad \operatorname{dom}(f\cdot g)(x)=IR$

$(\frac{g}{f})(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^3}{-3x+2}$

$-3x+2=0\Rightarrow 3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}$

$\operatorname{dom}(\frac{g}{f})(x)=\left\{x\in IR / x\neq\frac{2}{3}\right\}=(-\infty,\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},\infty) \qquad IR\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$

$(f-g)(x)=-3x+2-x^3$

$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$

2- که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=\sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$(f\cdot g)(x)=(x^2-3)(\sqrt{x-3})$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-3}{\sqrt{x-3}}$

$(\frac{g}{f})(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-3}$

3- که $f(x)=x^2+1$ او $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ او $k(x)=\sqrt{3x+4}$ وي

$(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$, $(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ د تابعگانو د تعریف ناحیې پیدا کړئ.

د I جز حل:

$\operatorname{dom} f=IR \quad \operatorname{dom} g(x)=IR-\{0\}$

$\operatorname{dom}(f\cdot g)(x)=IR\setminus\{0\}$

د II جز حل:

$dom\ f=IR \qquad dom\ g=IR-\{0\}$

$dom(\frac{f}{g})(x)=IR\setminus\{0\}$

د III جز حل:

$\operatorname{dom} h=\{x\in IR / -2\leq x\leq 2\}=[-2,2]$

$\operatorname{dom} h=4-x^2\geq 0$ یا

$\operatorname{dom} k=3x+4\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{4}{3}$

$\text{dom}\,k = [-\frac{4}{3}, \infty)$

$dom(h \cdot k)(x) = [-2,2] \cap [-\frac{4}{3}, \infty) = [-\frac{4}{3}, 2]$

$\text{dom}(\frac{h}{k})(x) = [-2,2] \cap [-\frac{4}{3}, \infty) - \{\frac{4}{3}\} = (-\frac{4}{3}, 2]$

یا:

$\text{dom}(\frac{h}{k})(x) = [-2,2] \bigcap [-\frac{4}{3}, +\infty) - \{x / k(x) = 0\} = [-\frac{4}{3}, 2] - \{\frac{4}{3}\} = (-\frac{4}{3}, 2]$

4- که $f(x) = 3x - 2$ او $g(x) = x^2$ وي $(g\,o\,f)(3)$ او $(f\,o\,g)(1)$ پیداکړئ.

حل:

$(g\,o\,f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = (3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

$(g\,o\,f)(3) = 9 \cdot 9 - 36 + 4 = 85 - 36 = 49$

$(f\,o\,g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 - 2$

$(f\,o\,g)(1) = 3 - 2 = 1$

5-که $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{2-x}$ وي $f\,o\,g$, $g\,o\,f$ و $f\,o\,f$ پیداکړئ.

حل:

$(f\,o\,g)(x) = f(\sqrt{2-x}) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x}$

$(g\,o\,f)(x) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$

$f\,o\,f = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

6- که $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ او $h(x) = x+3$ وي، $(f\,o\,g\,o\,h)(x)$ پیداکړئ.

حل:

$(f\,o\,g\,o\,h)(x) = (f\,o\,g),(h(x)) = f(g((h(x)) = (f\,o\,g,(x+3))f(x+3)^{10}\ \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$

یا:

$(fog) = \frac{x^{10}}{x^{10}+1} \Rightarrow (fogoh)(x) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$

معکوسه تابع (Inverse Function)

ددرسي کتاب (111)مخ **د تدریس وخت** (2 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	ددې لوست په پای کې باید زده کوونکي: • د معکوسې تابع او د یو په یو تابع په تعریف وپوهیږي. • وپوهیږي چې هره تابع معکوس منوونکې نه وي. • دا درک کړي چې د یو په یو تابع، معکوس هم یوه تابع وي. • په دې وپوهیږي چې د تابع د تعریف ناحیه د معکوسې تابع د قیمتونو ناحیه او د تابع د قیمتونو ناحیه د معکوسې تابع د تعریف ناحیه ده. • د یوې تابع معکوس پیدا کړای شي. • د تابع او د معکوس ګراف یې رسم کړای شي. • د تابع او د معکوسې تابع د ګرافونو تر منځ اړیکه درک کړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او ...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او ...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له زده کوونکو وپوښتل شي چې د ورودي برخې د ترمامیتر د سانتي ګرید او فارنهایت د حرارت د درجو ترمنځ څه اړیکه موجود ده؟ دا اړیکه یوه د بلې معکوسه ده. $F = \frac{9}{5}C + 32$ او $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**

محترم ښوونکي دې زده کوونکي دې ټکي ته متوجه کړي چې که یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي وي او د مرتبو جوړو دویمې مختصې یې تکرار شوې نه وي، نو دا ډول تابع معکوس منوونکې وي (معکوس یې هم یوه تابع ده) او که د مرتبو جوړو دویم عناصر یې تکرار شوي وي، تابع معکوس پذیره نه ده، یا دا چې یوازې یو په یو تابع معکوس منونکې ده، ددې مفهوم د وضاحت لپاره دې محترم ښوونکي د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره لومړی او دویم مثال حل کړي. له دې وروسته چې زده کوونکو د یو په یو تابع تعریف زده کړ، دریم مثال دې حل شي او د (113) مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې کار وکړي او خپل کار دې نورو ته توضیح کړي. ددې لپاره چې زده کوونکي د ګراف له مخې د یو په یو تابع وپېژني، محترم ښوونکي دې څلورم مثال د چارت له مخې او یا په شکل کې د تختې پر مخ کار کړي او د معکوسې تابع له تعریفولو څخه وروسته دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره پنځم، شپږم او اووم مثال حل کړي لومړی زده کوونکو ته د تابع او د هغې د معکوسې تابع د ګراف اړیکه واضح کړي، بیا د چارت له مخې او یا پر تخته نهم او لسم مثال حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

د لوست د زده کړې د پیاوړتیا لپاره باید لاندې پوښتنه حل شي که $f(x) = 0.2x + 0.4$ وي

د f(x) معکوسه تابع پیدا کړئ.

حل: $f^{-1}(x) = \frac{x - 0.4}{0.2}$ یا $f^{-1}(x) = 5x - 2$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

وښایاست چې ایا د $F(x) = \frac{5}{2x-4}$ او $g(x) = \frac{4x+5}{2x}$ یو د بلې معکوسې تابعګانې دي؟

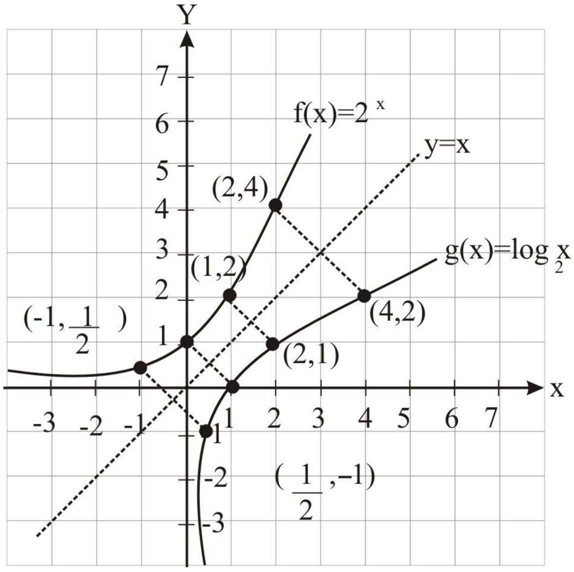
د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- لاندې جملې معادلې دي:

- د F د تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- F یوه یو په یو تابع ده.
- افقي خط د F د تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- $\forall x \in dom\,F(x)$ $\forall x \in dom\,F^{-1}$: $F(F^{-1}(x)) = F^{-1}(f(x)) = x$
- د F او $F^{-1}(x)$ د تابعګانو ګرافونه نظر د $y = x$ له مستقیم خط ته سره متناظر دي.

2- که $F(x) = 2^x$ او $g(x) = \log_2 x$ وي چې یوه د بلې معکوسې تابعګانې دي

حل:



x	0	1	−1	−2	2
f(x)	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	4

x	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	4
g(x)	0	1	−1	−2	2

چې ګرافونه یې د y=x خط ته سره متناظر دي.

$(g^{-1}oF^{-1}) = (fog)^{-1}$

3- د يوې تابع ترکيب د هغې له معکوسې تابع سره:

$$f(x)=mx+b \Rightarrow y=mx+b$$

$$x=my+b \Rightarrow y=\frac{x-b}{m} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{m}x-\frac{b}{m}$$

$$(f^{-1}of)(x)=f^{-1}(mx+b)=\frac{1}{m}(mx+b)-\frac{b}{m} \Rightarrow x+\frac{b}{m}-\frac{b}{m}=x$$

$$(fof^{-1})(x)=f(\frac{1}{m}x-\frac{b}{m})=m(\frac{1}{m}x-\frac{b}{m})+b \Rightarrow x-b+b=x$$

4- د $f(x)=1-x^2$ او $f(x)=x^4$ تابعگانو معکوس، تابعگاني نه دي ليکن د

$f(x)=2x^3, h(x)=-\frac{1}{3}x+5, g(x)=\frac{7-2x}{5}, h(x)=\frac{3}{x}$ او $f(x)=x^5$ معکوس هم تابعگانې دي.

د پوښتنو ځوابونه

1- د لاندينيو تابعگانو معکوس پيدا کړي ا و ووایاست چې د کومې تابع معکوس يوه تابع ده؟

$f=\{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\}$

حل:

$f^{-1}=\{(0,-1),(1,-2,(3,4),(4,3)\}$

پس f^{-1} تابع ده.

$g=\{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

حل:

$g^{-1}=\{(2,1),(3,2),(2,3),(1,4)\}$

ليدل کيږي چې g^{-1} تابع نه ده ځکه د 2 د عدد لپاره د وه تصويرونه موجود دي.

$h=\{(1,4),(2,3),(4,1)\}$

$h^{-1}=\{(4,1),(3,2),(1,4)\}$

نو h^{-i} هم يوه تابع ده.

$k=\{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$

حل:

$k^{-1}=\{(0,3),(-1,2),(2,1),(1,0),(2,-1)\}$

ليدل کيږي چې k^{-1} تابع نه ده، ځکه چې د 2 عدد د دوو عددونو 1 او 1- سره اړيکه لري.

2- د لاندې هرې تابع معکوسه تابع پيدا کړئ او خپل ځواب د $f(f^{-1}(x))=x$ سره پرتله کړئ.

$f(x)=x+3$

حل:که $y=x+3$ وي معکوس يې

$y = f(x) = x + 3$

$y = x + 3 \Rightarrow x = y - 3 \Rightarrow y = x - 3$

$f^{-1}(x) = x - 3$

$f(f^{-1}(x)) = f(x-3) = x - 3 + 3 = x$

• $f(x) = 2x$

$y = 2x \Rightarrow x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x}{2}) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$

• $f(x) = 2x + 3$

$y = 2x + 3 \Rightarrow x = 2y + 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x-3}{2}) = 2(\frac{x-3}{2}) + 3 = x$

• $f(x) = x^3 + 2$

$y = x^3 + 2 \Rightarrow x = y^3 + 2 \Rightarrow y^3 = x - 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x-2}) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2 = x - 2 + 2 = x$

• $f(x) = (x+2)^3$

$y = (x+2)^3 \Rightarrow x = (y+2)^3 \Rightarrow y + 2 = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x} - 2$

$y = \sqrt[3]{x} - 2 \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 2$

$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x-2}) = (\sqrt[3]{x} - 2 + 2)^3 = x$

• $f(x) = \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

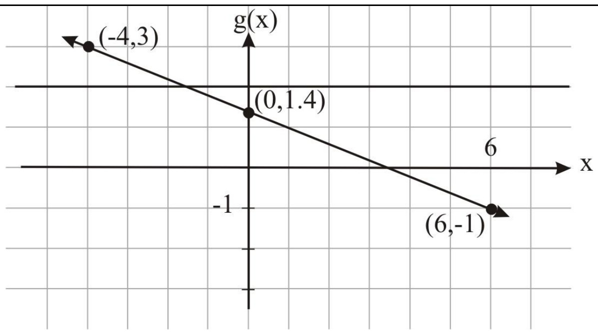
$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

3-د لاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ ا و د x له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښایاست چې معکوس یې تابع ده او که نه؟

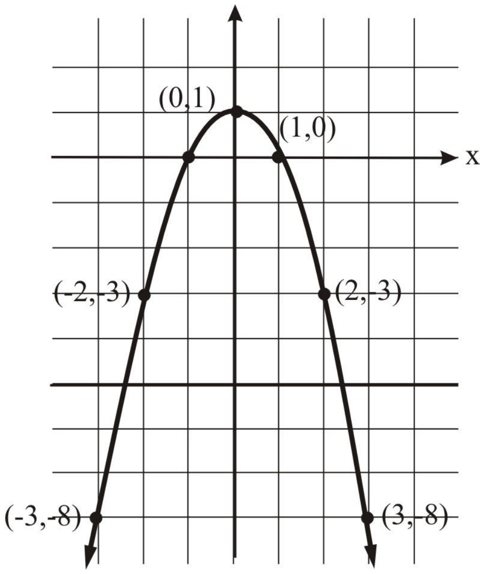
$g(x) = \frac{7-2x}{5} \qquad f(x) = 1 - x^2$

حل:



$f(x) = 1 - x^2$

څرنګه چې افقي خط د تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کړی دی، نو معکوس یې هم تابع ده.



څرنګه چې افقي خط د تابع ګراف په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو معکوس یې تابع نه ده.

4- له لاندنیو تابعګانو څخه کومه یوه یو په یو تابع ده؟

$a)\quad y = 4x - 5 \qquad b)\quad y = 6 - x \qquad c)\quad y = (x-2)^2$

$d)\quad y = 9 \qquad e)\quad y = \dfrac{1}{x+2}$

حل: د a او b، تابعګاني یو په یو تابعګاني دي ځکه چې:

$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b) \qquad a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

c: $y = (x-2)^2$ یو په یو تابع نه ده ځکه چې:

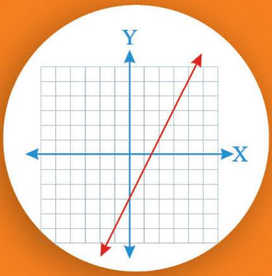
$4 \neq 0 \qquad \begin{matrix} f(4) = 4 \\ f(0) = 4 \end{matrix} \Rightarrow f(4) = f(0)$

d: $y = 9$ یو په یو تابع نه ده.

$-2 \neq 3 \qquad \begin{matrix} f(-2) = 9 \\ f(3) = 9 \end{matrix}$

e: یو په یو تابع ده ځکه چې:

که $f(a) \neq f(b) \Leftarrow a \neq b \Rightarrow \dfrac{1}{a+2} \neq \dfrac{1}{b+2} \Rightarrow a+2 \neq b+2 \Rightarrow f(a) \neq f(b)$



پولینومي تابعګانې

د درسي کتاب (119)مخ **د لوست وخت (3 درسي ساعتونه)**

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د لومړۍ او دویمه درجه تابعګانو د ګراف د رسمولو طریقه زده کړي. • د x او y له محورونو سره د لومړۍ او دویمې درجې تابعګانو د تقاطع د ټکو د وضعیه کمیاتو د پیدا کولو طریقه زده کړي. • د دویمې درجې تابع د ګراف اعظمي او اصغري نقطو وضعیه کمیات پیدا کړای شي. • د دویمې درجې تابع د ګراف د تناظر د محور معادله پیدا کړای شي. • د دویمې درجې تابعګانو په ګرافونو کې عمودي، افقي او د انتقالونو ترکیب تطبیق کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حل کې د دویمو درجو تابعګانو د ګرافونو اهمیت درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او ...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشیر، چارت او... .
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، د ورودي پوښتنه دې له زده کوونکو وپوښتل شي او ورته واضح شي چې: څرنګه چې د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی، نو له همدې سببه ورته خطي تابع هم وايي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په وړاندې اخیستنه سره لومړی او دویم مثال حل کړي او ګرافونه یې پر تخته رسم کړي، د x او y له محورونو سره د لومړۍ درجې تابع ګراف د تقاطع نقطو د وضعیه کمیاتو د پیدا کولو طریقه توضیح کړي. د دویمې درجې تابع عمومي شکل (معیاري شکل) ولیکئ.

او د ساده دویمو درجو تابعګانو $F(x)=x^2$ او $F(x)=-x^2$ ګرافونه پر تخته رسم کړئ، تر څو زده کوونکي په دې پوه شي چې د دویمې تابع د ګراف خو له څه وخت پورته ا و څه وخت ښکته خواته خلاصیږي. محترم ښوونکي دې لومړی مثال حل کړي او ګراف یې پر چارت او یا پر تخته رسم کړئ او په شکل کې وښایاست چې ګراف په کوم انټروال کې متزاید ا و په کوم انټروال کې متناقص دی. په همدې ډول د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره دې دویم، دریم، څلورم او پنځم مثالونه حل شي او د x ا و y له محورونو سره د پارابول د تقاطع نقطو د وضعیه کمیاتو د پیدا کولو طریقه توضیح شي. ددې لپاره چې د راس نقطې د وضعیه کمیاتو د پیدا کولو طریقه د تکمیل مربع ا و فورمول په واسطه او د تناظر د محور د معادلې د پیدا کولو طریقه واضح شي، د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره شپږم او اووم مثال دې حل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

د $y = 6x^2 - x - 12$ او $y = x^2 + 3x - 2$ د ګرافونو د راس نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د $F(x) = 3 + 5x + \frac{1}{3}x^2$ او $F(x) = 3x^2 + 5x$ تابعګانو د ګرافو د تناظر د محور معادلې پیدا کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د دویمې درجې تابع درې شکلونه (Three forms of quadratic funtions)

که t, k, h, c, b, a او s حقیقي عددونه او $a \neq 0$ وي.

1- Transformation form شکل له $F(x) = a(x-h)^2 + k$ څخه عبارت دی.

2- Polynomial form شکل له $F(x) = ax^2 + bx + c$ څخه عبارت دی.

3- X-Intercept form شکل له $F(x) = a(x-s)(x-t)$ څخه عبارت دی.

که $a > 0$ وي د پارابولا خوله پورته خواته او که $a < 0$ وي، د پاراپولا خوله ښکته خواته خلاصیږي.

1- د Transformation شکل: په عمومي ډول د راس (vertex) د وضعیه کمیاتو د پیداکولو لپاره په کار وړل کیږي.

په $F(x) = a(x-h)^2 + k$ کې د راس وضیعه کمیات (h,k) دي ا و د ګراف د تقاطع ټکې وضعیه کمیات د y، له محور سره $F(0) = a(0-h)^2 + k = ah^2 + k$ چې $(0,k)$ دي، د x له محور سره د تقاطع په ټکې کې $y = 0$ کیږي.

$$a(x-h)^2 + k = 0 \;\Rightarrow\; a(x-h)^2 = -k$$

$$(x-h)^2 = -\frac{k}{a} \;\Rightarrow\; x - h = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}}$$

$$x = h \pm \sqrt{\frac{-k}{a}}$$

د x له محور سره د تقاطع د نقطو وضیعه کمیات $(h - \sqrt{\frac{-k}{a}}, 0)$ او $(h + \sqrt{\frac{-k}{a}}, 0)$ دي.

مثال: $F(x) = 2(x-3)^2 + (-4)$ $\quad k = -4 \quad , \quad h = 3$ او $a = 2$ دی.

د پارابول د راس د ټکي وضعیه کمیات $(h,k) = (3,-4)$ دي.

د y له محور سره د تقاطع د ټکي وضعیه کمیات له $ah^2 + k = 2(3^2) - 4) = 14$ څخه عبارت دی چې ګراف د (0.14) په نقطه کې د y محور قطع کوي.

د x له محور سره تقاطع عبارت ده له: $h - \sqrt{\frac{-k}{a}} = 3 - \sqrt{2} \approx 1.6 \qquad h + \sqrt{\frac{-k}{a}} = 3 + \sqrt{2} \approx 4.4$

2- پولینومي شکل په عمومي ډول د y او x له محورونو سره د ګراف د تقاطع د ټکو د وضعیه کمیاتو د پیداکولو لپاره په کاروړل کیږي.

د y له محور سره تقاطع: $F(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c$

د X له محور سره تقاطع: $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ او $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ په هغه صورت کې چې $b^2 - 4ac \geq 0$

وي.

د راس د پیدا کولو لپاره:

$$\frac{-b}{2a}=h$$

چې h د راس نقطې د x مختصه ده، په نتیجه کې د راس د ټکی وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})\right)$$

$$F(x)=a(x-h)^2+k$$

$$F(x)=ax^2-2ahx+ah^2+k \quad \Rightarrow \ b=-2ah$$

$$h=-\frac{b}{2a} \quad \text{راس} \ (\frac{b}{2a}), F(-\frac{b}{2a})$$

3- د X-intercept: شکل $f(x)=a(x-s)(x-t)$ چې s او t د $F(x)=0$ د معادلې حلونه دي.

$$F(s)=a(s-s)(s-t)=a(0)(s-t)=0$$

$$F(t)=a(t-s)(t-t)=a(t-s)(0)=0$$

د y له محور سره تقاطع $f(0)$ څخه عبارت ده: $F(0)=a(0-s)(0-t)=ast$

نو د y له محور سره تقاطع له (ast) څخه عبارت ده، څرنګه چې پارابول د y له محور سره متناظر دی، نو د راس د نقطې x عبأرت له $(\frac{s+t}{2})$ څخه دي او د راس د نقطې د y قیمت د $f(\frac{s+t}{2})$ دی.

مثال:که $f(x)=-\frac{1}{2}(x-4)(x+2)$ وي، د راس د نقطې وضعیه کمیات، د x او y له محورونو سره د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړي او ګراف یې رسم کړئ.

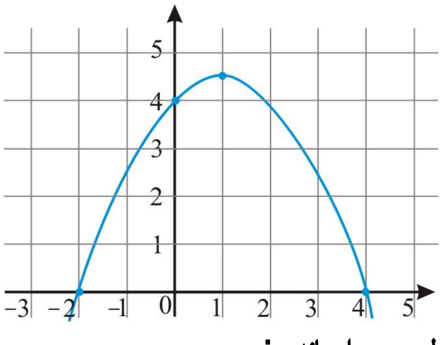
حل:

$$a=-\frac{1}{2} \quad , \quad t=-2 \quad , \quad s=4$$

د y له محور سره تقاطع عبارت ده له:

$$ast=-\frac{1}{2}(4)(-2)=4$$

د راس د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له: $f(\frac{s+t}{2})=f[(\frac{4-2}{2}), \ f(\frac{-2}{2})]=(1,4.5)$



د دویمې درجې د تابعګانو د شکلونو بدلول یو پر بل باندې:

مثال: د امکان په صورت کې لاندې دویمه درجه تابعګانې پولینومې او X-intercept شکل ته تبدیلې کړئ.

a) $f(x)=0.4(x-3)^2+2$ b) $g(x)=3x^2-3.9x-43.2$

c) $h(x)=-2(x-4)(x+2)$

حل a: غواړو چې پولينومي شکل ته يې واړوو:

$$f(x)=0.4(x-3)^2+2=0.4x^2-2.4x+5.6$$

په نتيجه کې $b^2-4ac=-3.2$ کيږي

څرنګه چې د x محور نه قطع کوي، نو د X-intercept په شکل يې نه شو ليکلای.

b: څرنګه چې دا دويمه درجه تابع په پولينومي شکل راکړل شوي ده، غواړو چې د X-intercept په شکل يې وليکو

څرنګه چې a=3 دی نو:

$g(x)=3x^2-3.9x-43.2$

$g(x)=3(x^2-1.3x-14\cdot 4)$

$$\frac{1.3\pm\sqrt{(-1.3)^2-4(1)(-14.4)}}{2}=\frac{1.3\pm 7\cdot 7}{2}=4.5 \text{ او } -3.2$$

نو د X-intercept شکل يې عبارت دی له $g(x)=3(x-4.5)(x+3.2)$

c: د $h(x)$ تابع د X-intercept په شکل راکړل شوي ده. غواړو چې پولينومي شکل ته يې واړوو:

$h(x)=-2(x-4)(x+2)$

$h(x)=-2(x^2-2x-8)=-2x^2+4x+16$

مثال: لاندې تابعګانې د Transformation شکل ته واړوئ.

a) $f(x)=-3x^2+4x-1$ b) $g(x)=0.3(x-2)(x+1)$

$$f(x)=-3x^2+4x-1=-3(x^2-\frac{4}{3}x)-1=-3(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9})-1$$

$$=-3[(x-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{9}]-1=-3(x-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{3}-1 \quad , \quad f(x)=-3(x-\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}$$

:b

$$g(x)=0.3(x-2)(x+1)=0.3(x^2-x-2)=0.3(x^2-x+0.25-0.25-2)=0.3[(x-0.5)^2-2.25]$$

$$g(x)=0.3(x-0.5)^2-0.675$$

د دويمې درجې تابعګانو د شکلونو لنډيز:

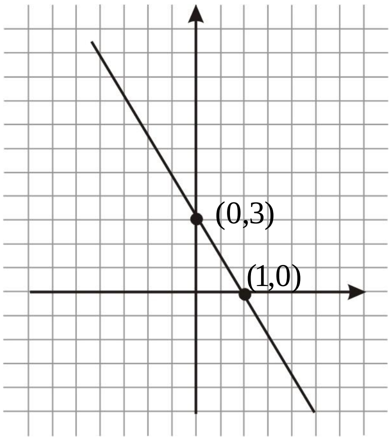
د شکل نوم	Transformation	Polynomail	x-intercept
راس	$f(x)=a(x-h)^2+k$ (h,k)	$f(x)=a^2+bx+c$ $[\frac{-b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})]$	$f(x)=a(x-s)(x-t)$ $[\frac{s+t}{2}, f(\frac{s+t}{2})]$
د x له محور سره تقاطع	$h+\sqrt{\frac{-k}{a}}$ او $h-\sqrt{\frac{-k}{a}}$	$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	S و t
د y له محور سره تقاطع	ah^2+k	c	ast

د پوښتنو ځوابونه

1 − د $h(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ د تابع گراف رسم کړئ.

حل: ددې تابع گراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د مستقیم خط دوې نقطې پیدا کړو او سره وصل شي.

x	0	1
$h(x)$	3	0

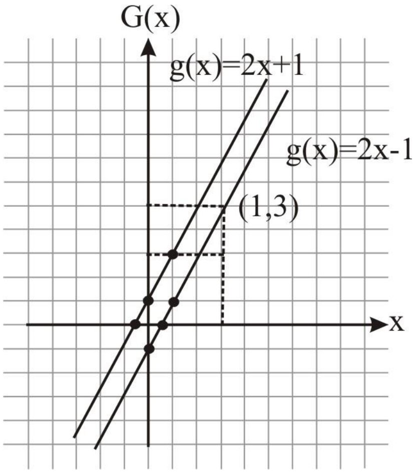


2 − د $g(x) = 2x + 1$ او $g(x) = 2x - 1$ تابعگانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او سره پرتله یې کړئ.

حل:

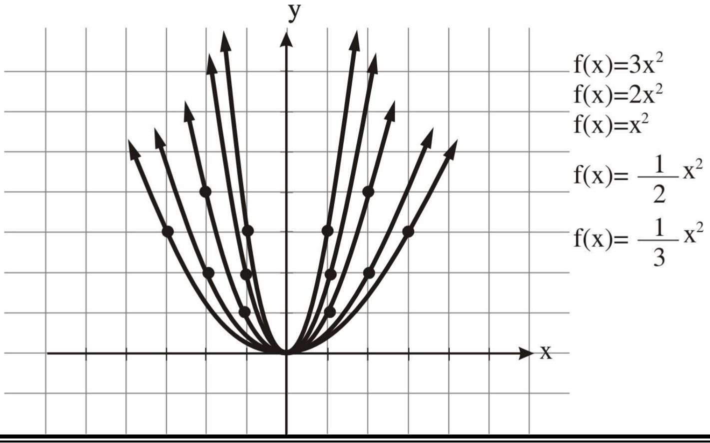
x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g(x$	-1	0	1

x	0	$-\frac{1}{2}$	1
$y(x)$	1	0	3



3-د $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x^2$, $f(x) = 3x^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ او $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ تابعگانو گرافونه د وضعیه کمیات په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

حل:



x	0	3	-3
$f(x)=\frac{1}{3}x^2$	0	3	3

x	0	1	2	3	-2	-3
$f(x)=\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2	4.5	2	4.5

x	0	1	-1	1.5
$f(x)=3x^2$	0	3	3	6.75

x	0	1	-1	1.5
$f(x)=2x^2$	0	2	2	4.5

4 − د لاندې تابعگانو د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

a: $f(x)=x^2+8x+13$ b: $f(x)=x^2-12x+30$ c: $f(x)=3x^2-2x+6$

د a حل: $x=-4$ $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{2}=-4$

b: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-12)}{2}=6\Rightarrow x=6$ c: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$

5 − د $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x-3)^2$ د تابعگانو گرافونه رسم کړئ او ووایاست چې د $f(x)=x^2$ د تابع له گراف سره څه اړیکه لري؟

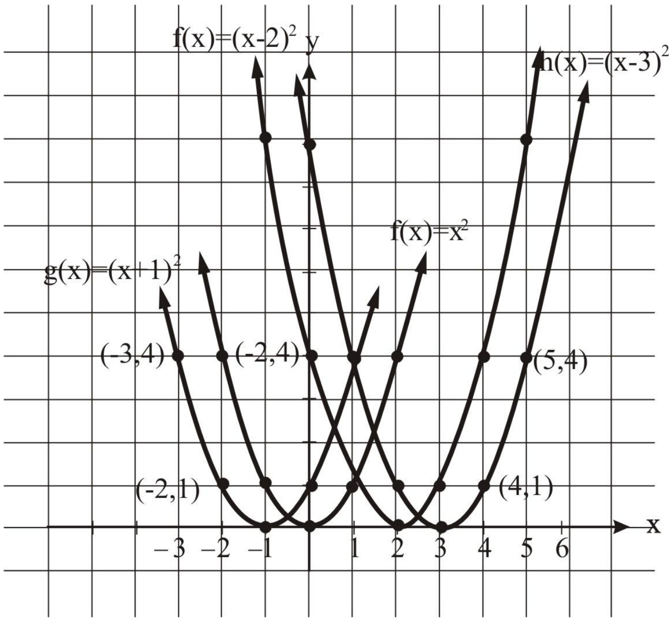
حل:

x	$(x+1)^2$
1	4
0	1
-1	0
-2	1
-3	4

x	$(x-3)^2$
5	4
4	1
3	0
2	1
1	4
0	9

x	$(x-2)^2$
5	9
4	4
3	1
2	0
-1	9

x	x^2
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4



د $f(x)=x^2$ د تابع گراف د2 واحدونو په ا ندازه ښي خواته انتقال کړي دي، د $f(x)=(x-2)^2$ د تابع گراف لاس ته راغلی دی او د $f(x)=x^2$ د تابع گراف د یو واحد په اندازه یې کیڼې خواته انتقال کړي دي، د $g(x)$ د تابع گراف او د

$f(x)=x^2$ د تابع ګراف د 3 واحدونو په اندازه ښې خواته انتقال کړي دی د h(x) د تابع ګراف لاس ته راغلی دي.

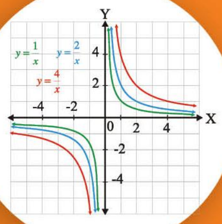
6 – د 1 – $y=-x^2$ د تابع دګراف د راس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

a: $(-1,1)$ b: $(1,-1)$ ⓒ $(0,-1)$ d: $(0,1)$

7 – د 2 – $y=(x-1)^2$ تابع د راس نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

a: $(1,-1)$ b: $(-1,2)$ c: $(-1,-2)$ ⓓ: $(1,-2)$

څرنګه چې د $x=1$ لپاره y = –2 کیږي، نو د پارابول د راس د ټکي وضعیه کمیات (1,–2) دي، نو d سم دی.



ناطقې يا نسبتي تابعګانې

ددرسي کتاب (129) مخ د لوست وخت (3 درسي ساعتونه)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • د ناطقو تابعګانو د عمودي مجانب، افقي مجانب او د مايل مجانب تعريفونه زده کړي. • د ناطقو تابعګانو د تعريف ناحيې پيدا کړائ شي. • د ناطقو تابعګانو مجانبونه پيدا کړای شي. • د ناطقو تابعګانو ګرافونه رسم کړای شي. • د ناطقو تابعګانو د ګرافونو په رسمولو کې له مجانبو څخه استفاده وکړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې د ناطقو تابعګانو له ګرافونو څخه ګټه واخيستلای شي. • د رياضي د مسايلو په حل کې د ناطقو تابعګانو د ګرافونو اهميت درك کړای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او ...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشير، چارت او... .
د ورودي برخې توضيح(5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د چارت له مخې او يا د تختې پر مخ د ناطقو تابعګانو ګرافونه وروښودل شي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې

ددې لوست فعاليت د انګيزې د پيداکولو لپاره دی، محترم ښوونکی کولای شي د پوښتنو په برخه کې زده کوونکو ته لارښوونه او ورسره مرسته وکړي. د ناطقې تابع له تعريف او ناطقو تابعګانو دتعريف د ناحيې له پيداکولو وروسته لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ او بيا دې د (130) فعاليت زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي.

ښوونکي دې دويم مثال حل کړي ا و زده کوونکي دې د (131) مخ فعاليت سرته ورسوي، بيا دې ښوونکي په دريم مثال کې د ناطقې تابع د ګراف د رسمولو او د عمودي مجانب د پيداکولو طريقه توضيح کړي ا و د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې څلورم مثال حل کړي. د افقي مجانب د تعريفولو او له محورونو سره د تابع د ګراف د تقاطع ټکو د وضعيه کمياتو د پيداکولو له طريقې وروسته دې پنځم او شپږم مثالونه حل کړي.

يو زده کوونکي دې د تختې پر مخ د (135) مخ د فعاليت اړونده ګراف رسم کړي، محترم ښوونکي دې د مايل مجانب له تعريفولو وروسته د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره اووم او اتم مثالونه حل کړي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې

د $F(x)=\dfrac{3x-6}{5-2x}$ د ناطقې تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې

د $g(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ او $h(x)=\dfrac{2x^3-x}{x^3+1}$ ناطقو تابعګانو عمودي او افقي مجانبونه پيدا کړئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د ناطقو تابعګانو د تعريف ناحيه: که $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ وي چې $Q(x)\neq 0$ دی، له R څخه هر x چې $Q(x)\neq 0$ وي د $f(x)$ د تابع د تعريف ناحيه ده، که د تعريف ناحيه په D_f سره وښايو.

$D_f=\{x/x\in R:Q(x)\neq 0\}$

د موضوع د وضاحت لپاره لاندې مثالونو ته پاملرنه وکړئ.

مثال: د $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ او $h(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$ تابعګانو د تعريف ناحيې وټاکئ.

$x-1=0\Rightarrow x=1 \qquad D_g=R-\{1\}$

$x=0\Rightarrow D_h=R-\{0\}$

مثال: د $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+6}$ د تابع د تعريف ناحيه وټاکئ.

$x^2+x+6=0\Rightarrow (x+3)(x-2)=0\Rightarrow x=-3$ يا $x=2$

$D_f=R-\{-3,2\}$

- د $g(x)=\dfrac{x+2}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ د تابع د تعريف ناحيه وټاکئ.

$x(x+1)(x+2)(x+3)=0\Rightarrow x=0$ يا $x=-1$ يا $x=-2$ يا $x=-3$

$D_g=R-\{0,-1,-2,-3\}$

بايد پام مو وي، د تعريف د ناحيې له ټاکلو له مخه نه شو کولای چې $(x+2)$ له صورت او مخرج څخه اختصار کړو خو د تعريف ناحيې له ټاکلو وروسته البته دا کار کولای شو.

- د $h(x)=\dfrac{x}{x^3-x}$ د تابع د تعريف ناحيه وټاکئ.

$x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0$ يا $x=-1$ يا $x=1$

$D_h=R-\{0,-1,1\}$

2- د ناطقو يا کسري تابعګانو د تعريف او قيمتونو د ناحيو پيدا کول:

څرنګه چې په $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ چې $P(x)$ او $Q(x)$ پولينومونه دي، $Q(x)\neq 0$ او $Q(x)$ ثابت عدد نه دي، د تعريف د ناحيې د ټاکلو لپاره د مخرج جذرونه (ريښې) پيدا کوو، له حقيقي عددونو څخه يې کموو او د قيمتونو د ناحيو ټاکل ځينې وختونه چې د حدونو درجې يې لوړې وي، امکان نه لري، ليکن د ځينو تابعګانو کولای شو چې په مختلفو طريقو سره يې په لاس راوړو.

مثال: د $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ د تعريف او قيمتونو ناحيې وټاکئ.

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$D_f = R-\{-1\}$

$y=\frac{2x}{x+1} \Rightarrow xy+y=2x \Rightarrow xy-2x=-y$

$x(y-2)=-y \Rightarrow x=\frac{y}{2-y}$

$R_f = R-\{2\}$

مثال: د $y=\frac{1}{x^2-2x}$ د تعریف او قیمتونو ناحیې په لاس راوړئ.

حل:

$x^2-2x=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=2$

$D=R-\{0,2\}$

$yx^2-2xy=1 \Rightarrow yx^2-2xy-1=0$

$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+y}}{y} \qquad y^2+y\geq 0 \Rightarrow y(y+1)\geq 0$

$\Rightarrow y\leq -1$ یا $y\geq 0$

د قیمتونو په ناحیه کې صفر شامل نه دی، ځکه که چیرې د $y=\frac{1}{x^2+2x}$ تابع کې د y پر ځای صفر کېږدو، د x له پاره کوم ځواب پر لاس نه راځي.

$R=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

مثال: د $y=\frac{x-1}{2x+3}$ د حقیقي تابع د تعریف او قیمتونو ناحیې وټاکئ.

$2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \qquad D=R-\{-\frac{3}{2}\}$

$y=\frac{x-1}{2x+3} \Rightarrow 2xy+3y=x-1 \Rightarrow (2y-1)x=-3y-1$

$x=\frac{-3y-1}{2y-1} \qquad 2y-1\neq 0 \Rightarrow y\neq\frac{1}{2}$

$Range=R-\{\frac{1}{2}\}$

ځکه چې x یو حقیقي عدد دی.

مثال: د $f(x)=\frac{x^{50}-x}{x-x^{50}}$ د تابع د تعریف او قیمتونو ناحیې وټاکئ.

$x-x^{50}=0 \Rightarrow x(1-x^{49})=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=1$

$D_f = R-\{0,1\}$

$y=\frac{x^{50}-x}{x-x^{50}}=\frac{x^{50}-x}{-(x^{50}-x)}=-1$

$R_f=\{-1\}$

چې دا یوه ثابته تابع ده.

3- د ناطقو تابعګانو دګراف رسمول (Graphing Rational Functions):

1- د تابع مخرج مساوي په صفر کړئ او که د x=a لپاره د تابع مخرج صفر شي، نو x=a د تابع عمودي مجانب دی.

2- نور مجانبونه ولټوئ چې لاندې درې حالتونه امکان لري.

a –که د صورت درجه د مخرج له درجې څخه کمه وي، په دې حالت کې y=0 د تابع افقي مجانب دی.

b- که صورت درجه له مخرج سره مساوي وي یا د تابع شکل په لاندې ډول وي

$$f(x)=\frac{a_nx^n+...a_0}{b_nx^n+...+b_0}$$

نو $y=\frac{a_n}{b_n}$ یو افقي مجانب دی.

c- که د صورت درجه د یو په ا ندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو ښکاره خبره ده چې افقي مجانب نه لري، خو مایل مجانب لري چې که صورت پر مخرج وویشو، مایل مجانب پر لاس راځي.

3- له محورونو سره یې د تقاطع ټکي پیدا کړئ.

4- یو څو نورې نقطې هم پیدا کړئ.

5- ګراف یې رسم کړئ.

د پوښتنو ځوابونه

1 – د $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-4}$ د تابع عمودي او افقي مجانبونه پیدا کړئ.

حل: $x=2$, $x=-2$ عمودي مجانبونه دي

$x^2-4=0\Rightarrow x=2$, $x=-2$

ځکه چې د $x=-2$ او $x=2$ په قیمتونو د تابع مخرج صفر کیږي.

افقي مجانب: څرنګه چې د صورت او مخرج درجې سره مساوي دي، نو د صورت او مجرج د لوړو درجو د ضریبونو نسبت یې افقي مجانب دی، یعنې $y=\frac{3}{1}\Rightarrow y=3$

2 – ایا د $f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري، ولې؟

حل: څرنګه چې د x په هیڅ قیمت د تابع مخرج نه صفر کیږي، نو تابع عمودي مجانب نه لري.

3 – د لاندنیو تابعګانو د تعریف ناحیې پیدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې یې هم ولیکئ.

$a: f(x)=\frac{5x}{x-4}$ $\quad b: g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}$ $\quad c: h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}$ $\quad d: k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$

د a حل: $dom\ f(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 4\}$ او د عمودي مجانب معادله یې د $x=4$ مستقیم خط دی.

د b حل: $dom\ g=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 5,\ x\neq -4\}$ او د عمودي مجانبونو معادلې یې $x=5$ او $x=-4$ دي دوه عمودي مجانبونه لري.

د c حل:

$x^2 - 49 = 0 \qquad x = \pm 7$

$dom\, h = \{x / x \in IR\ ,\ x \neq -7\ ,\ x \neq 7\}$

د تابع د عمودي مجانبونو معادلې $x = 7$ او $x = -7$ دي.

د d حل: څرنگه چې په حقيقي عددونو کې د x په هر قيمت د تابع مخرج نه صفر کيږي، نو تابع عمودي مجانب نه لري $dom\, k = IR$.

4 – د لاندينيو تابعگانو عمودي مجانبونه که يې ولري پيدا کړې.

$a:\ f(x) = \dfrac{x}{x+4} \qquad b:\ g(x) = \dfrac{x+3}{x(x+4)} \qquad c:\ h(x) = \dfrac{x}{x(x+4)} \qquad d:\ k(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

د a حل: د $x = -4$ مستقيم خط د $f(x)$ تابع عمودي مجانب دی.

دb حل: د $x = 0$ او $x = -4$ مستقيم خطونه د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

د c حل: د $x = 0$ او $x = -4$ مستقيم خطونه د $h(x)$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

د d حل: د $k(x)$ تابع عمودي مجانب نه لري، ځکه د x په هر قيمت د تابع مخرج نه صفر کيږي.

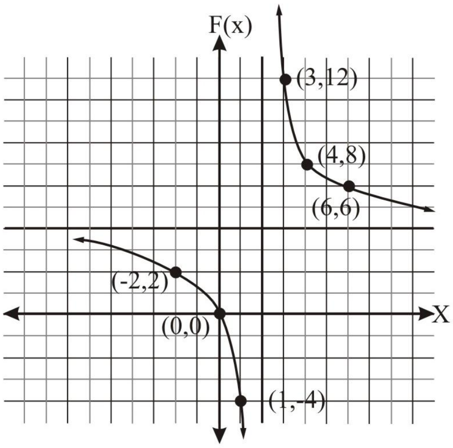
5 – د لاندې ناطقو تابعگانو گرافونه رسم کړئ.

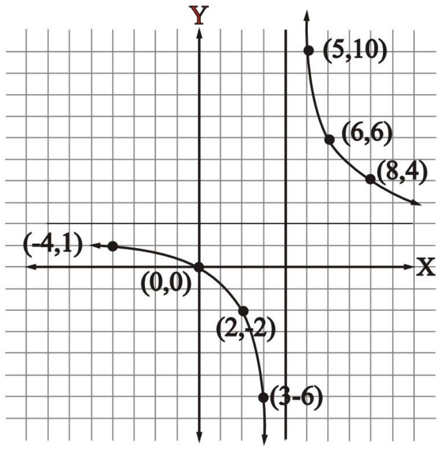
$a:\ y = \dfrac{4x}{x-2}$

x	0	−2	6	4	10	1	3
f(x)	0	2	6	8	5	−4	12

$b:\ g(x) = \dfrac{2x}{x-4}$

x	0	2	−4	2	12	8	6	5	3
g(x)	0	−2	1	−2	3	4	6	10	−6





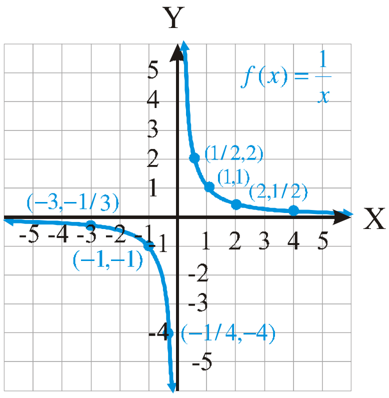
6- د $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-3}$ د تابع افقي مجانب عبارت دی له:

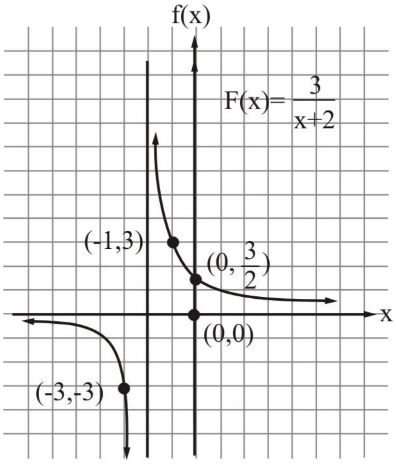
a: $y = 2$ (b:) $y = 3$

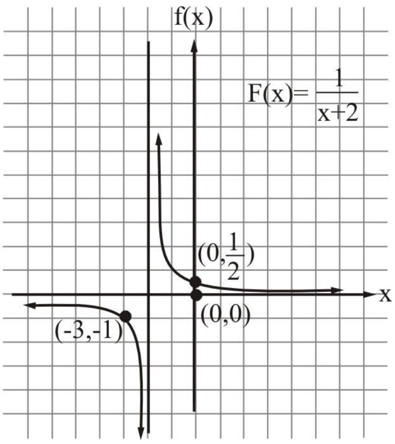
c: $y = -2$ d: $y = -3$

د $y = 3$ مستقيم خط د تابع افقي مجانب دی، نو b سم دی.

7- د $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ او $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ د تابعگانو گرافونه رسم او د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ د تابع له گراف سره يې پرتله کړئ.







x	0	−1	−3	−4
$f(x)=\frac{1}{x+2}$	$\frac{1}{2}$	1	−1	$-\frac{1}{2}$

x	0	−1	−3
$f(x)=\frac{3}{x+2}$	$\frac{3}{2}$	3	−3

8- د $y=\frac{x^2}{x-1}$ د تابع مایل مجانب پیدا کړئ.

د $y=x$ مستقیم خط د تابع مایل مجانب دی.

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کومه یوه یې تابع ښیې ؟

د تعریف او قیمتونو ناحیې یې وټاکئ.

$a -\quad \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

$b -\quad \{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

$c -\quad \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

$d -\quad \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

د a حل: یوه تابع ده، ځکه چې د Domain هر عنصر د Range له یوه عنصر سره اړیکه لري.

$dom = \{1,3,5\}\ ,\ Range = \{2,4,5\}$

د b حل : یوه تابع نه ده، ځکه د 3 او 4 عددونه دوه تصویرونه لري.

$dom = \{3,4\}\quad Range = \{4,5\}$

د c حل : یوه تابع ده.

$dom = \{-3,-2,-1,0\}\quad Range = \{-3,-2,-1,0\}$

د d حل : یوه تابع نه ده، ځکه چې د 1 عدد د Range له دریو عنصرونو سره اړیکه لري:

$dom = \{1\},\ Range = \{4,5,6\}$

2- که $g(x) = x^2 + 2x + 3$ وي، $g(-1)$، $g(-x)$ او $g(x+5)$ پیدا کړئ.

حل:

$g(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$

$g(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 3 = x^2 - 2x + 3$

$g(x+5) = (x+5)^2 + 2(x+5) + 3 = x^2 + 10x + 25 + 2x + 10 + 3 = x^2 + 12x + 38$

3- که $h(x) = x^4 + x^2 + 1$ وي، $h(-x), h(-1), h(2)$ او $h(3a)$ پیدا کړئ.

حل: دریمه پوښتنه د دویمې پوښتنې په شان حل کیږي، د x پر ځای یې قیمت وضع کوو.

4- د لاندینیو تابعګانو د تعریف ناحیې پیدا کړئ.

$a:\quad f(x) = 2x \qquad dom\,f = IR$

$b:\quad f(x) = (x-3)^{\frac{1}{2}} \qquad dom\,f = [3,+\infty)$

$c:\quad f(x) = \sqrt{16 - x^2} \qquad 16 - x^2 \geq 0 \ \Rightarrow\ (4-x)(4+x) \geq 0$

$dom\,f = \{x / x \in IR\ ,\ -4 \leq x \leq 4\} = [-4,4]$

$d:\ f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4} \quad dom\,f = \{x / x \in IR\ ,\ x \neq 2, x \neq -2\}$

یا د انټروال په شکل:

$(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$

یا:

$IR \setminus \{-2,2\}$

$e: \quad f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}} \quad , \quad dom\ f = IR$

$f: \quad f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

$dom\ f=\{x/x^2-4x-5\ge 0,\ \ x\le -1,\ x\ge 5\}=(-\infty,-1]\cup[5,\infty)$

5- که $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \ x<0 \\ 4x+7 & : \ x\ge 0 \end{cases}$ وي، $f(0), f(3)$ او $f(-2)$ پیدا کړئ.

حل:

$f(0)=4\cdot 0+7=7$

$f(3)=4\cdot 3+7=19$

$f(-2)=-2+3=1$

6- که $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \ x\ge -3 \\ -(x+3) & : \ x<-3 \end{cases}$ وي، $g(-6), g(0)$ او $g(-3)$ پیدا کړئ.

حل:

$g(0)=0+3=3$

$g(-6)=-(-6+3)=6-3=3$

$g(-3)=-3+3=0$

7- که $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : \ x\ne 3 \\ 6 & : \ x=3 \end{cases}$ وي، $h(0), h(3)$ او $h(5)$ پیدا کړئ.

حل:

$h(3)=6$

$h(0)=\dfrac{-9}{-3}=3$

$h(5)=\dfrac{25-9}{5-3}=\dfrac{16}{2}=8$

8- له لاندې معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع تعریفوي؟

$a: \quad x+y=16 \qquad b: \quad x^2+y=16$

$c: \quad x^2+y^2=16 \qquad d: \quad x=y^2$

$e: \quad y=\sqrt{x+4} \qquad f: \quad x+y^3=8$

د a حل: د $x+y=16$ معادله یوه تابع تعریفوي، ځکه ې د x د هر قیمت لپاره په Range کې یو تصویر وجود لري.

د b حل: $x^2+y=16 \rightarrow y=16-x^2$ هم یوه تابع ده.

د c حل: $x^2+y^2=16$ یوه تابع نه تعریفوي، ځکه د Domain د هر قیمت لپاره په Range کې د y دوه قمیتونه شته او

دا د یوې دایرې معادله ده چې د y له محور سره موازي خط گراف په دوو نقطو کې قطع کوي.

د d حل: $y^2=x$ یوه تابع نه ده.

د e حل: $y=\sqrt{x+4}$ یوه تابع تعریفوي، ځکه د Domain هر عنصر یا x د Range او یا y له یوه عنصر سره اړیکه لري.

د f حل: $x+y^3=8$ یوه تابع ده، ځکه د Domain هر عنصر د Range له یوه عنصر سره اړیکه لري.

9- په لاندینیو تابعگانو کې کومه یوه جفته، کومه یوه طاقه او کومه یوه نه جفته او نه طاقه ده؟

$a: \quad f(x)=x^4-2x^2+5 \qquad b: \quad f(x)=x^2+2x-1 \qquad c: \quad f(x)=\dfrac{2}{x-6}$

د a حل: $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+5=x^4-2x^2+5$ څرنگه چې $f(-x)=f(x)$ ده نو $f(x)$ جفته ده.

د b حل: $f(-x)=(-x)^2+2(-x)-1=x^2-2x-1$ ښکاره ده چې د f(x) تابع نه جفته ده او نه طاقه.

د c حل: $f(-x)=\dfrac{2}{x-6}=-\dfrac{2}{-x+6}$ دا تابع هم نه جفته ده او نه طاقه.

10- د $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=(x-1)^2$ دتابعگانو گرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له گراف سره يې پرتله کړئ.

$f(x)=x^2$

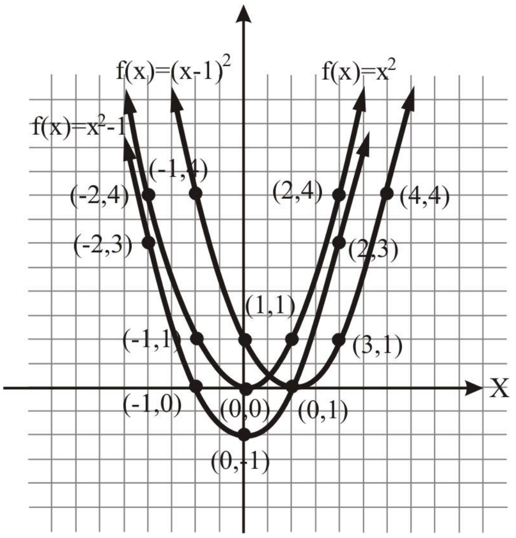
x	0	1	2	-2	-1
$f(x)$	1	1	4	4	1

$f(x)=(x-1)^2$

x	0	1	2	3	-1
$f(x)$	1	0	1	4	4

$f(x)=x^2-1$

x	0	1	2	-1	-2
$f(x)$	-1	0	3	0	3



ليدل کيږي چې که د $f(x)=x^2$ د تابع گراف د يوه واحدپه اندازه په عمودي ډول لاندې خواته انتقال وکړي د $f(x)=x^2-1$ د تابع گراف لاس ته راځي او که په افقي ډول د يوه واحد په اندازه ښي خواته انتقال وکړي د $f(x)=(x-1)^2$ د تابع گراف لاس ته راځي.

11- د لاندینیو تابعگانو $(f+g),(f-g),(f\cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پیدا او د هرې یوې تابع د تعریف ناحیه هم وټاکئ.

$a: \; f(x)=4x-1 \qquad g(x)=6x+3 \qquad b: \; f(x)=\sqrt{2x+5} \qquad g(x)=\sqrt{4x-9}$

$c: \; f(x)=4x^2-11x+2 \qquad g(x)=x^2+5$

د a حل:

$f+g=4x-1+6x+3=10x+2$

$dom(f+g)=dom\, f\cap dog=IR\cap=IR$

$f-g=(4x-1)-(6x+3)=-2x-4$

$dom(f-g)=dom\, f\cap dog=IR\cap IR=IR$

$$f\cdot g=(4x-1)(6x+3)=24x^2+12x-6x-3=24x^2+6x-3$$

$$dom(f\cdot g)=dom f\cap dom=IR\cap IR=IR$$

$$\frac{f}{g}=\frac{4x-1}{6x+3}\quad ,\quad dom(\frac{f}{g})=dom f\cap dom g\setminus\{x/g(x)\neq 0\}$$

$$6x+3=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\quad ,\quad dom\frac{f}{g}=IR\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}=(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2}+\infty)$$

د bحل:

$$f+g=\sqrt{2x+5}+\sqrt{4x-9}$$

$$dom f=\left\{x/2x+5\geq 0\ ,\quad x\geq -\frac{5}{2}\right\}=[-\frac{5}{2},\infty)$$

$$dom g=\left\{x/4x-9\geq 0\ ,\quad x\geq \frac{9}{4}\right\}=[\frac{9}{4},\infty)$$

$$dom(f+g)=\left[\frac{9}{4},\infty\right)$$

$$dom(f-g)=dom f\cap dom g=\left[\frac{9}{4},\infty\right)\qquad (f-g)(x)=\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x-9}$$

$$dom(f\cdot g)=dom f\cap dom g=\left[\frac{9}{4},\infty\right)\qquad (f\cdot g)(x)=\sqrt{8x^2-18x+20x-45}=\sqrt{8x^2+2x-45}$$

$$dom(\frac{f}{g})=(\frac{9}{4},\infty)\qquad (\frac{f}{g})(x)=\sqrt{\frac{2x+5}{4x-9}}$$

د cحل:

$$f+g=(4x^2-11x+2)+(x^2+5)=5x^2-11x+7$$

$dom(f-g)=IR$ يا $(-\infty,\infty)$

$$f-g=(4x^2-11x+2)-(x^2-5)=3x^2-11x+7$$

$dom(f-g)=IR$ يا $(-\infty,\infty)$

$$(f\cdot g)=(4x^2-11x+2)(x^2+5)=4x^4-11x^3+22x^2-55x+10$$

$dom(f\cdot g)=IR$ يا $(-\infty,\infty)$

$$\frac{f}{g}=\frac{4x^2-11x+2}{x^2+5}$$

$$dom f=IR\ \cdot\ dom g=IR\quad ,\quad dom\frac{f}{g}=IR\ (-\infty,+\infty)$$

$dom\frac{f}{g}=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq\sqrt{5}\ ,\ x\neq-\sqrt{5}\}$ يا

12- که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي نو:

$$(f+g)(3)\quad ,\quad (f+g)(-5)\quad ,\quad (f\cdot g)(4)$$

$$(\frac{f}{g})(4)\quad ,\quad (fog)(2)\quad ,\quad (gof)(-5)$$

پیدا کړئ.

حل:

$$f+g=4x^2+6x+1\ ,\ \ (f+g)(3)=36+18+1=55$$
$$(f+g)(-5)=4(-5)^2+6(-5)+1=100-30+1=71$$
$$f\cdot g=(4x^2-2x)(8x+1)=32x^3-12x^2-2x$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{4x^2-2x}{8x+1}\Rightarrow(\frac{f}{g})(4)=\frac{64-8}{32+1}=\frac{56}{33}$$
$$f\,o\,g=f(8x+1)=4(8x+1)^2-2(8x+1)=256x^2+64x+4-16x-2=256x^2+50x+2$$
$$(f\,o\,g)(2)=256\cdot4+50\cdot2+2=1024+100+2=1126$$
$$g\,o\,f=g(4x^2-2x)=8(4x^2-2x)+1=32x^2-16x+1$$
$$(g\,o\,f)(-5)=32(-5)^2-16(-5)+1=800+80+1=881$$

13- $F\ o\ g$ او $g\ o\ f$ پیدا کړئ که:

$a:\quad f(x)=8x+12 \qquad g(x)=3x-1 \qquad\qquad b:\quad f(x)=5x+3 \qquad g(x)=-x^2+4x+3$

$c:\quad f(x)=-x^3+2 \qquad g(x)=4x \qquad\qquad d:\quad f(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=x^2$

$e:\quad f(x)=\sqrt{x+2} \qquad g(x)=8x^2-6$

حل:

$a:\quad (f\,o\,g)(x)=f(3x-1)=8(3x-1)+12=24x+4$

$\qquad (g\,o\,f)(x)=g(8x+12)=3(8x+12)-1=24x+35$

$b:\quad (f\,o\,g)(x)=f(-x^2+4x+3)=5(-x^2+4x+3)+3=-5x^2+20x+15+3=-5x^2+20x+18$

$\qquad (g\,o\,f)(x)=g(5x+3)=-(5x+3)^2+4(5x+3)+3=-25x^2-30x-9+20x+12+3$

$\qquad\qquad =-25x^2-10x+6$

$c:\quad (f\,o\,g)(x)=f(4x)=-(4x)^3+2=-64x^3+2$

$\qquad (g\,o\,f)(x)=g(-x^3+2)=4(-x^3+2)=-4x^3+8$

$d:\quad (f\,o\,g)(x)=f(x^2)=\frac{1}{x^2}$

$\qquad (g\,o\,f)(x)=g(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^2=\frac{1}{x^2}$

$e:\quad (f\,o\,g)(x)=f(8x^2-6)=\sqrt{8x^2-6+2}=\sqrt{8x^2-4}=\sqrt{4(2x^2-1)}=2\sqrt{2x^2-1}$

$\qquad (g\,o\,f)(x)=g(\sqrt{x+2})=8(\sqrt{x+2})^2-6=8x+16-6=8x+10$

14-که $y=f(x)$ وي د $y=f(x)-5$ تابع ګراف د 5 واحدو په اندازه:

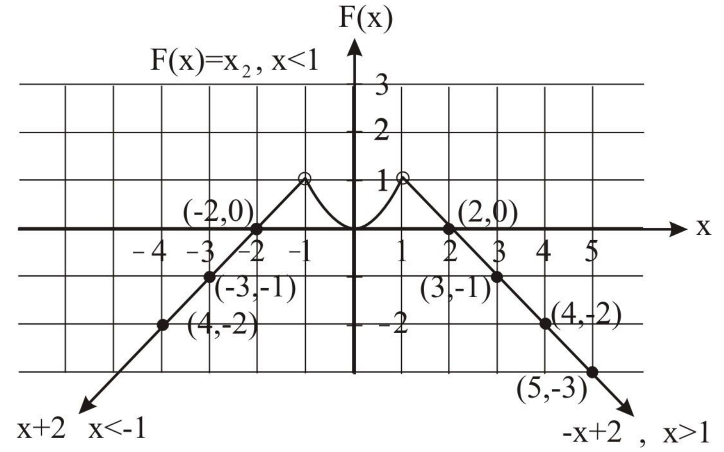
a- ښکته خواته انتقال شوي دی. b- پورته خواته انتقال شوي دي.

c- ښې خواته انتقال شوي دی. d- کیڼې خواته انتقال شوي دی.

حل: a سم دی.

15-که $f(x)$ تابع په لاندې ډول تعریف شوي وي، ګراف یې رسم کړئ، د تعریف او قیمتونو ناحیې یې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & x>1\\ x^2 & -1<x<1\\ x+2 & x<-1\end{cases}$$



$dom\ f=\{x/x\in IR\ ,\ \ x\neq -1, x\neq 1\}=IR-\{-1,1\}$

$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$ ویا

او د f د قیمتونو ناحیه عبارت ده له:

$Range\ f=(-\infty,1)=\{y/y\in IR\ ,\ y<1\}$

16- د $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع د تعریف او قیمتونو ناحیې وټاکئ.

$dom\ f(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq -1\}=IR\setminus\{-1\}$

$(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ اویا

د قیمتونو ناحیه یې:

$$y=\frac{2x}{x+1}\Rightarrow yx+y=2x$$

$$-yx+2x=y\Rightarrow(2-y)x=y\Rightarrow x=\frac{y}{2-y}$$ یا

$Rang\,f(x)=IR\setminus\{2\}=\{y/y\in IR\ ,\ y\neq 2\}$

$(-\infty,2)\cup(2,\infty)$ یا

17- د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعریف او قیمتونو ناحیې وټاکئ.

حل:

$dom\ f=\left\{x/x\in IR\ ,\ x\geq\dfrac{1}{2}\right\}=\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$

$Range\ f=[0,\infty)$ یا $y\geq 0$

18- د لاندینیو ناطقو بابعګانو د تعریف ناحیې پیدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري عمودي مجانبونه یې هم پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4} \qquad g(x)=\frac{7x}{x-8} \qquad h(x)=\frac{x+8}{x^2-64}$$

$$f(x)=\frac{x+8}{x^2+64} \qquad g(x)=\frac{x+7}{x^2-49} \qquad h(x)=\frac{x+7}{x^2-36}$$

حل:

$dom\, f(x) == IR \setminus \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

او د عمودي مجانب معادله یې $x=4$ ده.

$dom\, g(x) = IR \setminus \{8\} = (-\infty, 8) \cup (8, \infty)$

د عمودي مجانب معادله یې $x=8$ ده.

$dom\, h(x) = IR \setminus \{-8, 8\} = \{x / x \in IR, x \neq -8, x \neq 8\}$

دوه عمودي مجانبونه لري $x=-8$ او $x=8$ دي.

$dom\, f(x) = IR$ یا $(-\infty, \infty)$

عمودي مجانب نه لري، ځکه د x په هیڅ قیمت د تابع مخرج نه صفر کیږي.

$dom\, g(x) = IR \setminus \{-7, 7\}$ اویا $\{x / x \in IR, x \neq -7, x \neq 7\}$

دوه عمودي مجانبونه لري $x=-7$ او $x=7$ دي.

$dom\, h(x) = IR \setminus \{6, -6\}$

$dom\, h(x) = \{x / \in IR \;,\; x \neq 6 \;\wedge\; x \neq -6\}$

دوه عمودي مجانبونه لري: $x=6$ او $x=-6$

19-د $f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابعگانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له گراف سره یې پرتله کړئ.

حل:

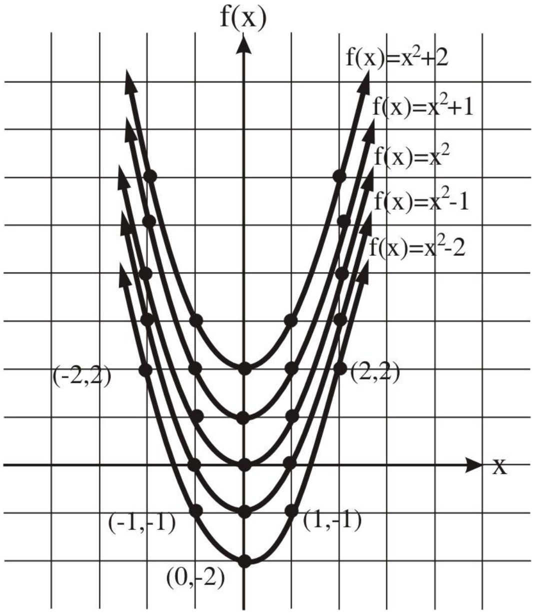
x	0	1	2	−2	−1
$f(x)=x^2$	0	1	4	4	1

x	0	1	2	−1	−2
$f(x)=x^2+1$	1	2	5	2	5

x	0	1	2	−1	−2
$f(x)=x^2-1$	−1	0	3	0	3

x	0	1	−1	2	−2
$f(x)=x^2+2$	2	3	3	6	6

x	0	1	2	−2
$f(x)=x^2-2$	−2	−1	2	2



که $f(x)=x^2$ تابع گراف د 2 واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته نقل شي، د $f(x)=x^2+2$ د تابع گراف لاس ته راځي اوکه د یو واحد په اندازه پورته خواته نقل شي، د $f(x)=x^2+1$ د تابع گراف اوکه د یو واحد په اندازه ښکته خواته نقل شي نو د $f(x)=x^2-1$ اوکه دوه واحده ښکته خواته نقل شي، نو د $f(x)=x^2-2$ تابع گراف لاس ته راځي.

20- د لاندینیو دویمې درجې تابعگانو د راسونو وضعیه کمیات او د تناظر محورونو معادلې پیدا کړئ.

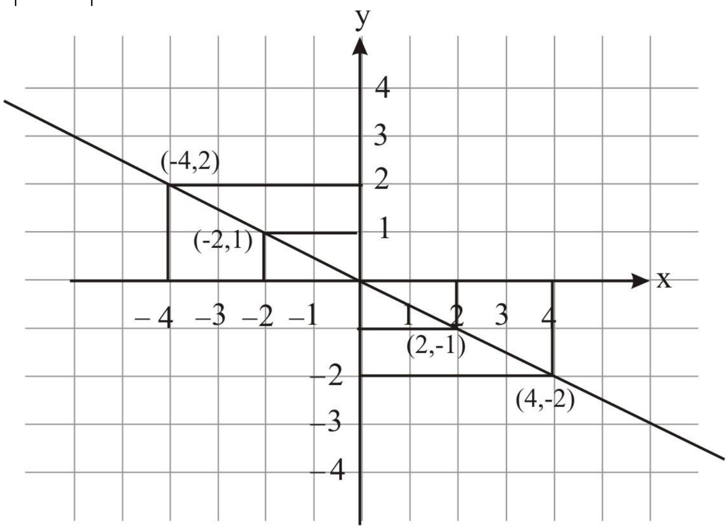
$y=(x-2)^2$ $\qquad y=(x+3)^2-4$

د a حل : د راس وضعیه کمیات یې $(2,0)$ او د تناظر محور معادله یې $x=2$ ده.

د b حل: د راس وضعیه کمیات یې $(-3,-4)$ او د تناظر محور معادله یې $x=-3$ ده.

21- د $y=-\frac{x}{2}$ د تابع گراف رسم کړئ.

x	0	2	4	-2	-4
y	0	-1	-2	1	2



22- د $f(x)=\frac{x^2-5}{x+2}$ د تابع عمودي او مایل مجانب پیدا کړئ.

حل: عمودي مجانب یې $x=-2$ او د مایل مجانب معادله یې $y=x-2$ ده.

23- د $h(x)=\frac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

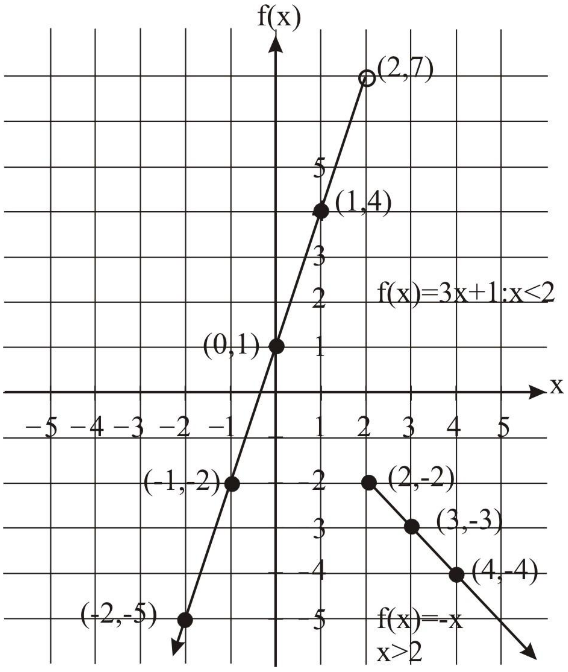
$a)\quad y=-1 \qquad b)\quad y=1 \qquad c)\quad y=-\frac{1}{4} \qquad d)\quad y=4$

ځواب: b سم ده.

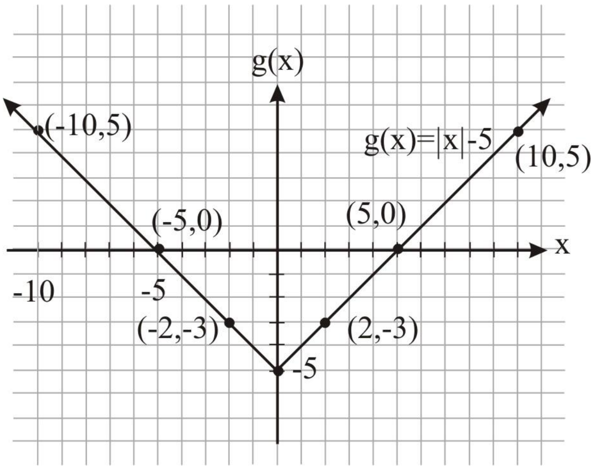
24- د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ.

x	1	0	-1	-2
f(x)	4	1	-2	-5

x	2	3	4
f(x)	-2	-3	-4



25- د $g(x) = |x| - 5$ تابع گراف رسم کړئ او د تعریف ناحیه یې وټاکئ.



Range $g(x) = [-5, +\infty)$

x	0	2	5	10	−2	−5	−10
f(x)	−5	−3	0	5	−3	0	5

26- د علامې د تابع (*sign fanction*) د قیمتونو په ناحیه کې د $\{-1,0,1\}$ عددونه شامل دي.

Rang sig $n = \{-1,0,1\}$

27- د لاندې هرې تابع معکوس پیدا کړئ او ووښایاست چې $f(f^{-1}(x)) = x$ دی.

$a: \quad f(x) = \frac{1}{8}x \qquad b: \quad f(x) = 8x - 1 \qquad c: \quad f(x) = x^2 + 6$

$d: \quad f(x) = \frac{4x+6}{5} \qquad e: \quad f(x) = x^3 - 1$

د a حل:

$$y = \frac{1}{8}x \Rightarrow x = \frac{1}{8}y \Rightarrow y = 8x$$

$f^{-1}(x) = 8x$ ده.

$$f(f^{-1}(x)) = f(8x) = \frac{1}{8} \cdot 8x = x$$

د b حل:

$f(x)=8x-1$

$y=8x-1 \Rightarrow x=8y-1 \Rightarrow 8y=x+1$

$$f^{-f}(x)=\frac{x+1}{8} \Leftarrow y=\frac{x+1}{8}$$

$f(f^{f-1}(x))=f(\frac{x+1}{8})=8(\frac{x+1}{8})-1=x+1-1=x$

د c حل:

$y=x^2+6 \Rightarrow x=y^2+6 \Rightarrow y^2=x-6$

ددې تابع معکوس تابع نه ده.

د d حل:

$y=\frac{4x+6}{5} \Rightarrow x=\frac{4y+6}{5}$

$4y+6=5x \Rightarrow y=\frac{5x-6}{4}$

$f^{-1}(x)=\frac{5x-6}{4}$

$f(x^{-1}(x))=f(\frac{5x-6}{4})=\frac{4\left(\frac{5x-6}{4}\right)+6}{5}$

$$\frac{5x-6+6}{5}=\frac{5x}{5}=x$$

د e حل:

$y=x^3-1 \Rightarrow x=y^3-1 \Rightarrow y^3=x+1$

$y=\sqrt[3]{x+1}$ $\qquad f^{-1}(x)=\sqrt[3]{3+1}$

$f(f^{-1}(x))=f(\sqrt[3]{x+1})=(\sqrt[3]{x+1})^3-1=x+1-1=x$

28- ایا د $g(x)=x^2$ تابع معکوس منوونکي ده. (معکوس يې هم يوه تابع ده)

$g(x)=x^2 \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow x=y^2$ $\qquad$ $y=\pm\sqrt{x}$ يا $g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}$

ليدل کيږي چې $g^{-1}(x)$ تابع نه ده، ځکه که $x=2$ او يا $x=-2$ وي: $g(2)=4$ او $g(-2)=4$ ، نو $g(x)$ معکوس منوونکې تابع نه ده يا معکوس يې تابع نه ده.

29- که $(fog)(x)=(gof)(x)$ وي، نو د f تابع د g له تابع سره څه اړيکه لري؟

حل: که $(f\,o\,g)(x)=(go\,f)(x)$ وي، نو g د f معکوسه تابع ده.

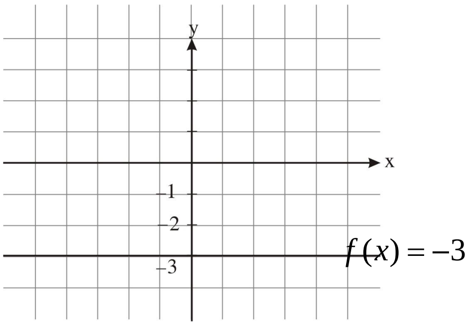
30- د x او y له محورونو سره $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ د تابع ګراف د تقاطع د نقطو وضعيه کميات پيدا کړئ.

حل: د y له محور سره دګراف د تقاطع نقطه $x=0 \Rightarrow y=3$ ، نو د تابع دګراف د تقاطع نقطه د y له محور سره $(0,3)$ نقطه ده. د x له محور سره د تقاطع نقطه $y=0$: $3-\frac{3}{2}x=0$

$-\frac{3}{2}x=-3 \Rightarrow \frac{3}{2}x=3 \Rightarrow x=2$ يا د x له محور سره د تقاطع نقطه $(2,0)$ ده.

31- د $f(x)=-3$ د تابع گراف رسم کړئ.

حل:



32- د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع د گراف د راس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

حل:

$$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}) \qquad x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-16}{8}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

د پارابول د راس د نقطې وضعیه کمیات (1,3) دي.

33- د کمیات وضعیه په عین سیستم کې د $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$

د تابعگانو گرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له گراف سره یې پرتله کړئ.

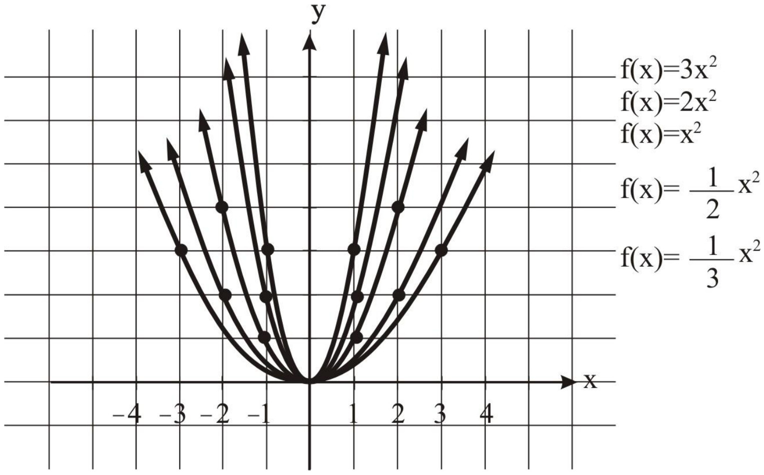
حل:

x	0	1	−1	2	−2
$3x^2$	0	3	3	12	12

x	0	1	−1	2	−2
$2x^2$	0	2	2	8	8

x	0	1	−1	2	−2
$\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2

x	0	3	−3
$\frac{1}{3}x^2$	0	3	3



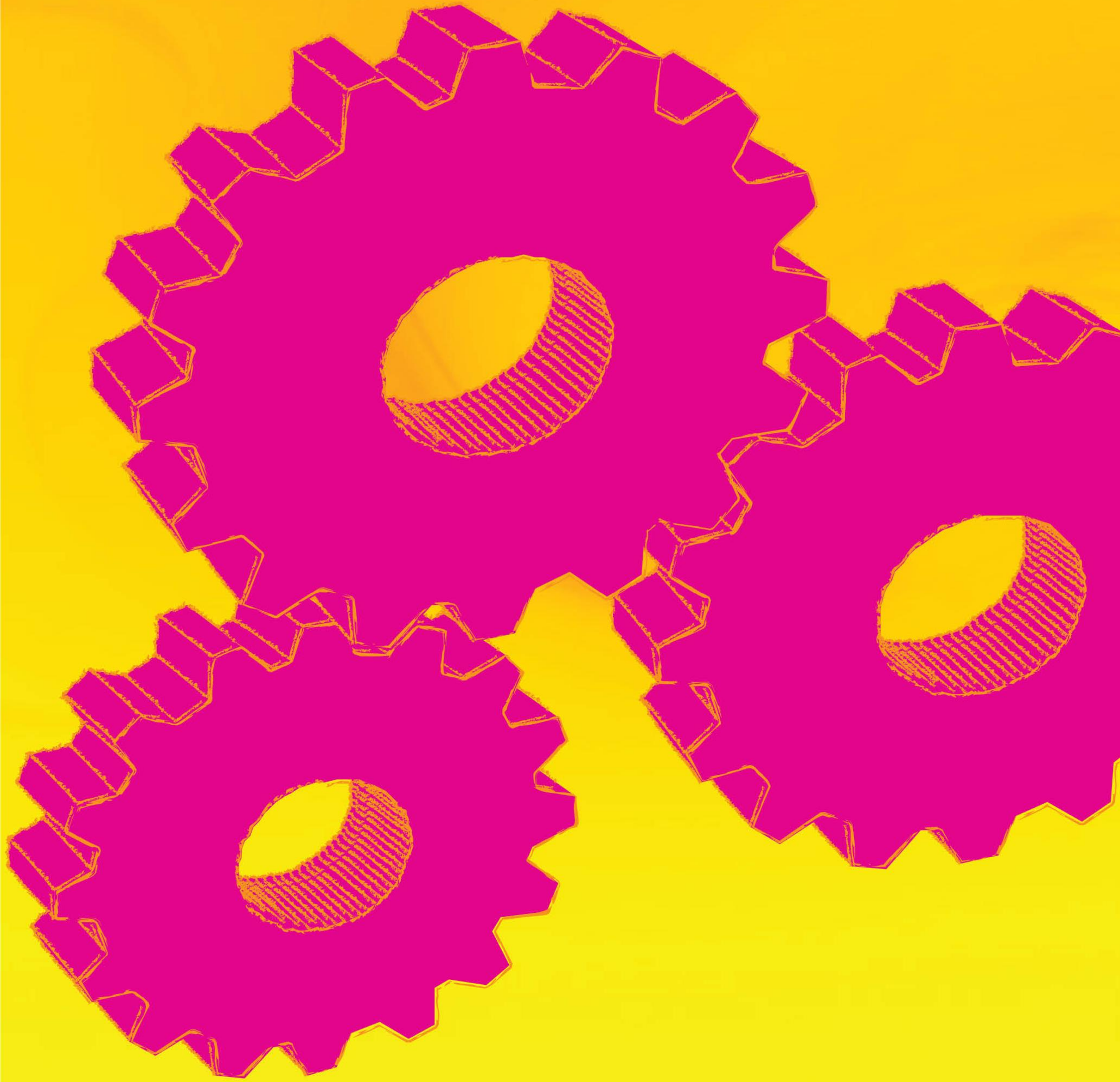
34- د $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ د مایل مجانب معادله عبارت ده له:

a: $y=x$ b: $y=x-1$ c: $y=x+1$

حل: a سم دی.

ڎلورم ڎپرکی

مثلثاتي تابعگاني



زاویه او راډیان

د درسي کتاب (149) مخ　　　د لوست وخت (3 درسي ساعتونه)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاويې وپېژني. • د زاويې د اندازه کولو واحدونه وپېژني او د درجې، ګراد او راډيان په تعريف وپوهيږي. • د مرکزي زاويې او د هغې د مقابل قوس تر منځ په اړيکه وپوهيږي او مثلثاتي دايره تعريف کړای شي. • مثبتې او منفي زاويې رسم کړای شي. • د درجې اعشاري شکل په (DMS) او (DMS) د درجې په اعشاري شکل واړولای شي. • د زاويو اندازه له يو واحد څخه بل واحد ته تبديل کړای شي. • په دې وپوهيږي چې يو دوران څو درجې، څو ګراده او څو راډيانه کيږي. • د مثلثاتي مسايلو په حل کې د زاويو د اندازو د تبديلولو اهميت درک کړي.
د زده کړې لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، هندسي بکسه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو وروسته دې ورودي پوښتنه له ده کوونکو وپوښتل شي چې په هندسه کې منفي زاويې نه شته دی، خو په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاويې شته دی.

د لوست بهير او فعاليتونه (28) دقيقه:

ښاغلی ښوونکي دې د چارت او يا تختې پر مخ د مثبتو او منفي زاويو مفهوم زده کوونکو ته توضيح کړي او د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې ددې لوست د (150) مخ د لومړی مثال زاويې رسم کړئ. ددې مخ د فعاليت زاويې دې زده کوونکي رسم کړي.

په همدې ډول ښوونکي دې دويم مثال حل کړي او زده کوونکي دې د (151) مخ فعاليت سرته ورسوي، د ګراد تعريفولو وروسته دې ښوونکی د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره د (151) مخ دريم مثال سره حل کړي.

راډيان دې تعريف شي او د مرکزي زاويې او د هغې د مقابل قوس ترمنځ اړيکه دې توضيح شي. ښاغلی ښوونکي دې څلورم مثال حل کړي او د (153) مخ فعاليت دې يو زده کوونکي د تختې پر مخ حل کړي. د فورمول په واسطه دې د درجې، ګراد او راډيان تر منځ اړيکه او يو پر بل اړول يې توضيح شي.

ددې مخ پنځم مثال دې د تختې پر مخ د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره حل شي، شپږم مثال دې د یوه زده کوونکي په واسطه پر تخته حل شي او د درجې او راډیان تر منځ اړیکه دې د (156) مخ د چارت له مخې واضیح شي د (156) مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي.
ښاغلی ښوونکي دې د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره اووم او اتم مثال حل او توضیح کړي.

د زده کړې پیاوړتیا (7) دقیقې:

ددې لوست د پیاوړتیا لپاره لاندې پوښتنې حل کړئ.
لاندې زاویې چې په راډیان راکړل شوي دي، په درجه یې واړوئ.

$\frac{\pi}{5}$، $-\frac{\pi}{10}$، $\frac{3\pi}{4}$، $\frac{\pi}{45}$، $-\frac{5\pi}{12}$، $\frac{27\pi}{5}$

د لوست ارزونه (5) دقیقې:

- لاندې زاویې په راډیان واړوئ.

$36^\circ, 6^\circ$، $-12^\circ, 75^\circ, 135^\circ$, $-225^\circ, 930^\circ$

- که د یوې دایرې قطر 10 واحده وي، د لاندینو مرکزي زاویو د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ.

1^R, 2^R, 1.75^R, $22\,Radian$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- د مثلثاتو له کلمې څخه ښکاري چې د مثلث د اجزاوو اندازه کول دي، په غیر مستقیم ډول د فاصلو اندازه کول، لکه: د غرونو لوړوالی، د دریا بونو سور د ساحل له یوې خوا څخه، د ستورو په حرکت کې غور او د وخت اندازه کول یې، د فزیک د علم اړتیاوو د ریاضي دا څانګه رامنځ ته کړه.
د علومو تاریخ وایي چې له میلاد څخه 2000 کاله پخوا، بابلیانو او مصریانو په غور سره د لمر، سپوږمۍ او ستورو حرکت ته متوجه وه، کال یې 360 ورځې باله، له همدې سببه یې دایره یې په 360 مساوي برخو وېشله چې په نتیجه کې درجه او اجزاوي (دقیقې، ثانیې) په ریاضي کې منځ ته راغلې.
د مسیح له میلاد نه په مخکنیو پیړیو کې کوچنۍ اسیا او یونان ددې ډول علمي مطلبونو د پلټنې مرکزونه و.
طالس (546-640 ق م) سره له دې چې یو سوداګر و د خپلې امسا په واسطه یې د مصر د مشهورو هرمونو لوړوالی اندازه کړ. دې عالم په حقیقت کې د مثلثاتو علم رامنځته کړ.
اقلیدس او زده کوونکو یې 300 کاله مخکې له میلاده په دایره کې په مثلثاتو کار وکړ.
بطلیموس (170- 100 م) کالو کې د زاویو لپاره یې داسې نسبتونه پیدا کړل چې د ضلعو پر ا وږدوالي پورې یې اړه نه درلوده چې نن ورځ دا نسبتونه د tangent, cosine, sine او Cotangent په نامه یادوو. بطلیموس په خپل مشهور کتاب (المجسطي) کې دا نسبتونه لیکلي وو او کارول یې.
د کروي مثلثاتو اثر د (Sphaerica) په کتاب کې چې منلائوس له میلاده سل کاله وروسته لیکلي و، لیدل کیږي.

له میلاده 300 کلونه وروسته اقلیدس او زده کوونکو یې د خپل وخت مثلثات د مساحتونو او په غیر مستقیم ډول د اوږدوالو په پیدا کولو کې په کاروړل. له دې وروسته چې د یونان او اسکندریې علمي ځراغ مړ شو او د اسلامي تمدن لمر وځلید په دې وخت کې دوه هندي عالمان اریابهاتا (Aryabhatas) (660-588 م) او بهاسکارا (Bhaskara) چې په (1114 م) کال کې پیدا شوي وو، د مثلثاتي نسبتونو لپاره یې جدولونه جوړ کړل چې د مثلثاتي تابعګانو په نامه یادیږي او له پوره دقت څخه په کې کار اخیستل شوی دی.

د هارون الرشید د خلافت په وخت کې (890-786 م) له یوناني او هندي ژبو څخه علمي کتابونه په عربي ژبه وژباړل شول څکه خو اسلامي علمي تمدن پر مختګ وکړ. د ابو ریحان البیروني په کتابونو کې د مثلثاتو علم موجود دی. له دې وروسته چې رنسانس په غرب کې وځلیده، نو هنري جان نیر(1617-1550 م)، دیمور(1754-1667 م)، لئونارداویلر(1783-1707 م)، ژوزف فوریه(1830-1768 م)، ګوس(1875-1777 م) علماوو د مثلثاتو علم اوج ته ورساوه.

-2

$$146^\circ\ \ 18'\ \ 34''\ = 146^\circ + \frac{18}{60} + \frac{34}{3600} = 146^\circ + 0.3^\circ + 0.00944^\circ = 146.30944^\circ$$

$$55.967663^\circ = 55^\circ + (0.967663\cdot 60)' = 55^\circ + 58.05978'$$

$$= 55^\circ + 58' + (0.05978\cdot 60)'' = 55^\circ + 58' + 4'' = 55^\circ\ \ 58'\ \ 4''$$

3- د یو دوران د راکړل شوي برخې درجې د راډیان په حساب مساوي دي په:

$$\frac{1}{9}\operatorname{Re}v = 40^\circ = (\frac{2\pi}{9})^R \qquad \frac{2}{3}\operatorname{Re}v = 240^\circ = (\frac{4\pi}{3})^R$$

$$\frac{1}{18}\operatorname{Re}v = 20^\circ = (\frac{\pi}{9})^R \qquad \frac{4}{5}\operatorname{Re}v = 288^\circ = (\frac{8\pi}{5})^R \qquad \frac{1}{36}\operatorname{Re}v = 10^\circ = (\frac{\pi}{18})^R$$

4-که د یوې دایرې قطر 10m وي، د لاندینیو راکړل شوو مرکزي زاویو د مقابلو قوسونو اوږدوالی مساوي دی په:

$$(3.8)\text{Radiam} \rightarrow 19\text{m} \qquad (2.4)^R \rightarrow 12\text{m} \qquad (45)^R \rightarrow 225\text{m}$$

$$(72)^R \rightarrow 360\text{m} \qquad (4.28)^R \rightarrow 12.4\text{m} \qquad (0.67)^R = 3.35\text{m} \qquad (\frac{7\pi}{4})^R = \frac{35\pi}{4}\text{m}$$

$$(\frac{\pi}{3})^R \rightarrow \frac{5\pi}{3}\text{m} \qquad (\frac{2\pi}{3})^R \rightarrow \frac{10\pi}{3}\text{m} \qquad (\frac{\pi}{4})^R = \frac{5\pi}{4}\text{m} \qquad (\frac{7\pi}{6})^R = \frac{35\pi}{6}\text{m}$$

5- په راډیان د راکړل شوو زاویو اندازه د درجې په حساب مساوي ده په:

$$\frac{\pi}{5} = 36^\circ\ , \quad -\frac{\pi}{10} = -18^\circ\ , \quad \frac{3\pi}{4} = 135^\circ\ , \quad \frac{\pi}{45} = 4^\circ$$ (رادیان په درجه)

$$6^\circ = (\frac{\pi}{30})^R\ , \quad -12^\circ = (-\frac{\pi}{15})^R\ , \quad 75^\circ = (\frac{5\pi}{12})^R$$ (درجه په رادیان)

$$135^\circ = (\frac{3\pi}{4})^R\ , \quad -225^\circ = (\frac{-5\pi}{4})^R\ , \quad 930^\circ = (\frac{31\pi}{6})^R$$

6- د یو ساعت عقربه په هر ساعت کې 30° زاویه طی کوي او دا عقربه یوه درجه په (2') کې طی کوي او په (28) دقیقو کې دا عقربه 14° قوس طي کوي او په $\frac{2}{5}$ دقیقو کې د 12' قوس طي کوي.

7- لاندینی زاویې څو دورانو نه (Rotations) یا د یو دوران څوومه برخه ده؟

$45^\circ = \frac{1}{8}ccw$ $\quad 90^\circ = \frac{1}{4}ccw$ $\quad -180^\circ = \frac{1}{2}cw$ $\quad -270^\circ = \frac{3}{4}cw$

$450^\circ = 1\frac{1}{4}ccw$ $\quad 720^\circ = 2ccw$ $\quad -420^\circ = 1\frac{1}{6}cw$ $\quad -640^\circ = 1\frac{7}{9}cw$

(ccw) د ساعت د عقربې د حرکت مخالف جهت او (cw) د ساعت د عقربې د حرکت هم جهت.

(ccw)
C= Counter C= clock W= Wise

د پوښتنو ځوابونه:

1- که د یوې مرکزي زاویې مقابل قوس 50cm او د دایرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاویه به څو راډیانه وي؟

حل:

$$\theta = \frac{S}{R} \Rightarrow \theta = \frac{50cm}{25cm} = 2\,\text{Radian}$$

2- $32{,}4222^o$ په درجې، دقیقې او ثانیې واړوئ.

حل: $32.4222^\circ = 32^\circ + 0.4222^\circ = 32^\circ + (0.4222 \cdot 60)' = 32^\circ\ \ 25' + (0.332 \cdot 60)'' = 32^\circ\ \ 25'\ \ \ 19.92''$

3- د یو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډیانه، څو درجې او څو گراده کېږي؟

حل:

a) $\frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$ $\quad$ b) $\frac{1}{8} \cdot 400 = 50^g$ $\quad$ c) $\frac{1}{8} \cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{4}^R$

4- $\frac{5\pi}{4}$ راډیان څو گراده او $-7{,}5^o$ څو راډیانه کېږي؟

حل:

a) $2\pi^R = 400^g$

$\frac{5\pi^R}{4} = x$ $\qquad x^\circ = \frac{5\pi}{4} \cdot 400 / 2\pi^R = 250^g$

b) $2\pi^R = 360^\circ$

$x^R = -7.5^\circ$ $\qquad x^\circ = \frac{-7.5^\circ \cdot 2\pi^R}{360} = \frac{-15\pi^R}{360} = (-\frac{\pi}{24})^R$

5- $225^o, -315^o, 720^o$ او 45° په راډیان او گراد واړوئ.

حل:

a) $45^\circ = \frac{45 \cdot 2\pi}{360} = (\frac{\pi}{4})^R$ $\qquad$ b) $720^\circ\ \frac{720^\circ\ \ 2\pi}{360} = 4\pi^R$

c) $-315^\circ = \frac{-315 \cdot 2\pi}{360} = (\frac{-7\pi}{4})^R$ $\qquad$ d) $225^\circ = \frac{225 \cdot 2\pi}{360} = (\frac{5\pi}{4})^R$

6- د یو دوران $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډیانه او څو درجې کېږي؟

حل:

a) $\frac{1}{9}\cdot 2\pi = (\frac{2\pi}{9})^R$ $\frac{1}{9}\cdot 360 = 40^\circ$ b) $\frac{1}{24}\cdot 2\pi = (\frac{\pi}{12})^R$ $\frac{1}{24}\cdot 360^\circ = 15^\circ$

c) $\frac{1}{18}\cdot 2\pi = (\frac{\pi}{9})^R$ $\frac{1}{18}\cdot 360^\circ = 20^\circ$ d) $\frac{4}{5}\cdot 2\pi = (\frac{8}{5}\pi)^R$ $\frac{4}{5}\cdot 360^\circ = 288^\circ$

-7 $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{10}$, $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ په راډيان او درجې واړوئ.

حل:

a) $2\pi^R = 360^\circ$ $(\frac{11}{3}\pi)^R = x^\circ \Rightarrow x^\circ = \frac{\frac{11}{3}\pi\cdot 360^\circ}{2\pi} = \frac{11\cdot 120}{2} = 660^\circ$

b) $(\frac{9\pi}{4})^R = \frac{\frac{9\pi}{4}\cdot 360^\circ}{2\pi} = \frac{9\cdot 90}{2} = 405^\circ$ c) $(\frac{\pi}{6})^R = \frac{\frac{\pi}{6}\cdot 360^\circ}{2\pi} = \frac{60}{2} = 30^\circ$

$d)$ $(-\frac{\pi}{6})^R = \frac{\frac{\pi}{6}\cdot 360^\circ}{20} = -30^\circ$ $e)$ $(-\frac{\pi}{10})^R = \frac{\frac{2\pi}{10}\cdot 360}{2\pi} = -18^\circ$

$f)$ $(\frac{2\pi}{5})^R = \frac{\frac{2\pi}{5}\cdot 360}{2\pi} = 72^\circ$ $g)$ $(-\frac{5\pi}{12})^R = \frac{-5^{\pi}/12\cdot 360}{2\pi} = -75^\circ$

8-که د يو ساعت د ثانيې د عقربې اوږدوالی 6cm وي، په ''40 ثانيو کې د ثانيې عقربه څو سانتي متره فاصله طی کوي؟

حل:

$S = R.\theta$ $40'' = \frac{40}{60}\text{Rev} = \frac{2}{3}\text{Rev}$

$S = 6cm\cdot(\frac{4}{3}\pi)^R = 8\pi cm$ $\begin{cases} 1\text{Rev} = 2\pi^R = \\ \frac{2}{3}\text{Rev} = (\frac{4}{3}\pi)^R \end{cases}$

9-که د دايرې شعاع 3cm او مرکزي زاويه $\frac{5}{3}$ راډيانه وي. د دې مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟

حل:

$S = R\cdot\theta = 3cm\cdot\frac{5}{3} = 5cm$

10-که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 35 ثانيې وي، نو د ثانيې عقربې به څو راډيانه مثبته زاويه طی کړې وي؟

حل:

$60'' = (2\pi)^R \Rightarrow (\frac{35}{60})\cdot 2\pi = (\frac{7\pi}{6})^R$

11- د دوو زاويو مجموعه 152° ده، که د يوې زاويې اندازه د درجې په حساب له بلې زاويې سره د ګراد په حساب برابره وي، د هرې زاويې اندازه د راډيان په حساب څومره ده؟

حل:

$x + y = 152^\circ$

$$\left\{ x = \frac{10}{9} y \right.$$

$$\frac{10}{9} y + y = 152 \Rightarrow 10y + 9y = 1368 \Rightarrow y = \frac{1368}{19}$$

$y = 72^\circ \qquad x = 80^\circ \qquad 72^\circ = 80^g$

$\Rightarrow x = 80 \cdot \frac{\pi}{180} = (\frac{4\pi}{9})^R$

$y = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = (\frac{8\pi}{20})^R = (\frac{2\pi}{5})^R$

12- 1620° څو راډیانه کېږي؟

$a)\ 4\pi^R \qquad b)\ 8\pi^R \qquad c)\ 9\pi^R \qquad d)\ 10\pi^R$

حل:

$1620^\circ = \frac{1620 \cdot 2\pi}{360} = (9\pi)^R$

13- څلور دورانونه څو راډیانه کېږي؟

$a)\ 2\pi^R \qquad b)\ 4\pi^R \qquad c)\ 6\pi^R \qquad d)\ 8\pi^R$

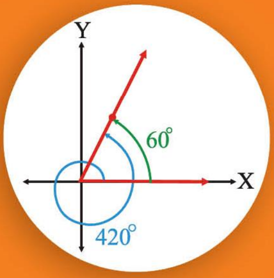
حل: څلور دورانونه: $4 \cdot 2\pi^R = 8\pi^R$, (سم ځواب d دی)

14 - که د یوې دایرې شعاع $10m$ وي، د $45\,radian$ مرکزي زاویې، مقابل قوس به څو متره وي؟

حل:

$r = 10m$

$\theta = 45\ \ radian, \qquad S = r\theta \Rightarrow \quad S = 45^R \cdot 10m = 450m$



د يوې زاويې معياري حالت او کوټرمينل زاويې

د درسي کتاب (159)مخ **د لوست وخت: (1 درسي ساعت**

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد ددې لوست په پاى کې: • د يوې زاويې د معياري حالت او د کوټرمينل زاويو په تعريف وپوهيږي. • له يوې زاويې سره د کوټرمينل د زاويو پيدا کول زده کړي. • يوه زاويه په معياري حالت وښودلاى شي. • له يوې زاويې سره کوټرمينل زاويې پيدا کړاى شي. • کوټرمينل زاويې په شکل کې رسم کړاى شي. • د مثلثاتي مسايلو په حل کې او په خاص ډول د يوې زاويې د مثلثاتي نسبتونو په پيدا کولو کې د کوټرمينل زاويو اهميت درک کړي او زده کړې ته يې علاقه مند شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو وروسته د ورودي برخې پوښتنه دې له زده کوونکو وپوښتل شي. څرنګه چې د 60° او 420° زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې دي نو دا واړه زاويې سره کوټر مينل دي: $420=1\times360+60$

د لوست بهير او فعاليتونه (28) دقيقې:

ښاغلى ښوونکي دې د (159) مخ د شکلونو په چارت کې او يا دتختې پر مخ د يوې زاويې معياري حالت توضيح کړي او ددې مخ لومړى مثال دې زده کوونکو ته په وړاندې ورکولو سره حل کړي، بيا دې د (160) مخ فعاليت زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او د ګروپ نماينده دې خپل کار د تختې پر مخ توضيح کړي .

د کوټرمينل زاويو له تعريفولو وروسته دويم او دريم مثال يا د چارت له مخې او يا پر تخته حل او د شکل په واسطه يې توضيح کړي او د (161) مخ فعاليت کولاى شي چې له دوو زده کوونکو وپوښتئ.

په همدې ډول څلورم او پنځم مثال په شکل کې د زده کوونکو په وړاندې اخيستنې سره حل کړئ.

د لوست پياوړتيا: (7) دقيقې:

تر ټولو کوچنۍ مثبته زاويه پيدا کړئ چې -40°، -125° او 450° زاويو سره کوټرمينل وي. ځواب: (320°، 235° او 90°)

د لوست ارزونه (5) دقيقې

د لوست د ارزونې لپاره د دويمې پوښتنې يوه برخه له زده کوونکو وپوښتئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- هغه زاويې چې د راډيان په حساب له (0) څخه تر (2π) پورې له لاندينيو زاويو سره کوټرمينل دي، عبارت دي له:

$-\frac{\pi}{3}\to\frac{5\pi}{3}$ $\quad\frac{19\pi}{4}\to\frac{3\pi}{4}$ $\quad-\frac{7\pi}{5}\to\frac{3\pi}{5}$ $\quad 7\to 7-2\pi$

- په معياري حالت کې څلور څلور زاويې پيداکړئ چې له لاندينيو زاويو سره چې د راډيان په حساب راکړل شوي دي، کوټرمنيل وي:

$\frac{\pi}{4}\to\ \frac{9\pi}{4},\frac{17\pi}{4},\frac{7\pi}{4},-\frac{15\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{6}\to\ \frac{11\pi}{6},\ \frac{23\pi}{6},\frac{-13\pi}{6},-\frac{25\pi}{4}$

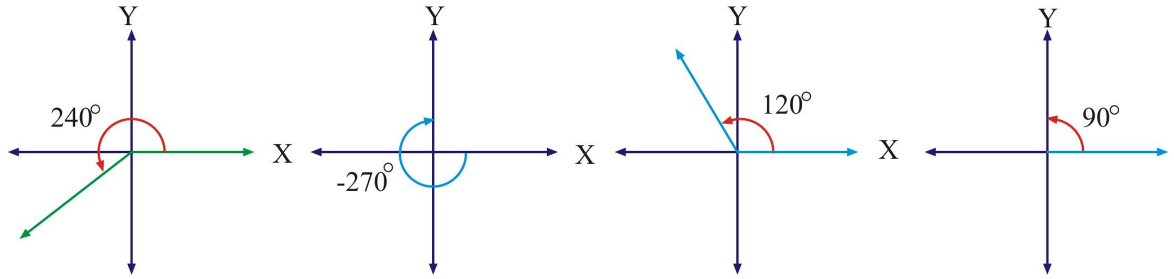
- له راکړل شوو زاويو سره ټولې کوټرمينل زاويې چې $-360^\circ<\theta<360^\circ$ وي، عبارت دي له:

$35^\circ \longrightarrow -325^\circ$	$23^\circ \longrightarrow -337^\circ$	$112^\circ \longrightarrow -248^\circ$
$160^\circ \longrightarrow -200^\circ$	$612^\circ \longrightarrow 252^\circ,-108^\circ$	$-315^\circ \longrightarrow 45^\circ$
$478^\circ \longrightarrow 118^\circ,-242^\circ$	$-135^\circ \longrightarrow 225^\circ$	$-120^\circ \longrightarrow 240^\circ$
$90^\circ \longrightarrow -270^\circ$	$-180^\circ \longrightarrow 180^\circ$	$-450^\circ \longrightarrow -90^\circ,270^\circ$
$-280^\circ \longrightarrow 80^\circ$	$-485^\circ \longrightarrow -125^\circ,235^\circ$	$225^\circ \longrightarrow -135^\circ$
$540^\circ \longrightarrow 180^\circ,-180^\circ$	$270^\circ \longrightarrow -90^\circ$	$560^\circ \longrightarrow 200^\circ,-160^\circ$
$195^\circ \longrightarrow -165^\circ$	$410^\circ \longrightarrow 50^\circ,-310^\circ$	

د پوښتنو ځوابونه

1- د $90^\circ,120^\circ,-270^\circ$ او 240° زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.

حل:



2- تر ټولو کوچنۍ مثبته زاويه پيداکړئ چې له لاندينيو زاويو سره کوټرمينل وي.

$-40^\circ,-125^\circ,450^\circ,\ 539^\circ,60^\circ,90^\circ,135^\circ$

حل:

ترټولو کوچنۍ زاويه چې له 135° سره کوټرمينل وي، د 495° زاويه ده.

ترټولو کوچنۍ زاويه چې له 90° سره کوټرمينل وي، د 450° زاويه ده.

ترټولو کوچنۍ زاويه چې له 60° سره کوټرمينل وي، د 420° زاويه ده.

ترټولو کوچنۍ زاویه چې له 539° سره کوټرمینل وي، د 179° زاویه ده.

ترټولو کوچنۍ زاویه چې له 450° سره کوټرمینل وي، د 90° زاویه ده.

ترټولو کوچنۍ زاویه چې له -125° سره کوټرمینل وي، د 235° زاویه ده.

ترټولو کوچنۍ زاویه چې له -40° سره کوټرمینل وي، د 320° زاویه ده.

3-ایا د $(-80^\circ, 280^\circ)$ او $(35^\circ, 395^\circ)$ زاویې یوه له بلې سره کوټرمینل دي؟

ځرنګه چې: $360+(-80)=280$ دي نو سره کوټرمینل دي او همدارنګه $360+35=395^\circ$ دي نو، دا دواړه زاویې هم سره کوټرمینل دي.

4- له 40° زاویې سره، شپږ کوټرمینل زاویې پیدا کړئ.

حل: د 40° زاویې سره شپږ کوټرمینل زاویې عبارت دي له:

$40^\circ + 2\cdot 360^\circ = 40^\circ + 720^\circ = 760^\circ$

$40^\circ + 360^\circ = 400^\circ$

$40^\circ - 360^\circ = -320^\circ$

$40^\circ + 3\cdot 360^\circ = 40^\circ + 1080^\circ = 1120^\circ$

$40^\circ - 1080^\circ = -1040^\circ$

$40^\circ - 720^\circ = -680^\circ$

5- ایا $(150^\circ, -930^\circ)$ او $(900^\circ, 180^\circ)$ زاویې سره کوټرمنیل دي؟

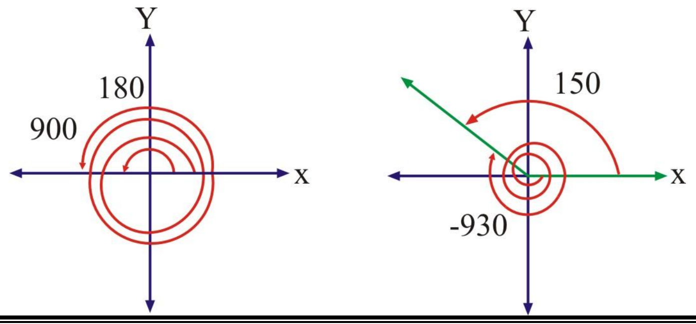
حل: ځرنګه چې:

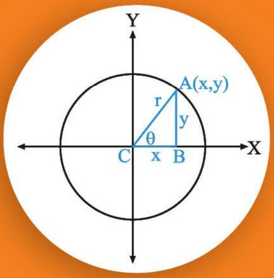
$-930^\circ = 150^\circ - 2.360^\circ = 150^\circ - 1080^\circ$

نو سره کوټرمینل دی.

$900^\circ = 180^\circ + 2.360^\circ = 180^\circ + 720^\circ$

نو سره کوټرمینل دي.





مثلثاتي تابعګاني

د درسي کتاب (163)مخ **د لوست وخت (2 درسي ساعتونه)**

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • په قایمه زاویه مثلث کې د یوې حادې زاویې د مثلثاتي تابعګانو په تعریف وپوهیږي. • د زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ ځینې اړیکې زده کړي. • په څلورو واړو ناحیو کې د یوې زاویې د مثلثاتي نسبتونو علامې وپیژني. • که په معیاري حالت کې د یوې زاویې د دویمې ضلعې د یوه ټکي وضعیه کمیات معلوم وي، ددې زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړای شي. • دا درک کړي چې په مثلثاتي تابعګانو کې ازاد یا مستقل متحول د θ زاویه او د θ مثلثاتي نسبتونه مقید متحولونه دي. • د ریاضي د مسایلو په حل کې د مثلثاتي نسبتونو د علامو او د یوې زاویې د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ د اړیکو اهمیت درک کړي.
د تدریس میتودونه	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندونه مواد	درسي کتاب، تخته، چارټ، او ...
د ورودي برخې توضیح	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو وروسته دې له زده کوونکو د ورودي پوښتنه وشي او دچارټ له مخې دې په شکل کې توضیح شي چې د θ یوې زاویې مثلثاتي نسبتونه د θ دضلعو پر اوږدوالي پورې اړه نه لري، یوازې د θ د زاویې پر پراخوالي پورې اړه لري.

دلوست بهیراو فعالیتونه (28) دقیقې:

په چارټ او یا پر تخته باندې په یوه قایم الزاویه مثلث کې د (θ) حاده زاویې مثلثاتي نسبتونه تعریف شي او د (163) مخ لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ. د ځینو مثلثاتي اړیکو له ثبوت کولو څخه وروسته د (165) مخ فعالیت دې زده کوونکې په ګروپونو کې سرته ورسوي او خپل کار دې نورو ته توضیح کړي په مثلثاتي دایره (Trigonometric circle) کې دې مثلثاتي تابعګانې د مثلثاتي خطونو په شکل وروښودل شي او روښانه دې شي، $F(\theta)=\sin\theta, F(\theta)=\cos\theta$ ، $F(\theta)=\tan\theta, F(\theta)=\cot\theta, F(\theta)=\sec\theta$ او $F(\theta)=\csc\theta$ شپږ مثلثاتي تابعګانې د θ د پراخوالي تابع دی. څه وخت چې زده کوونکو په څلورو واړو ناحیو کې د مثلثاتي نسبتونو علامې وپیژندلې، دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره په شکل کې حل ا و توضیح کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا (7) دقیقې:

د لاندینیو زاویو د مثلثاتي نسبتونو علامې شفاهي ووایاست.

$Sin91^\circ$ $Sin181^\circ$ $\cos 271^\circ$ $\tan 300^\circ$ $\cot 269^\circ$ $\csc 120^\circ$ $\csc 45^\circ$ $\sec 269^\circ$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

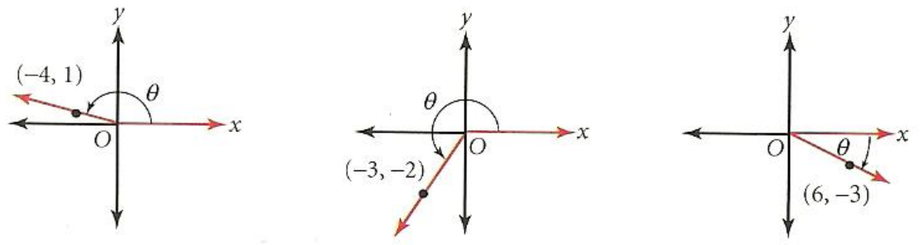
- که په معیاري حالت کې د θ د زاویې دویمه ضلع د (4،3) له نقطې تیره شي، د θ ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.
- که په معیاري حالت کې د θ د زاویې دویمه ضلع د (2-،3-) له نقطې تیره شي، د θ ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

اضافي معلومات:

- د ځینو زاویو موقعیت له څلورو ناحیو څخه په یوه ناحیه کې او د دوی د مثلثاتي نسبتونو علامې په لاندې ډول دي.

شمېره	زاویه	ناحیه	علامه
1	$\sin 160^\circ$	2	+
2	$\cos 160^\circ$	2	-
3	$\tan 200^\circ$	3	+
4	$\sin 262^\circ$	3	-
5	$\sin(-40^\circ)$	4	-
6	$\cot(-130^\circ)$	3	+
7	$\sin 210^\circ$	3	-
8	$\tan 210^\circ$	3	+
9	$\cos 470^\circ$	2	-
10	$\sin 470^\circ$	2	+
11	$\sin(-470^\circ)$	3	-
12	$\tan(-470^\circ)$	3	+
13	$\sin 1030^\circ)$	4	-
14	$\cos 1000^\circ$	4	+

- د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه چې په لاندې شکل کې راکړل شوي دي عبارت دي له:



$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17} \qquad \cos\theta = -\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad \tan\theta = -\frac{1}{4}$$

$$\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \tan\theta = \frac{2}{3}$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \tan\theta = -\frac{1}{2}$$

- ځینې مثلثاتي مطابقتونه په لاندې ډول دي:

$$\frac{\sec\theta}{\csc\theta} = \tan\theta \qquad \frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1 \qquad (1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = \frac{1}{\sec^2\theta}$$

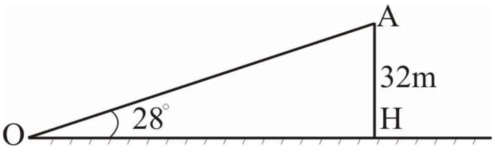
$$(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1) = \tan^2\theta \qquad (1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta) = 1$$

$$(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) = 1 \qquad \sin x(\csc x - \sin x) = \cos^2 x$$

$$\cos x(\tan x + \cot x) = \csc^2 x \qquad \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\tan^2 x\cos^2 x + \cos^2 x = 1$$

لومړی مسئله:



د منار لوړوالی $32m$ او $A\hat{O}H = 28^\circ$ دی.

دO د نقطې فاصله د منار له پایې څخه چې د O نقطه د ځمکې پر مخ واقع ده، عبارت ده له:

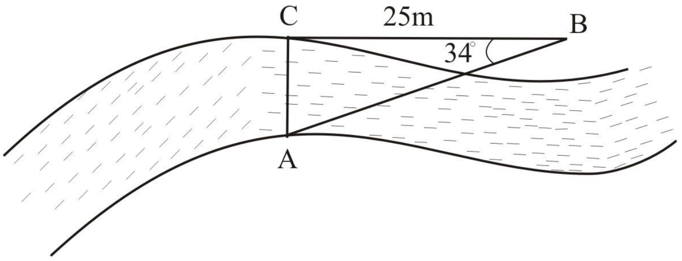
$$\cot 28^\circ = \frac{OH}{AH}$$

$$OH = AH\cot 28^\circ$$

$$= 32\cdot(1.8807) = 60.1824m$$

دویمه مسئله:

په شکل کې د سیند د سور $\overline{AC}$ د پیدا کولو لپاره هغه عمود چې د B له نقطې پر $\overline{AC}$ رسم شوی دی اوږدوالی یې $\overline{BC} = 25m$ دی، که چیرې $C\hat{B}A = 34^\circ$ وي.



$$\tan 34^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC\cdot\tan 34^\circ = 25m\cdot(0.6745)$$

$$AC = 16.8625m$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندینیو زاویو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول ووایاست.

$\sin 120^o \quad \tan 170^o \quad \tan 60^o \quad \cos 330^o \quad \sec 200^o$

$\cot 271^o \quad \csc 91^o \quad \sin 271^o \quad \csc 181^\circ \quad \csc 315^\circ$

حل:

منفي $\cot 271^\circ$ — $\sin 120^\circ$ مثبت

مثبت $\csc 91^\circ$ — $\tan 170^\circ$ منفي

منفي $\sin 271^\circ$ — $\tan 60^\circ$ مثبت

منفي $\csc 181^\circ$ — $\cos 330^\circ$ مثبت

منفي $\csc 315$ — $\sec 200$ منفي

2- که θ په معیاري حالت کې د رادیان په حساب وي او د θ دویمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پیداکړئ.

$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad (\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

حل:

$$a) \quad (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } y=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=r^2$$

$$\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=r^2 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{R}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b) \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ و } x^2+y^2=r^2$$

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=r^2 \Rightarrow r=1$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

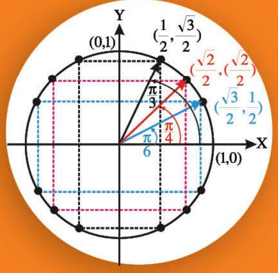
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{-\sqrt{\frac{2}{2}}} = -1$$

c) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow r = 1$

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan\theta = -1$ و $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow r = 1$

d) $\sin\theta = -\frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ و $\tan\theta = 1$



د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

د درسي کتاب (169)مخ   د لوست وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې - پوهنيزې - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي بايد ددې لوست په پای کې: • د 30°، 45° او 60° زاويو د مثلثاتي نسبتونو د پيداکولو په طريقه وپوهيږي. • د 30°، 45° او 60° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکړای شي. • د 30°او 60° زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په اړيکه وپوهيږي. • په هر متساوي الاضلاع مثلث کې د 30° او 60° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړای شي. • د هغوی د دوو زايو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ په اړيکه وپوهيږي چې مجموعه يې 90° کيږي او ددې اړيکو اهميت د زاويو د مثلثاتي نسبتونو په پيدا کولو او دزاويو د مثلثاتي نسبتونو د جدول په ترتيبولو کې درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته د ورودي برخې د شکل په چارت کې د $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ او $\frac{\pi}{3}$ زاويو د دويمو ضلعو د انجامونو وضعيه کميات وروښول شي او څرنګه چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کيږي، نو $\sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ$

د لوست بهير فعاليتونه (28) دقيقې

ښاغلي ښوونکي دې د چارت له مخې او يا پرتخته په قايم الزاويه متساوي الساقين مثلث کې د 45° اويا $\frac{\pi}{4}$ راډيان زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړي، بيا دې زده کوونکي د (170) مخ فعاليت په ګروپونو کې سرته ورسوي، دګروپ نماينده دې خپل کار نورو ته توضيح کړي. البته ښوونکي د دوی د کارونو څارنه کوي او لارښوونه او مرسته ورسره کوي.

بيا د شکل په شان په يوه متساوي الاضلاع مثلث کې د 30° يا $\frac{\pi}{6}$ راډيان او د 60° يا $\frac{\pi}{3}$ راډيان زاويو مثلثاتي نسبتونه لاس ته راوړئ. د (170°) مخ دويم فعاليت دې زده کوونکي د لومړي فعاليت په شان سرته ورسوي او ښاغلي ښوونکي دې په قايم الزاويه متساوي الساقين مثلث کې د هغو دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې چې مجموعه يې 90° کيږي واضح کړي. له دې وروسته چې زده کوونکو د (172) مخ فعاليت سرته ورسوي. نو ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره ددې مخ مثال حل کړي.

د لوست پیاوړتیا (7) دقیقې

$\sin 19^\circ 20' = 0.3311$

$\cos 19^\circ 20' = 0.9436$

$\tan 19^\circ 20' = 0.3508$

$\sin 70^\circ 40'$, $\cos 70^\circ 40'$ او $\cot 70^\circ 40'$ پیدا کړئ.

د لوست ارزونه (5) دقیقې

له لاندینیو مساواتو څخه یې کوم یو سم دی؟

$\sin 1^\circ\ 40'\ \ 10'' = \cos 88^\circ\ 10'\ \ 50''$

$\tan 11^\circ\ 11'\ \ 11'' = \cot 79^\circ\ 49'\ \ 49''$

$\sec 20^\circ\ 21'\ \ 22'' = \csc 69^\circ\ 40'\ \ 39''$

$\cot 40'\ 40'\ \ 40'' = \tan 49^\circ\ 19'\ \ 20''$

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

-1

θ	$30^\circ = (\frac{\pi}{3})^R$	↗	$45^\circ = (\frac{\pi}{4})^R$	↗	$60^\circ = (\frac{\pi}{3})^R$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	1	↗	$\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	↘	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

-2

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
1°	0.0175	0.9998
0.1°	0.00175	0.999998
0.01°	0.000175	0.99999998
0.001°	0.0000175	0.9999999998

د پوښتنو ځوابونه

1- که: $\sin 17^{o} = 0,2927 \quad \cos 17^{o} = 0,9563 \quad \sec 17^{o} = 1,046 \quad \csc 17^{o} = 3,420$

$\cot 17^{o} = 3,271$ او $\tan 17^{o} = 0,3057$ وي، د 73° زاوېې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$\text{Sin } 17^{\circ} = 0.2927 \Rightarrow \cos 73^{\circ} = 0.2927$

$\cos 17^{\circ} = 0.9563 \Rightarrow \sin 73^{\circ} = 0.9563$

$\tan 17^{\circ} = 0.3057 \Rightarrow \cot 73^{\circ} = 0.3057$

$\cot g 17^{\circ} = 3.271 \Rightarrow \tan 73^{\circ} = 3.271$

$\sec 17^{\circ} = 1.046 \Rightarrow \csc 73^{\circ} = 1.046, \ \csc 17^{\circ} = 3.420 \Rightarrow \sec 73^{\circ} = 3.420$

2 – لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې ناسمه ده؟

a) $\sin 28° = \cos 62°$

b) $\cos 12° \ 10' \ 20'' = \sin 77° \ 49' \ 40''$

c) $\sec 12° = \sec 88°$

d) $\tan 70° = \cot 20°$

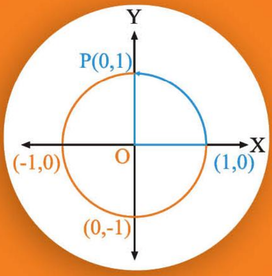
حل:

$\sin 28^{\circ} = \cos 62^{\circ}$ سم دی.

$\cos 12^{\circ} \ 10' \ 20'' = \sin 77^{\circ} \ 49' \ 40''$ سم دی.

$\sec 12^{\circ} = \sec 88^{\circ}$ سم نه دی.

$\tan 70^{\circ} = \cot 20^{\circ}$ سم دی.



د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو مثلثاتي نسبتونه

ددرسي کتاب (173)مخ   د لوست وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	زده کوونکي باید ددې لوست په پای کې: • د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو د مثلثاتي نسبتونو د پیداکولو په طریقه وپوهیږي. • په دې وپوهیږي چې ددې زاویو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي. • ددې زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړای شي. • درک کړي چې د 360° او 0° زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي. • د مثلثاتي مسایلو په حل کې ددې زاویو له مثلثاتي نسبتونه څخه ګټه واخیستلای شي او اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	د ورودي چارت له مخې په شکل کې دې وښودل شي چې د $p(0,1)$ نقطه پر مثلثاتي دایره باندې د 90° زاویې پر دویمه ضلعه، د $p(-1,0)$ نقطه د 180° درجې زاویې پر دویمه ضلعه، د $(0,-1)$ نقطه، د 270° زاویې پر دویمه ضلعه او د $(1,0)$ نقطه، د 360° زاویې په لومړۍ او دویمه ضلعه باندې واقع ده.

د لوست بهیر او فعالیتونه (28) دقیقې

ښاغلي ښوونکي دې د شکل له مخې په چارت کې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره د 90° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړي.زده کوونکي دې د 173 مخ فعالیت سرته ورسوي، په همدې ډول دې په شکل کې د 180° زاویې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړي، د (174) فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي په همدې ډول د $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ او $360^\circ = 2\pi$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړي، د (175) مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او د ګروپ نماینده دې خپل کارونه نورو ته توضیح کړي، ښاغلي ښوونکي دې لارښوونه او مرسته وکړي.

د زده کړې پیاوړتیا (7) دقیقې

واضح کړئ چې ددې زاویو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه ولې تعریف شوي نه دي؟

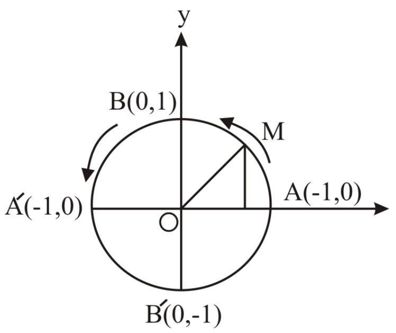
د لوست ارزونه (5) دقیقې

ددې لوست د پوښتنو لومړی پوښتنه حل یا جدول ډک کړئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

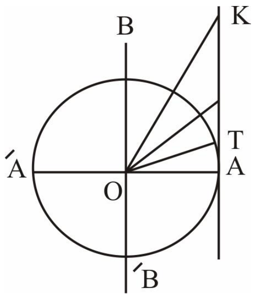
a) د $\sin \propto$ او $\cos \propto$ د مثلثاتي تابعگانو تغيرات:

د M نقطې موقعیت	A B A′ B′ A
د $\overset{\frown}{AM}$ د قوس اندازې	$0 \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi$
$\sin \alpha$	$0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0$
$\cos \alpha$	$1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0 \nearrow 1$



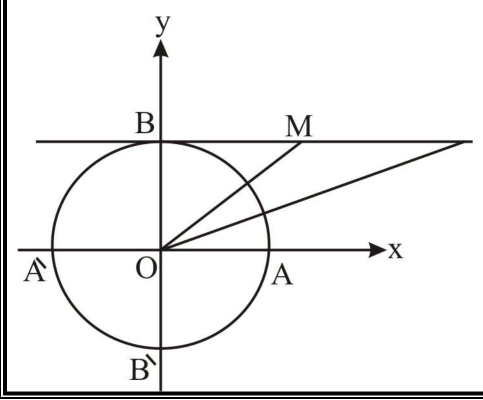
b) د $\tan \propto$ تغيرات:

د M نقطې موقعیت	A	B	A'	B'	A
د $\overset{\frown}{AM}$ د قوس اندازې	$0 \nearrow \frac{\pi}{2} - \varepsilon$		$\frac{\pi}{2} + \varepsilon \nearrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$		$\frac{3\pi}{2} + \varepsilon \nearrow 2\pi$
$\tan \alpha$	$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0$



c) د $\cot \propto$ تغيرات:

د M نقطې موقعیت	A	B	A'	B'	A
د $\overset{\frown}{AM}$ د قوس اندازې		$+\varepsilon \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi - \varepsilon$		$\pi + \varepsilon \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi - \varepsilon$	
$\cot \alpha$		$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$	



د پوښتنو ځوابونه

1- لاندې جدول ډک کړئ:

θ	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$						
$\cos\theta$						
$\tan\theta$						

حل:

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	تعریف شوی نه دی	0	تعریف شوی نه دی	0

2- $\tan 270° = ?$

$a)\ -1$ $b)\ 1$ $c)\ 0$ $d)$ **نه دي تعریف شوي**

حل: $\tan 270^{\circ}$ تعریف شوي نه دی (د d ځواب سم دی).

3- $\cos 90° = ?$

$a)\ -1$ $b)\ 1$ $c)\ 0$ $d)$ **نه دي تعریف شوي**

حل: $\cos 90^{\circ} = 0$ دی، (د c ځواب سم دی).

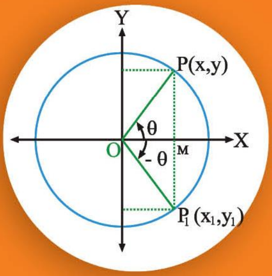
4- ایا د $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{9\pi}{2}$ دی ؟ولې؟

حل: بلې سره مساوي دي.

$$\left.\begin{array}{l}(\frac{3\pi}{2})^{R} = 270^{\circ} \\ (\frac{9\pi}{2})^{R} = 810^{\circ}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\cos 270^{\circ} = 0 \\ \cos 810^{\circ} = 0\end{array}$$

ځکه د (0.1) نقطه د $\frac{9\pi}{2}$ د زاویې پر دویمه ضلعه باندې او د $(0.-1)$ نقطه هم د $\frac{3\pi}{2}$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع ده، نو په پایله کې:

$$\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{9\pi}{2} = 0$$



د يوې حاده زاويې مثلثاتي نسبتونو

اړيکې د نورو زاويو له مثلثاتي نسبتونو سره

د درسي کتاب (177)مخ **د لوست وخت: (1 درسي ساعت)**

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد ددې لوست په پای کې: • د منفي زاويو د مثلثاتي نسبتونو د پيداکولو په طريقه ويوهيږي. • د يوې مثبتې زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې له ددې زاويې سره د مساوي منفي زاويې مثلثاتي نسبتونه پيداکړای شي. • د θ او $-\theta$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو په اړيکه ويوهيږي. • د مثلثاتي مسايلو په حل کې د θ او $-\theta$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو د اړيکو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	زده کوونکو ته توضيح کړئ چې له مثلثاتي جدول څخه يوازې د مثبتو حاده زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکولای شو.

5- د لوست بهير او فعاليت: (28) دقيقې

په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، شاغلي ښوونکي دې لومړی د OMP او OMP_1 د مثلثونو مساوي والي واضح کړي، بيا دې د θ او $-\theta$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې ثبوت کړي.

ښاغلی ښوونکي دې ددې لوست د (177) مخ لومړی مثال زده کوونکو ته په ونډې ورکولو سره حل کړي او ددې لوست لومړی فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې حل کړي، د يوه ګروپ نماينده دې د تختې پر مخ خپل کار زده کوونکو ته توضيح کړي..

بيا دې ښاغلی ښوونکي د (178) مخ دويم مثال د زده کوونکو ته په ونډې اخيستلو سره حل کړي او زده کوونکي دې ددې مخ دويم فعاليت په ګروپونو کې سرته ورسوي او توضيح دې کړي.

6- د زده کړې پياوړتيا (7) دقيقې

د زده کړې د پياوړتيا لپاره دې د پوښتنو لومړۍ پوښتنه حل شي.

7- د لوست ارزونه (5) دقيقې

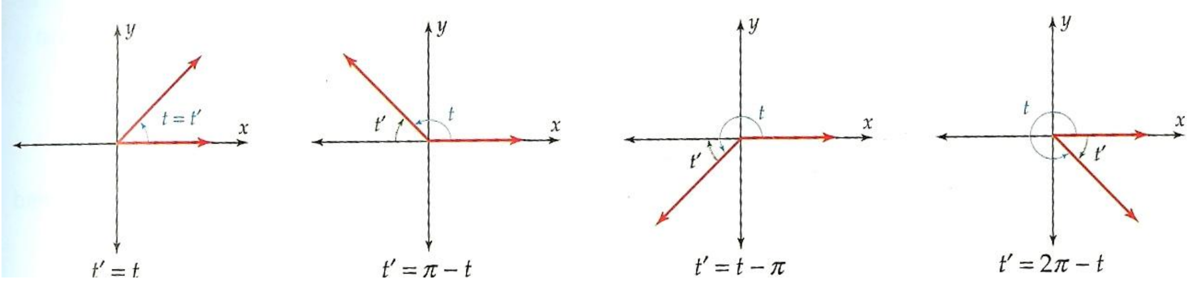
د لوست د ارزونې لپاره دې د پوښتنو دويمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتيء.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

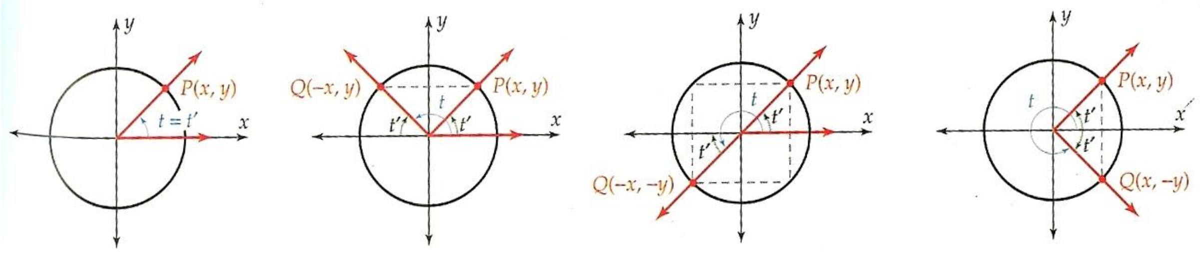
• ماخذه يا اړونده زاويه **(Reference angle or Related angle)**

د t د زاويې لپاره اړونده زاويه هغه مثبته حاده زاويه ده چې د t د زاويې دويمه ضلعه يې د x له محور سره جوړوي

لاندینیو شکلونو ته پام وکړئ چې t' د t د زاویې مربوطه زاویه ده.



مثلثاتي دایره له اړوندې زاویې سره په لومړۍ ناحیه کې:

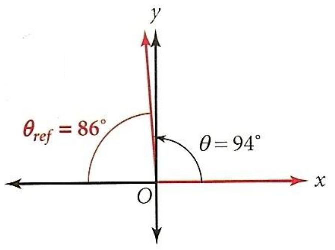


په هر صورت د مثلثونو له انطباق مننې څخه ثبوتیږي چې:

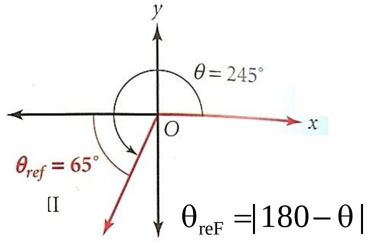
د Q د نقطې د x مختصه $= \pm$ د p نقطې د x له مختصې سره.

د Q د نقطې د y مختصه $= \pm$ د p نقطې د y له مختصې سره.

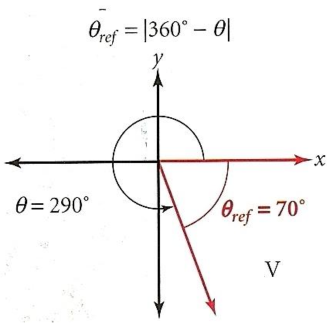
مثال: θ_{ref} د $\mathrm{I}: \theta = 94^\circ$, $\mathrm{II}: \theta = 245^\circ$, $\mathrm{III}: \theta = 290^\circ$ او $\mathrm{IV}: \theta = -110^\circ$ لپاره په لاندې ډول دي.



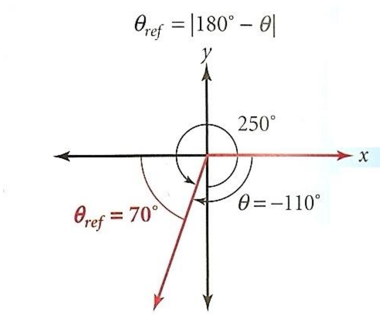
$\theta_{ref} = |180^\circ - 94^\circ| = 86^\circ$



$\theta_{ref} = |180^\circ - 245^\circ| = 65^\circ$



$Q_{ref} = |360^\circ - \theta| = |360 - 290^\circ| = 70^\circ$



$\theta_{reF} = \left|180^\circ - 250^\circ\right| = 70^\circ$

$\theta = -110^\circ$ په دریمه ناحیه کې واقع ده.

د منفي -110° زاویې لپاره مثبته کوترمینل زاویهٔ 250° ده.

$\theta_{reF} = \left|180^\circ - 250^\circ\right| = 70^\circ$

همدارنګه

$\theta = 212^\circ \rightarrow \theta_{ref} = 32^\circ$ $\theta = 47^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 47^\circ$ $\theta = -340^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 20^\circ$

$\theta = 512^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 28^\circ$ $\theta = 40^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 40^\circ$ $\theta = 1112^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 32^\circ$

$\theta = 124^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 56^\circ$ $\theta = 105^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 75^\circ$ $\theta = 270^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 90$

$\theta = -135^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 45^\circ$ $\theta = 1028^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 52^\circ$ $\theta = 108^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 72^\circ$

$\theta = 973^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 73^\circ$ $\theta = 440^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 80^\circ$ $\theta = -225^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 45^\circ$

$\theta = 150^\circ \rightarrow \theta_{reF} = 30^\circ$

د ځینو اساسي مثلثاتي مطابقتونو لنډیز

1- د خارج قسمت مطابقتونه (Quotient Identities)

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

2....... (Reciprocal Identities)

$$\sin t = \frac{1}{\csc t} \qquad \cos t = \frac{1}{\sec t} \qquad \tan t = \frac{1}{\cot t}$$

$$\csc t = \frac{1}{\sin t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

3- فیثاغورثي مطابقتونه (Pythagoream Identities)

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

4- پریودیک مطابقتونه (Periodicity Identities)

$$\sin(t \pm 2\pi) = \sin t \qquad \cos(t \pm 2\pi) = \cos t \qquad \tan(t \pm \pi) = \tan t$$

5- د منفي زاویو مطابقتونه (Negative Angle Identities)

$$\sin(-t) = -\sin t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

6- ....(Identities Involving $\pi - b$)

$$\sin t = \sin(\pi - t) \qquad \cos t = -\cos(\pi - t) \qquad \tan t = -\tan(\pi - t)$$

د پوښتنو ځوابونه

1- د 360° – یا 2π – رادیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل: د 360° – د زاویې مثلثاتي نسبتونه:

$\sin(-360^\circ) = -\sin 360^\circ = 0$

$\cos(-360^\circ) = \cos(360^\circ) = 1$

$\tan(-360^\circ) = -\tan 360^\circ = 0$

$\cot(-360^\circ) = -\cot(360^\circ)$ (تعریف شوی نه دی)

$\sec(-360^\circ) = \sec(360^\circ) = 1$

$\csc(-360) = -\csc(360^\circ) = \frac{1}{0}$ (تعریف شوی نه دی)

2- د 45° – یا $\frac{\pi}{4}$ – رادیان او 30° – او 60° – زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړي.

حل :

$\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan(-45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$ $\cot(-45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$

$$\sec(-45^\circ) = \frac{1}{\cos(-45^\circ)} = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\csc(-45^\circ) = \frac{1}{\sin(-45^\circ)} = \frac{1}{-\sin 45^\circ} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ $\cos(-30^\circ) = \cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$

$$\sec(-30^\circ) = -\frac{1}{\cos(-30^\circ)} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc(-30^\circ) = \frac{1}{\sin(-30^\circ)} = \frac{1}{-\sin 30^\circ} = -2$$

$\sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ $\cot(-60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sec(-60^\circ) = \frac{1}{\cos(-60^\circ)} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

$$\csc(-60^\circ) = \frac{1}{\sin(-60^\circ)} = \frac{1}{-\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3- د -90° یا $-\frac{\pi}{2}$ رادیان زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

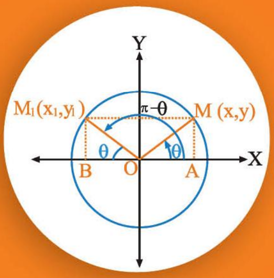
حل:

$\sin(-90^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$ $\sec(-90^\circ) = \frac{1}{\cos 90^\circ}$ (تعریف شوی نه دی).

$\cos(-90^\circ) = \cos 90^\circ = 0$ $\csc(-90^\circ)\frac{1}{-\sin 90^\circ} = -1$

$\tan(-90^\circ) = -\tan 90^\circ$ تعریف شوی نه دی.

$\cot(-90^\circ) = -\cot 90^\circ = 0$



د هغه دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې چې مجموعه يا توپير يې 180° وي

د درسي کتاب (179)مخ د لوست وخت(1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد ددې لوست په پای کې: • د θ د حاده زاويې او د $(180^\circ - \theta)$ زاويې د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په اړيکو وپوهيږي. • د θ د حاده زاويې او د $(180^\circ + \theta)$ زاويې د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په اړيکو وپوهيږي. • د θ د حاده زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د $(180^\circ - \theta)$ او د $(180^\circ + \theta)$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړای شي. • په دې پوه شي څرنګه چې د $(180^\circ - \theta)$ زاويې په دويمه ضلعه په دويمه ناحيه کې واقع ده، نو $\sin(180^\circ - \theta)$ او $\csc(180^\circ - \theta)$ مثبت دي او نور مثلثاتي نسبتونه يې منفي دي. • پوه شي چې د $(180^\circ + \theta)$ زاويې دويمه ضلعه په دريمه ناحيه کې واقع ده، نو $\tan(180^\circ + \theta)$ او $\cot(180^\circ + \theta)$ مثبت او نور مثلثاتي نسبتونه يې منفي دي. • د مثلثاتي مسايلو په حل کې ددې زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ د اړيکو اهميت درک کړي.
د تدريس ميتودونه	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin(135^\circ) = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos(135^\circ) = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ښکاره ده چې: $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ$ $\sin 130^\circ = \sin(180^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ$

د لوست بهیر او فعالیتونه (28) دقیقې

په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، ښاغلي ښوونکي دې واضح کړي چې که د دوو زاویو مجموعه 180° وي، که یوه حاده زاویه θ وي، بله زاویه به $180-\theta$ وي، ځکه چې $180^\circ = \theta + (180^\circ - \theta)$ کیږي.

ښاغلی ښوونکي دې ثبوت کړي چې $O\overset{\Delta}{A}M$ او $O\overset{\Delta}{M_1}B$ مثلثونه سره مساوي دي او بیا دې د θ او $180^\circ - \theta$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو اړیکي واضح کړئ.

زده کوونکي دې د $(\pi - \theta)$ یا $(180^\circ - \theta)$ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه په ګروپونو کې په لاس راوړي.

ښاغلی ښوونکي دې د θ او $(180^\circ + \theta)$ د زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ د اړیکو د پیداکولو لپاره زده کوونکو ته واضح کړئ چې د $O\overset{\Delta}{A}M$ او $O\overset{\Delta}{B}M_1$ مثلثونه سره مساوي دي اودې زاویو د مثلثاتي نسپتونو ترمنځ د اړیکو له پیداکولو وروسته دې د (180) مخ لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

زده کوونکي دې د (181) مخ فعالیت سرته ورسوي او ښوونکي دې د شکل له مخې دویم مثال توضیح کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره دې ددې لوست د پوښتنو لومړی پوښتنه حل شي.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

ددې لوست له پوښتنو څخه دریمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د پوښتنو ځوابونه

1- د 225° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

حل:

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$
$$\cot 225^\circ = \cot(180^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$
$$\sec 225^\circ = \sec(180^\circ + 45^\circ) = -\sec 45^\circ = -\sqrt{2}$$
$$\csc 225^\circ = \csc(180^\circ + 45^\circ) = -\csc 45^\circ = -\sqrt{2}$$

2- د 210° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکړي.

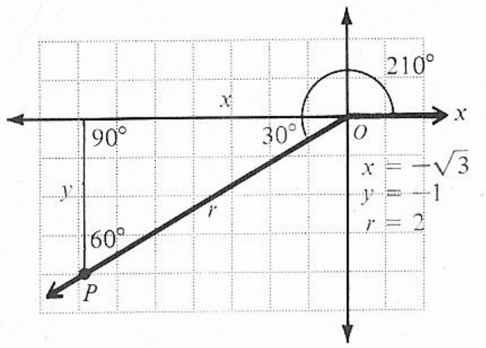
حل:

$$\sin(210^\circ) = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$\cos(210^\circ) = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan(210^\circ) = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot(210^\circ) = \cot(180^\circ + 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec(210^\circ) = \sec(180^\circ + 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc(210^\circ) = \csc(180^\circ + 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$



3- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 150^\circ = \cot(180^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 150^\circ = -\sec(180^\circ - 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$\csc 150^\circ = \csc(180^\circ - 30^\circ) = \csc 30^\circ = 2$$

-4

$$\cot\frac{3\pi}{4} = ?$$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

حل:

$$\cot\frac{3\pi}{4} = \cot(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$$

سم ځواب d دی.

-5

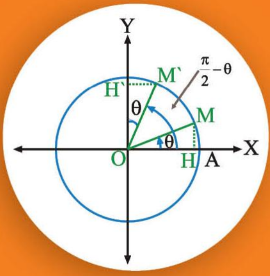
$$\sec(225^\circ) = ?$$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل:

$$\sec(225^\circ) = \sec(180^\circ + 45^\circ) = -\sec 45^\circ = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

سم ځواب b دی.



د هغه دوو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې مجموعه يا توپير يې (90°) يا $\frac{\pi}{2}$ راډيانه وي

د درسي کتاب (183)مخ **د لوست وخت: (1 درسي ساعت)**

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد ددې لوست په پاى کې: • د θ د زاويې له جنسه د $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ زاويې د مثلثاتي نسبتونو د پيداکولو په طريقه وپوهيږي. • د هغه دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په اړيکه وپوهيږي چې مجموعه او يا توپير يې 90° وي او د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه د بلې له جنسه پيداکړاى شي. • د مثلثاتي مسايلو په حلولو کې ددې اړيکو په اهميت پوه شي او دمثلثاتي موضوعګانو له زده کړې سره علاقه مند شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو وروسته په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، د ورودي برخې د پوښتنو ځوابونه توضيح شي. څرنګه چې $30^\circ+60^\circ=90^\circ$ کيږي، نو $\sin 60=\cos 30^\circ$ او څرنګه چې $90+60=150^\circ$ کيږي، نو. $\sin 150^\circ=\sin(90^\circ+60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ $\cos 150^\circ=\cos(90^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 150^\circ=\tan(90^\circ+60^\circ)=-\cot 60^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

د لوست بهير او فعاليتونه (28) دقيقې

ښاغلي ښوونکي دې د ورودي شکل د چارت له مخې توضيح کړي چې د $O\overset{\Delta}{H}M$ او $OH'M'$ مثلثونه سره مساوي دي.
بيا دې د شکل له مخې د $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ زاويې مثلثاتي نسبتونه د θ حاده زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره توضيح کړي. ددې لوست د (183) مخ فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او د يو ګروپ نماينده دې خپل کار نورو ته توضيح کړي، ښاغلي ښوونکي دې د 184 مخ لومړى مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي او د 184 مخ فعاليت دې زده کوونکي حل کړي، په شکل کې دې د هغو دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکه توضيح شي چې توپير يې 90° يا $\frac{\pi}{2}$ راډيانه وي او دويم مثال دې، د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

ددې لوست له پوښتنو څخه دویمه پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د دې لوست د پوښتنو دویمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د پوښتنو ځوابونه

1- د 135° درجو زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin(135^\circ) = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(135^\circ) = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(135^\circ) = \tan(90^\circ + 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$$

$$\cot(135^\circ) = \cot(90^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\sec(135^\circ) = \sec(90^\circ + 45^\circ) = -\csc 45^\circ = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\csc(135^\circ) = \csc(90^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

2- د 150° درجو زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 150^\circ = \cot g(90^\circ + 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 150^\circ = \sec(90^\circ + 60^\circ) = -\csc 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc 150^\circ = \csc(90^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

3- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = ?$

$a)\ \cos x \qquad b)\ \sin x \qquad c) -\cos x \qquad d) -\sin x$

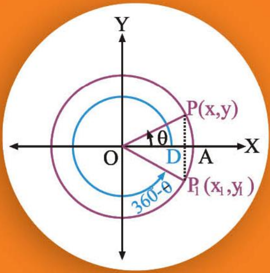
حل:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

4- $\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = ?$

$a)\ \tan\theta \qquad b)\ -\tan\theta \qquad c) \cot\theta \qquad d) -\cot\theta$

حل: $\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan\theta$



د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې چې توپير يا مجموعه يې 2π يا 360° وي

د درسي کتاب (187) مخ   د لوست وخت:(1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکې بايد ددې لوست په پای کې: • د θ حاده زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د $(360^\circ-\theta)$ زاويې د مثلثاتي نسبتونو په پيداکولو وپوهيږي. • دکوټرمينل زاويو د مثلثاتي نسبتونو د پيداکولو په طريقه وپوهيږي. • د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې په څلورمه ناحيه کې واقع دي، پيداکړای شي. • دکوټرمينل زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکړای شي. • د مثلثاتي مسايلو په حلولو کې ددې اړيکو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
3- درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	د لومړنيو فعاليتون له سرته رسولو وروسته د ورودي پوښتنې حل توضيح کړئ څرنګه چې په څلورمه ناحيه کې د زاويو cos او sec مثبت دي او نور پاتې څلور نسبونه يې منفي دي، نو: $\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$

د لوست بهير او فعاليتونه (28) دقيقې

ښاغلي ښوونکی دې: په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، زده کوونکو ته د $\overset{\Delta}{OPD}$ او $\overset{\Delta}{OP_1D}$ مثلثونو مساويتوب ثبوت کړي.

بيا د θ د حاده زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د $(360^\circ-\theta)$ زاويې مثلثاتي نسبتونو پيداکول، زده کوونکو ته توضيح کړي.

د (187) مخ فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او خپل کار دې نورو ته توضيح کړي، بيا دې ښوونکی ددې لوست د (187) مخ لومړی مثال په شکل کې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي او د دې لوست د (188) مخ دويم فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي، بيا دې ښوونکي په شکل کې دکوټرمينل زاويو مثلثاتي نسبتونو پيداکول زده کوونکو ته توضيح کړي او د (189) مخ دويم، دريم، او څلورم مثال دې حل شي، څه وخت چې د (190) مخ پنځم مثال حل شي، د (191) فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

د زده کړې پياوړيتا (7) دقيقې

ددې لوست د (192) مخ لومړی پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه (5) دقیقې

ددې لوست له پوښتنو څخه دویمه پوښته له زده کوونکو وکړئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د -3660° زاويې مثلثاتي نسبتونه عبارت دي له:

څرنګه چې:

$$-3660^\circ + 60 = -3600^\circ = -10 \cdot 360^\circ$$

$$\sin(-3660^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-3660^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-3660^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

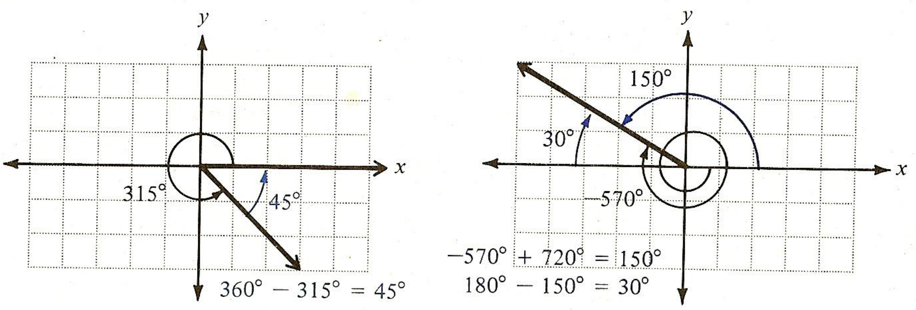
$$\cot(-3660^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- .

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{7\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

- . $\tan(315^\circ)$ ، $\cos(-570^\circ)$ او $\cot 600^\circ$ په لاندې ډول دي.



څرنګه چې د 315° زاويې دويمه ضلع په څلورمه ناحيه کې واقع ده، نو د $\tan 315^\circ$ علامه منفي ده.

$$\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

ترټولو کوچنۍ زاويه چې له -570° سره کوټرمينل وي، عبارت ده له: $-570^\circ + 720^\circ = 150^\circ$

څرنګه چې د 150° زاويې دويمه ضلعه په دويمه ناحيه کې واقع ده، ددې زاويې لپاره يې اړوند زاويه پيدا کوو.

$$180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\cos(-570^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$600^\circ - 360^\circ = 240^\circ$$

$$240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

$$\cot 600^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

د راکړل شوو زاویو ځینې مثلثاتي نسبتونه په لاندې ډول دي:

$\sin 135^\circ \ \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 120^\circ \ -\frac{1}{2}$	$\tan 150^\circ \ -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cos 210^\circ \ -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 225^\circ \ 1$	$\sin 300^\circ \ -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan 330^\circ \ -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sin 0^\circ \ 0$	$\cos 0^\circ \ 1$
$\sin 90^\circ \ 1$	$\cos 90^\circ \ 0$	$\tan 270^\circ$ تعریف شوی نه دی
$\cos 180^\circ \ -1$	$\tan 90^\circ$ تعریف شوی نه دی	$\sin(-90^\circ) \ -1$
$\tan(-180^\circ) \ 0$	$\sin 720^\circ \ 0$	$\cos 1080^\circ \ 1$
$\sin 495^\circ \ \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(-45^\circ) \ -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(-135^\circ) \ -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(-405^\circ) \ -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan(-150^\circ) \ \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan(-30^\circ) \ -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cos 810^\circ \ 0$	$\tan 390^\circ \ \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 780^\circ \ \sqrt{3}$
$\sec 120^\circ \ -2$	$\cot 150^\circ \ -\sqrt{3}$	$\csc(-660^\circ) \ \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cot(-765^\circ) \ -1$	$\sec 405^\circ \ \sqrt{2}$	$\csc 1140^\circ \ \frac{2\sqrt{3}}{3}$

د پوښتنو ځوابونه

1- د 480° او 390° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin 480^\circ = \sin(360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 480^\circ = \cos 120^\circ = \cos(180 - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 480^\circ = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 480^\circ = \frac{1}{\cos 480^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\csc 480^\circ = \frac{1}{\sin 480^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 390^\circ = \tan(360^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 390^\circ = \cot(360^\circ + 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec 390^\circ = \frac{1}{\cos 390^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 390^\circ = 2$$

2- د 600° او 300° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د لومړي جز حل:

$$\sin 600^\circ = \sin(360^\circ + 240^\circ) = \sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 600^\circ = \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 600^\circ = \tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 600^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 600^\circ = -2$$

$$\csc 600^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 300^\circ = \cot(360^\circ - 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 300^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 300^\circ = \cos ec 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

3- د (1830°) او $(1095^\circ\ 20')$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د لومړي جز حل:

$$1830^\circ = (5 \cdot 360^\circ + 30^\circ)$$

$$\sin(1830^\circ) = \sin(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos(1830^\circ) = \cos(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(1830^\circ) = \tan(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot(1830^\circ) = \sqrt{3}$$

$$\sec(1830^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc(1830^\circ) = \csc 30^\circ = 2$$

د دویم جز حل:

$$\sin(1095^\circ\ 20') = \sin(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \sin 15^\circ\ 20' = (0.2644)$$

$$\cos(1095^\circ\ 20') = \cos(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \cos 15^\circ\ 20' = 0.9644$$

$$\tan(1095^\circ\ 20') = \tan(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \tan 15^\circ\ 20' = 0.2742$$

$$\cot(1095^\circ\ 20') = \cot(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \cot 15^\circ\ 20' = 3.6470$$

$\sec(1095^\circ\ 20') = \sec(3\cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \sec 15^\circ\ 20' = 1.037$

$\csc(1095^\circ\ 20') = \csc(3\cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \csc 15^\circ\ 20' = 3.782$

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې:

$\frac{25\pi}{6} = 750^\circ = (2\cdot 360^\circ + 30^\circ)$ يا $\frac{25\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6} = 2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$

نو:

$\sin\frac{25\pi}{6} = \sin(2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad\cos\frac{25\pi}{6} = \cos(2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{25\pi}{6} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad\cot\frac{25\pi}{6} = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ $\quad\sec\frac{25\pi}{6} = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\csc\frac{25\pi}{6} = \csc\frac{\pi}{6} = 2$

5- د $\frac{5\pi}{3} = 300^\circ$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\cos\frac{5\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\tan\frac{5\pi}{3} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ $\quad\cot\frac{5\pi}{3} = \cot(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sec\frac{5\pi}{3} = \sec(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \sec\frac{\pi}{3} = 2$ $\quad\csc\frac{5\pi}{3} = \csc(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\csc\frac{\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

6- د $\frac{41\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

لومړی جز:

$(\frac{41\pi}{6})^R = 1230^\circ = (3\cdot 360^\circ + 150)$

$\sin(\frac{41\pi}{6})^R = \sin(2\cdot 3\pi + \frac{5\pi}{6}) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{41\pi}{6} = \cos(2\cdot 3\pi + \frac{5\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{41\pi}{6} = \tan(2\cdot 3\pi + \frac{5\pi}{6}) = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot\frac{41\pi}{6} = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

$\sec\frac{41\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\csc\frac{41\pi}{6} = \csc\frac{\pi}{6} = 2$

دويم جز:

$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos(\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{4\pi}{3}=\tan(\pi+\frac{\pi}{3})=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$
$$\cot\frac{4\pi}{3}=\cot(\pi+\frac{\pi}{3})=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sec\frac{4\pi}{3}=\sec(\pi+\frac{\pi}{3})=-\sec\frac{\pi}{3}=-2$$
$$\csc\frac{4\pi}{3}=\csc(\pi+\frac{\pi}{3})=-\csc\frac{\pi}{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

دریم جز:

$$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin(\pi-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{3\pi}{4}=\cos(\pi-\frac{\pi}{4})=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\frac{3\pi}{4}=\tan(\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1 \qquad \cot\frac{3\pi}{4}=\cot(\pi-\frac{\pi}{4})=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$$
$$\sec\frac{3\pi}{4}=\sec(\pi-\frac{\pi}{4})=-\sec\frac{\pi}{4}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2} \qquad \csc\frac{3\pi}{4}=\csc(\pi-\frac{\pi}{4})=\csc\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

7- د -300° ، 780° او 420° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

لومړی جز:

$$\sin(-300^\circ)=\sin(-360+60)=\sin\left[-(360-60)\right]=\sin(360^\circ-60^\circ)=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(-300^\circ)=\cos\left[-(360-60)\right]=\cos(360-60)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$
$$\tan(-300^\circ)=\tan\left[-(360^\circ-60^\circ)\right]=-\tan(360^\circ-60^\circ)=(-\tan 60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$
$$\cot(-300^\circ)=\cot\left[-(360^\circ-60^\circ)\right]=-\cot(360-60)=-(-\cot 60^\circ)=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sec(-300^\circ)=\sec\left[-(360^\circ-60^\circ)\right]=\sec(360^\circ-60^\circ)=\sec 60^\circ=2$$
$$\csc(-300^\circ)=\csc\left[-(360-60)\right]=-\csc(360^\circ-60^\circ)=-(-\csc 60^\circ)=\csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

دویم جز:

$$\sin 780^\circ=\sin(2\cdot 360+60)=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 780^\circ=\cos(2\cdot 360+60)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$
$$\tan 780^\circ=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$
$$\cot 780^\circ=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sec 780^\circ=\sec 60^\circ=2$$

$$\csc 780^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دريم جز:

$$\sin 420^\circ = \sin(360+60) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 420^\circ = \cos(360+60) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 420^\circ = \tan(360+60) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 420^\circ = \cot(360+60) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 420^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 420^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

8- $\cos(-3\pi) = ?$

$a)\ 1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)\ \frac{1}{2}$

حل:

$$\cos(-3\pi) = \cos(-2\pi - \pi) = \cos[-(2\pi + \pi)] = \cos(2\pi + \pi) = \cos\pi = -1$$

يا:

$$\cos(-3\pi) = \cos(-\pi) = \cos\pi = -1$$

(د b جز سم دی).

9- $\cos(-15\pi) = ?$

$a)1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)$ درې واړه سم نه دي

حل:

$$\cos(-15\pi) = \cos(-2\cdot 7\pi - \pi) = \cos[-(2\cdot 7\pi + \pi] = \cos(2\cdot 7\pi + \pi) = \cos\pi = -1$$

يا :

$$\cos(-15\pi) = \cos(-\pi) = \cos\pi = -1$$

د b جز سم دی.

10- $\sin(-1110^\circ) = ?$

$a)\frac{1}{2}$ $\quad b)\ -\frac{1}{2}$ $\quad c)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad d)-\frac{\sqrt{3}}{3}$

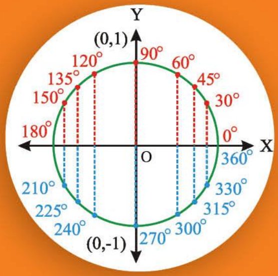
حل:

$$\sin(-1110^\circ) = \sin(-3\cdot 360 - 30) = \sin[-(3\cdot 360 + 30)] = -\sin(360+30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$$

يا:

$$\sin(-1110^\circ) = \sin(-30) = -\frac{1}{2}$$

د b سم دی.



د مثلثاتي تابعګانو ګرافونه

د درسي کتاب (193) مخ **د لوست وخت (2 درسي ساعتونه)**

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د $y=\sin x$ او $y=\cos x$ د تابعګانو د تعريف ناحيه او Range وپيژني. • د $y=\sin x$ او $y=\cos x$ د تابعګانو پريود او لمن وپيژني. • د متناوبو تابعګانو تعريف زده کړي. • د $\sin x$ او $\cos x$ د ګرافونو د رسمولو طريقه زده کړي. • د $\sin x$ او $\cos x$ د تابعګانو په تحول وپوهيږي او ګرافونه يې رسم کړای شي. • د x او y له محورونو سره ددې ګرافونو د تقاطع نقطې پيدا کړای شي، اصغري او اعظمي نقطې يې وښودلای شي. • د مثلثاتي مسايلو په حل کې ددې تابعګانو د ګرافونو د رسمولو اهميت درک کړي او زده کړې ته يې علاقه مند شي .
د تدريس ميتودونه	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارټ، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو وروسته، د ورودي شکل په چارټ کې دې ورودي پوښتنې توضيح شي چې د $\sin x$ او $\cos x$ د تابعګانو پريود 2π او د تعريف ناحيه Domain يې ټول حقيقي عددونه دي.

د لوست بهير او فعاليتونه (28) دقيقې

ښاغلی ښوونکي دې په شکل کې زده کوونکو ته ددې تابعګانو د تعريف او قيمتونو ناحيې توضيح کړي چې $-1\leq \sin x, \cos x \leq 1$ يا ددې تابعګانو Range د $[-1,1]$ انټروال دی.

د (193) مخ پوښتنو ځوابونه دې زده کوونکي ووايي او ښاغلی ښوونکي دې لارښوونه او مرسته وکړي، زده کوونکو ته دې دا خبره واضح شي چې کومو تابعګانو ته متناوبې تابعګانې وايي. ښاغلی ښوونکي دې د درجې او راډيان په حساب د $\sin x$ ګرافونه د درسي کتاب په شان پر تخته رسم او توضيح کړي. چې دا ګراف د x محور په کومو نقطو کې قطع کوي او هم د $\sin x$ د تابع ګراف په کومو انټروالو کې متزايد او په کومو انټروالو کې متناقص دی.

د (196) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي، لومړی او دويم مثال دې ښوونکي د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي، همدارنګه په دريم مثال کې دې د $\sin x$ او $\cos x$ د تابعګانو پريود او لمن زده کوونکو ته توضيح شي.

د زده کونکو په ونډې اخيستنې سره دې ښوونکي د څلورم مثال د تابع ګراف رسم کړي او هم د $\cos x$ د تابع ګراف ددې له

تحول سره د درجې او راډیان په حساب رسم کړي، هم دې تابع د *range* قیمتونه په شکل کې وروښودل شي، د (201) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي او د (201) مخ مثال دې د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره ښاغلی ښوونکي حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

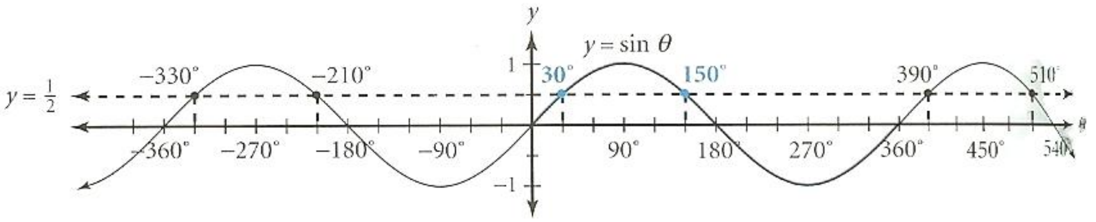
دې لوست له پوښتنو څخه د لومړۍ پوښتنې اړونده $F(t) = \sin t$ تابع گراف د $[2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې رسم کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د لومړۍ پوښتنې دویمه برخه له زده کوونکو وپوښتئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د $[-360^\circ, 540^\circ]$ په انټروال کې د $\theta = -330^\circ, -210^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ$ ، قیمتونو لپاره $y = \sin\theta = \frac{1}{2}$ لاندې شکل وگورئ:



1- د F تابع ته متناوبه تابع ویل کیږي په دې شرط چې د T عدد د صفر خلاف موجود شي چې لومړی باید $x \in D_F$, $x + T$ او $x - T$ هم د F تابع د تعریف په ناحیه کې شامل وي.

دویم دا چې $F(x+T) = F(x)$ وي، تر ټولو کوچنی مثبت عدد، لکه: T ته چې په دې رابطه کې صدق کوي، د F د تابع پریود یا اصلي تناوب وايي. که T د یوې تابع د تناوب دوره وي، نو T− همددې تابع د تناوب دوره ده او څرنگه چې پوهیږو چې $\sin(2k\pi + x) = \sin x$ او $\cos(2k\pi + x) = \cos x$ دی، نو د sin او cos تابعگاني متناوبې دي او 2π تر ټولو کوچني مثبت عدد دی چې په پورتنیو رابطو کې صدق کوي، د مثال په ډول د $F(x) = \sin ax$ تابع د تناوب دوره یا پریود په لاندې ډول په لاس راځي.

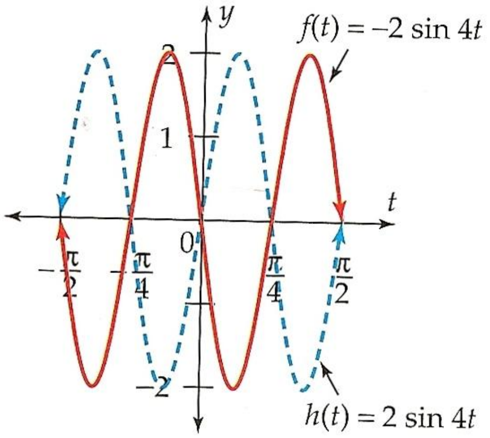
$$F(x+T) = F(x) \Rightarrow \sin a(x+T) = \sin ax$$
$$\sin(ax + aT) = \sin ax$$

دې لپاره چې پورتني مساوات صدق وکړي، نو باید $aT = 2K\pi$ وي چې K یو تام عدد دی او په نتیجه کې $T = \frac{2K\pi}{a}$ کیږي، نو په دې اساس د F تابع یوه متناوبه تابع ده او د تناوب اصلي دوره یې $\frac{2\pi}{|a|}$ ده

همدارنگه د $F(x) = \cos at$ تابع د تناوب دوره هم $\frac{2\pi}{|a|}$ ده.

د لمن یا (Amplitude): که $a \neq 0$ او $b > 0$ وي، د $F(t) = a\sin bt$ او $F(t) = a\cos bt$ د تابعگانو لمن $|a|$ او پریود یې $\frac{2\pi}{b}$ دی.

د مثال په ډول د $F(t)=-2\sin 4t$ د تابع پریود او لمن عبارت ده له $|a|=|-2|=2$ او پریود یې $\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{4}=\frac{2\pi}{b}$ دی او د $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ په انتروال کې ددې تابع ګراف رسم شوی دی.



2- په لنډ ډول ویلای شوو چې که چیرې یوه تابع په مساوي فاصلو کې په منظم او متوالی ډول تکرار شي، داسې تابع متناوبه تابع ا و د تکرار شوو فاصلو اوږدوالي ته د تناوب دوره وایي د مثال په ډول د $g(x)=\sin x$ تابع د$[2\pi,4\pi]$ ، $[4\pi,6\pi]$ ، $[0,2\pi]$ او ... انټروالو کې تکراریږي، نو د تناوب دوره یې 2π ده.

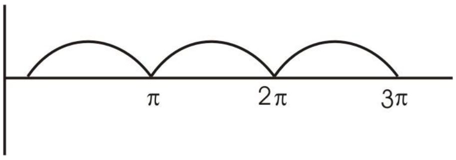
3- پام مو وي چې ځینې وختونه یوه تابع متناوبه وي، لیکن د تناوب اصلي دوره نه لري، د مثال په ډول $f(x)=3$.

4-که د T عدد د F تابع د تناوب اصلي دوره وي، د F د تناوب هره بله دوره د T عدد طبیعي مضرب دی.

د تابع د اصلي تناوب دورې د پیداکولو لپاره یوه طریقه، شهودي طریقه او د ګراف رسمول دي.

د مثال په ډول د $F(x)=|\sin x|$ د تابع د تناوب اصلي دوره په لاندې ډ ول په لاس راځي.

لیدل کیږي چې ددې تابع ګراف د $[0,\pi]$، $[\pi,2\pi]$ او $[2\pi,3\pi]$ او... انټروالو کې تکراریږي، نو ددې تابع د تناوب اصلي دوره (π) ده.



دویمه طریقه: د ریاضیکي طریقې په اساس $F(x+T)=F(x)$ له مساوات څخه د T قیمت په لاس راوړو چې اصلي پریود یې دی.

مثال: د $F(x)=\cos x$ د تناوب اصلي دوره عبارت ده له:

$$F(x+T)=\cos(x+T)$$
$$F(x)=\cos x$$
$$F(x+T)=F(x)\Rightarrow\cos(x+T)=\cos x=\begin{cases}x+T=2K\pi+x, & T=2K\pi, K\in z\\ x+T=2k\pi-x\end{cases}$$
$$T=2\pi,4\pi,6\pi,8\pi..........$$

که چیرې k ته د طبیعي عددونو قیمتونه ورکړو، نو ددې تابع د تناوب اصلي دوره 2π کیږي.

5-که T د F د تابع د تناوب اصلي دوره وي، نو د $F(ax+b)$ تابع هم متناوبه ده او د تناوب دوره یې $T'=\frac{T}{|a|}$ یا $T_{F(ax+b)}=\frac{T_{F(x)}}{|a|}$ دی.

مثال: که د $F(2x)$ د تابع د تناوب اصلي دوره 3 عدد وي، د $y=F(-3x+1)$ د تابع د تناوب اصلي دوره کوم عدد دی؟

$$T_{F(2x)}=\frac{T_{F(x)}}{2}\Rightarrow 3=\frac{T_{F(x)}}{2}\Rightarrow T_{F(x)}=3\cdot 2=6$$

$$T_{F(-3x+1)} = \frac{T_{F(x)}}{|-3|} = \frac{6}{3} = 2$$

نو د $F(-3x+1)$ د تابع د تناوب اصلي دوره د (2) عدد دی.

که 5 تر ټولو کوچنی مثبت عدد وي چې د $F(x+5) = \frac{1}{F(x)}$ رابطه صدق کړي، نو د F د تناوب دوره عبارت ده له:

$$F(x+5+5) = \frac{1}{F(x+5)} \Rightarrow F(x+10) = \frac{1}{F(x+5)}$$

څرنګه چې $\frac{1}{F(x+5)} = F(x)$ ده، نو $F(x+10) = F(x)$ کیږي.

نو د F د تابع د تناوب اصلي دوره د 10 عدد دی.

لنډيز:

د $F(x) = \sin(ax+b)$ تابع د تناوب اصلي دوره $T = \frac{2\pi}{|a|}$ ده.

د $F(x) = \cos(ax+b)$ تابع د تناوب اصلي دوره $T = \frac{2\pi}{|a|}$ ده.

د $F(x) = \tan(ax+b)$ تابع د تناوب اصلي دوره $T = \frac{\pi}{|a|}$ ده.

د $F(x) = \cot(ax+b)$ تابع د تناوب اصلي دوره $T = \frac{\pi}{|a|}$ ده.

-که د F د تناوب دوره د T عدد وي، نو د $g(x) = aF(x) + b$ او $(a \neq 0), g(x) = \frac{a}{F(x)}$ تابعګانو د تناوب دوره هم د T عدد دی.

د $\sin x$ او $\cos x$ د تابعګانو د ګرافونو د رسمولو لپاره باید لاندې مرحلې په نظر کې ونيسو.

1- پریود په لاس راوړئ $(\frac{2\pi}{b})$ او د x پر محور د صفر او $\frac{2\pi}{b}$ نقطې وټاکئ.

2- له صفر څخه تر $\frac{2\pi}{b}$ پورې انټروال په څلورو مساوي برخو وويشئ.

3- هغه نقطې وټاکئ چې ګراف په کې د x محور قطع کوي.

تابع	ګراف د x محور قطع کوي.
$y = a\sin bx$	د $0, \frac{\pi}{b}$ او $\frac{2\pi}{b}$ نقطو کې (د پیل نقطه، د منځ نقطه، د انټروال د پای نقطه)
$y = a\cos bx$	د $\frac{\pi}{2b}, \frac{3\pi}{b}$ نقطو کې (د انټروال په $\frac{1}{4}$ برخه او $\frac{3}{4}$ برخه کې)

4- د ګراف اعظمي او اصغري ټکي وټاکئ.

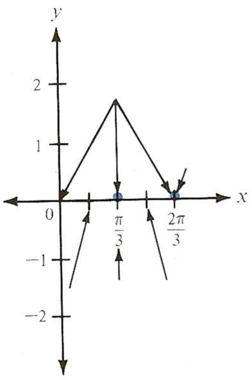
تابع	یوه اعظمي نقطه لري کله چې x مساوي وي په:
$y = a\sin bx$	$\frac{\pi}{2b}$ $(a>0)$ یا $\frac{3\pi}{b}$ د $a<0$ لپاره
$y = a\cos bx$	0 او $\frac{\pi}{2b}$ ده، د $a>0$ د یا د $\frac{\pi}{b}$ د $a<0$ لپاره.

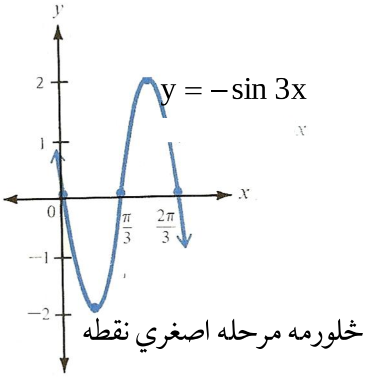
5- په جدول کې څو نورې نقطې هم پیدا کړئ او گراف یې رسم کړئ.

6- د اړتیا په اساس ښې او کیڼې خواته نور پیوودونه علاوه کړئ او گراف یې رسم کړئ.

مثال: د $y=-2\sin 3x$ او $y=3\cos\frac{1}{2}x$ او $y=3\cos 2\theta+1$ د تابعگانو گرافونه رسم کړئ.

د $y=-2\sin 3x$ پریود $\frac{2\pi}{3}$ دی او لمن (amplitude) یې $|-2|$ ده، د پورتنیو مرحلو په پام کې نیولو سره یې گراف رسم کړئ.

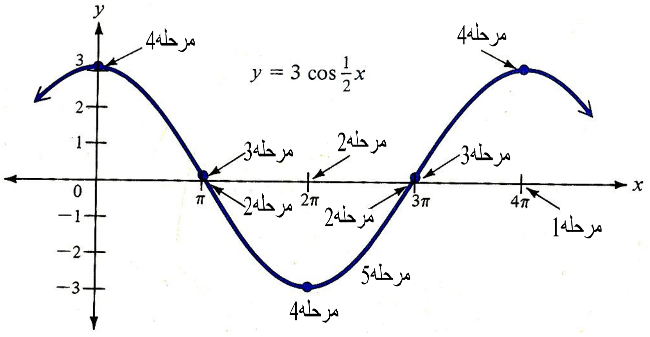


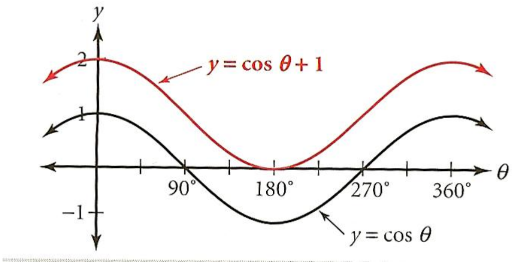


دویمه مرحله انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ.

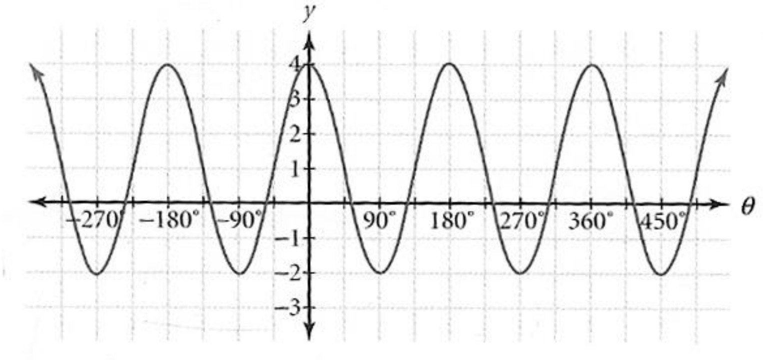
د $y=3\cos\frac{1}{2}x$ د تابع پریود $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ دی او د گراف د رسمولو مرحلې یې په لاندې شکل کې لیدل کیږي.

د $y=\cos\theta$ ، $y=\cos\theta+1$ او $y=3\cos 2\theta+1$ د تابعگانو گرافونه په لاندې شکل کې وگورئ.





$y=3\cos 2\theta+1$

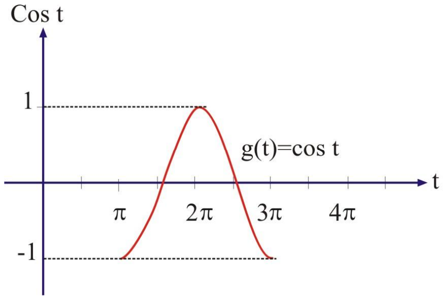


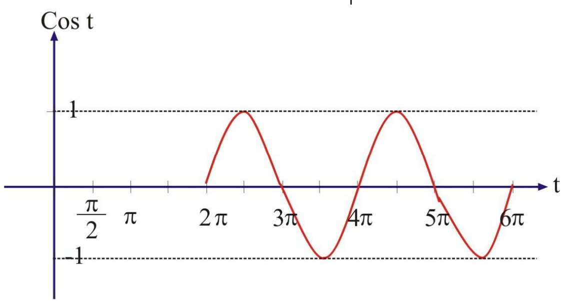
د پوښتنو ځوابونه

1- د لاندینیو تابعگانو گرافونه په راکړل شوو انټروالو کې رسم کړئ

$a)\ f(t)=\sin t\ :[2\pi,6\pi]\qquad b)\ g(t)=\cos t:[\pi,3\pi]$

θ	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$\cos\theta$	-1	0	1	0	-1





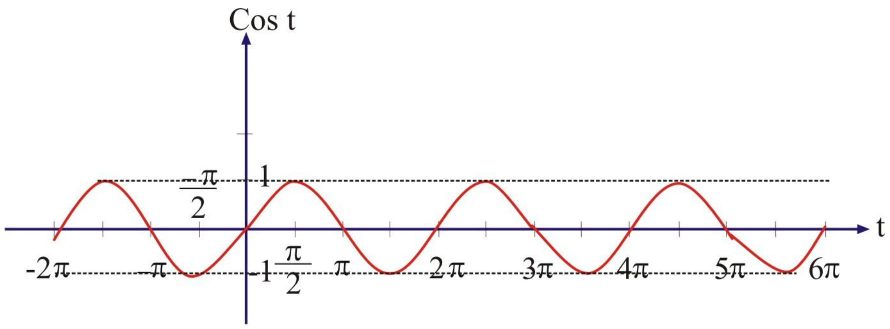
θ	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	$\frac{11\pi}{2}$	6π
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

2- د t دکومو قیمتونو لپاره د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې $\sin t=1$ دی؟

حل:

t	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	$\frac{11\pi}{2}$	6π
$\sin t$	0	1	0	1	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

په پورتني انټروال کې د $(-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2})$ قیمتونو لپاره د $\sin t$ قیمت له 1 سره مساوي دی.

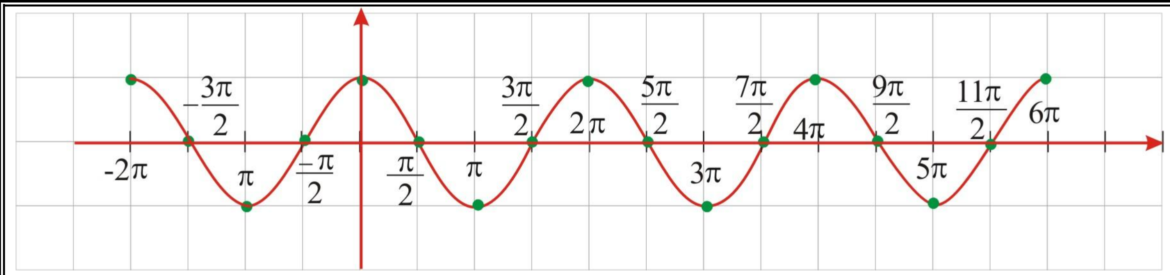


3- د t دکوم قیمت لپاره د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې $\cos t=0$ دی؟

حل:

t	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	
$\cos t$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	

t	$\frac{11\pi}{2}$	6π
$\cos t$	0	1

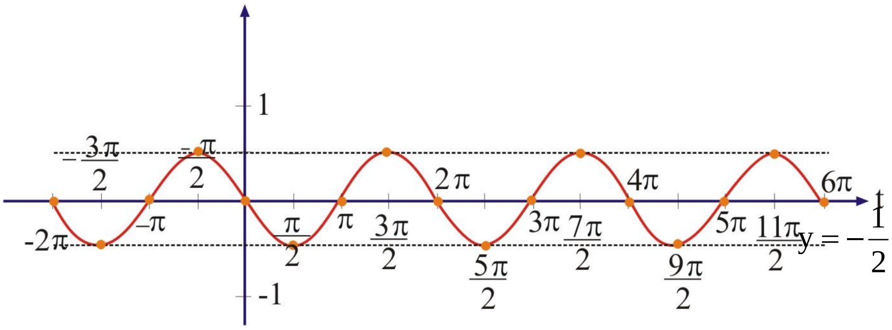


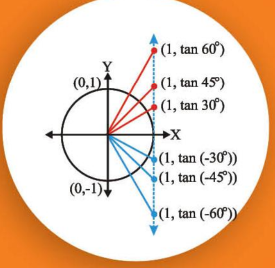
د $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2})$ قيمتونو لپاره په پورتني انټروال کې د $\cos t$ قيمت له صفره سره مساوي دی.

4- د $g(t) = -\frac{1}{2}\sin t$ تابع گراف د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې رسم کړئ.

t	-2π	$-3\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π	$5\frac{\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	$11\frac{\pi}{2}$	6π
$\sin t$	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0
$\frac{1}{2}\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

د $y = -\frac{1}{2}\sin t$ د تابع پریود د 2π او لمن يې $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ده .





د ټانجانټ د تابع ګراف

د درسي کتاب (203) مخ **د لوست وخت (1 درسي ساعت)**

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	دې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • د $f(t) = \tan$ تابع د ګراف د رسمولو طريقه زده کړي. • د $f(t) = \tan t$ د تابع د تعريف او قيمتونو ناحيې وپيژني. • په دې پوه شي چې د ټانجانټ تابع د هغو زاويو لپاره چې cos يې صفر وي تعريف شوي نه ده. • د ټانجانټ د تابع عمودي مجانبونه وپيژني. • ددې تابع پريود وپيژني او وپوهيږي چې دا تابع يوه طاقه او متزايده تابع ده. • ددې تابع ګراف رسم کړای شي او تحول يې درک کړي. • ددې تابع عمودي مجانبونه رسم کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حل‌لو کې ددې تابع د خاصيتونو اهميت درک کړي.
د تدريس ميتودونه	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونه څخه وروسته د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ او ددې پوښتنې ځواب دا دی چې هود تانجانت تابع يوه متزايده تابع ده.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې

ښاغلی ښوونکي دې د ورودي شکل زده کوونکو ته توضيح کړي او د چارت لـه مخې دې د ټانجانـت تـابع ګـراف ورتـه وښـودل شي، هغه زاويې چې cos يې صفر وي، د tan تـابع پـه هغـه قيمتونـوکې عمـودي مجانبونـه لـري، لکـه: د $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ يـا $.....-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$ او داسې نورې زاويې چې د tan د تابع د تعريف په ناحيه کې شاملې نه دي يا د هغو زاويو لپـاره چې د $\frac{\pi}{2}$ طاق مضرب وي، $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ او يا $k\pi + \frac{\pi}{2}$ وي، دا تابع په کې تعريف شوې نه ده.

ددې تابع تحول په جدول او شکل کې واضح کړئ، تر څو زده کوونکي درک کړي چې د tan تابع هر وخـت متزايـده تـابع ده او هم د طاقې تابع د تعريف په اساس $(\tan(-t) = -\tan(t))$ دا هـم درک کـړي چـې دا تـابع يـوه طاقـه تـابع ده ددې تـابع ګـراف د درجې په حساب هم رسم کړئ.

د (205) مخ مثال دې محترم ښوونکي د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل او په شکل کې هغه نقطې چې د tan قيمـت په کې (1-) دی، ورروښودل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

ددې لوست له پوښتنو څخه لومړۍ پوښتنه حل کړئ.

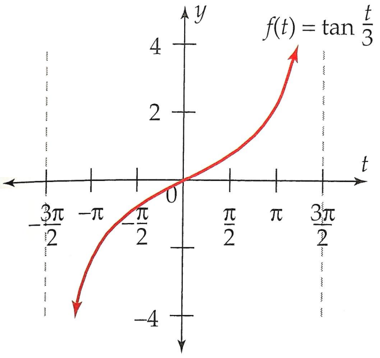
د لوست ارزونه: (5) دقیقې

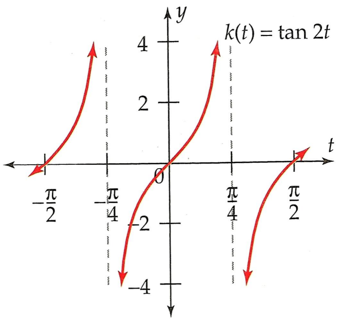
د لوست له لنډیز څخه وروسته له پوښتنو څخه دریمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د $F(t)=\tan(bt)$ که $b>0$ وي د b په اندازه له $-\frac{\pi}{2}$ څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې مکمل دورونه جوړوي ددې تابع پریود $\frac{\pi}{b}$ دی.

د مثال په ډول د $F(t)=\tan 2t$ د تابع پریود $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{b}$ دی چې له $-\frac{\pi}{4}$ څخه تر $\frac{\pi}{4}$ پورې یو مکمل دور جوړوي او د $F(t)=\tan\frac{t}{3}$ د تابع پریود $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$ دی. ددې تابعګانو ګرافونه وګورئ:





د مثال په ډول د $F(x)=\tan(ax)$ د تابع د تناوب دوره یا پریود عبارت دی له:

$F(x+T)=F(x)=\tan a(x+T)=\tan(ax)$

$\tan(ax+aT)=\tan(ax)$

ددې لپاره چې پورتنې مساوات صدق وکړي، باید $aT=K\pi$ وي چې په نتیجه کې $T=\frac{K\pi}{a}$ کیږي چې ددې تابع اصلي پریود $\frac{\pi}{a}$ دی.

- په لنډ ډول د $y=a\tan bx$ د تابع د ګراف د رسمولو مرحلې په یو پریود کې چې $b>0$ وي، په لاندې ډول دي:

1- پریود $\frac{\pi}{b}$ پیدا کړئ.

2- د x پر محور له صفر پیل وکړئ او د پریود د نیمایي په اندازه دوه انټروالونه ښي او کیڼې خواته وټاکئ.

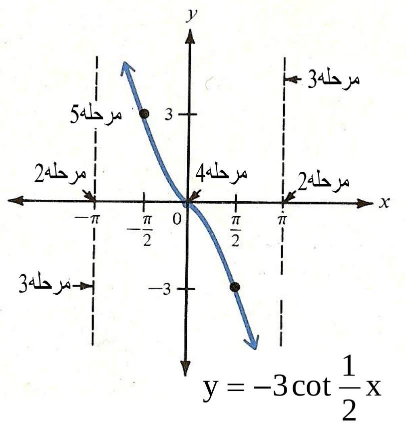
3- د دویمې مرحلې دا انټروال په اخرنیو نقطو کې د ټکو ، ټکو په واسطه عمودي مجانبونه رسم کړئ.

4- د $(0,0)$ نقطه په نښه کړئ.

5- د اړتیا په اساس یو څو نورې نقطې هم علاوه کړئ او ګراف یې رسم کړئ.

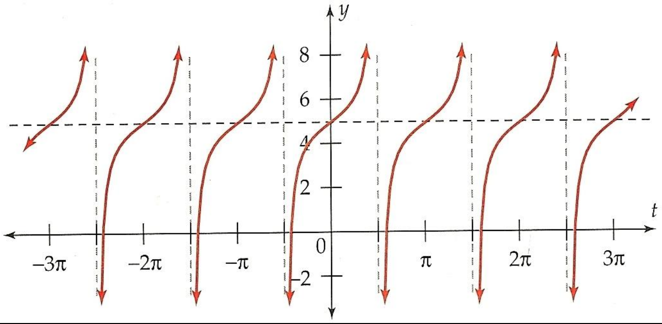
6- ښي او کیڼې خواته د اړتیا په اساس نور پریودونه علاوه کړئ.

د مثال په ډول د $y=-3\cot\frac{1}{2}x$ تابع ګراف په لاندې شکل کې ښودل شوی دی



مثال: د $h(t)=\tan t+5$ د تابع ګراف د $[-3\pi,3\pi]$ په انټروال کې په لاندې ډول دی .

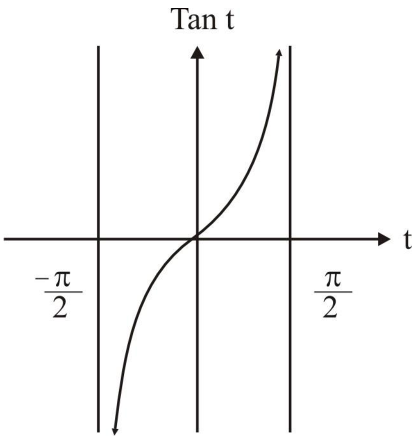
د تابعګانو له بحث څخه پوهیږي، د $F(t)=\tan t$ د تابع ګراف د (5) واحدونو په اندازه پورته خواته انتقال شوی دي.



د پوښتنو ځوابونه

1- د t د زاویې په کوم قیمت د $\tan(t)$ قیمت د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ په انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

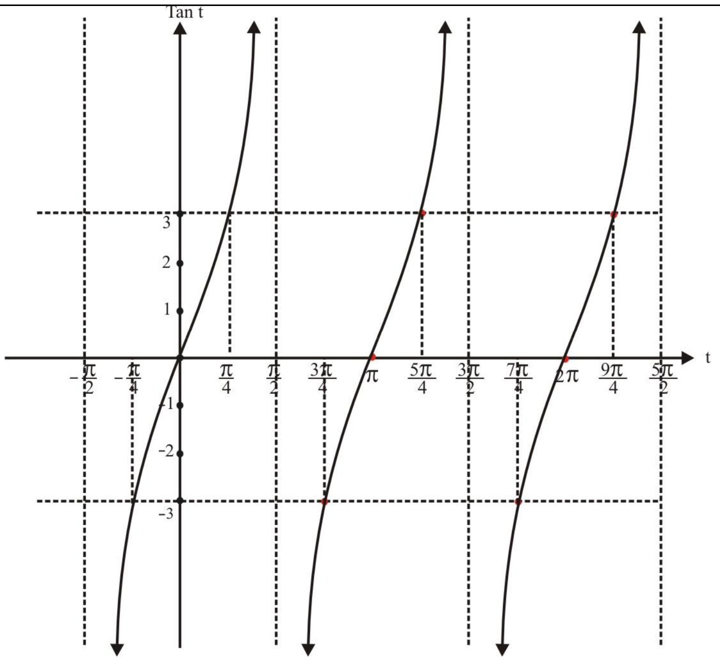
حل:



د $(-\frac{\pi}{2},0)$ په انټروال د $\tan(t)$ قیمت له صفره کوچنی دی.

2- د $y=3\tan\theta$ د تابع ګراف رسم کړی.

حل:



θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$y = 3\tan\theta$	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-3 ↗	0 ↗	3	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-3 ↗	0 ↗	3	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-3 ↗	0 ↗	3	$+\infty$ ‖ $-\infty$

3- د $\tan\theta$ د تابع پریود مساوي دی په:

a) 2π b) π c) 3π d) درې واړه سم نه دي

حل: د $\tan\theta$ د تابع پریود π دی. (د b جز سم دی.)

4-که د θ زاویه له 0° څخه تر 90° پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دی له:

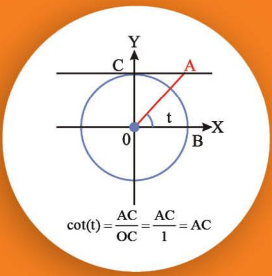
a) له $-\infty$ څخه تر 1- پورې

b) له صفر څخه تر $+\infty$ پورې

c) له $-\infty$ څخه تر $+\infty$ پورې

حل: که θ زاویه له صفر څخه تر 90° پورې تحول وکړي $\tan\theta$ له صفر څخه تر $+\infty$ تحول کوي.

د b جز سم دی.



گراف تابع (t) cotangent،

گراف تابع $\sec ant(t)$ و گراف تابع $\cos ecant(t)$

د درسي کتاب (207)مخ د لوست وخت (2 درسي ساعتونه)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	• زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • د sec, cot او csc د تابعګانو د تعریف او قیمتونو ناحیې وپیژني. • ددې تابعګانو د ګرافونو د رسمولو طریقه زده کړي. • ددې تابعګانو د عمودي مجانبونه معادلې پیدا کړای شي. • وپوهیږي چې د تانجانت د تابع پریود π او sec او csc د تابعګانو پریود 2π دی. • درک کړي چې د cot او csc تابعګاني طاقې او د sec تابع جفته تابع ده . • درک کړي چې د cot تابع یوه متناقصه تابع ده. • ددې تابعګانو ګرافونه رسم کړای شي. • ددې تابعګانو عمودي مجانبونه رسم کړای شي. • ددې تابعګانو تحول درک کړي.
د تدریس میتودونه	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته په داسې حالت کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، د ورودي پوښتنه لـه زده کوونکـو وکـړئ د cot د تـابع پریـود π دی او د هغو زاویو کوټانجانت چې sine یې صفر وي، تعریف شوی نه دی.

5- د لوست بهیر فعالیتونه: (28) دقیقې

په داسې حال کې د cot تابع ګراف د شکل چارت موجود وي، ښـاغلی ښـوونکی دې ددې تـابع د تعریـف او قیمتونـو نـاحیې زده کوونکو ته توضیح کړي، بیا د شکل له مخې د cot د تابع تحول زده کوونکو ته پـه جـدول کـې وروښـودل شـي همدارنګه په شکل کې دې sec د تابع تحول توضیـح شـي، چې زده کوونکـو ددې تـابع د تعریـف او قمیتونـو نـاحیې وپیژنـي او پـه دې وپوهیږي چې په کومو قیمتونو کې چې دا تـابع تعریـف شـوی نـه ده. پـه هغـو قیمتونـو کـې عمـودي مجانبونـه لـري او هـم هغه انټروالونه چې د sec تابع په کې متزایده او یا متناقصه ده په شکل کې وروښودل شي.

د(209) مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او د ګروپونو نماینده دې خپل کار نورو ته توضیح کړي.

که چیرې زده کوونکي ستونزې ولري ښـاغلی ښـوونکي دې لارښـوونه او مرسـته ورسـره وکـړي پـه همـدې ډول د sec د تـابع د تدریس مرحلې د csc د تابع د تدریس په برخه کې تطبیق کړي او د (211)مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

د (212) مخ لومړی او دویمه پوښتنه حل کړي.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

له دې وروسته چې د لوست لنډیز زده کوونکو ته وویل شي دریمه او څلورمه پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د $y = f(t) = \cot(t)$ د تابع گراف له $-\pi$ څخه تر π پورې

پوهیږو چې $\cot(-t) = -\cot(t)$ او $\cot(\pi - t) = -\cot(t)$ دی

د cot د تابع پریود هم π دی، نو ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره کولای شو له لاندې جدول څخه استفاده وکړو.

t	$-\pi$ یا -180°	$-\frac{\pi}{6}$ یا -150°	$-\frac{2\pi}{3}$ یا -120°	$-\frac{\pi}{2}-0$ یا $-90^\circ-0$	$-\frac{\pi}{2}+0$ یا $-90^\circ+0$	$-\frac{\pi}{3}$ یا -60°	$-\frac{\pi}{6}$ یا -30°	0	$\frac{\pi}{6}$ یا 30°	$\frac{\pi}{3}$ یا 60°
$\cot(t)$	$\pm\infty$	1.73	0.58	$+\infty$	$-\infty$	-0.58	-1.73	$\pm\infty$	1.73	0.58

$\frac{\pi}{2}-0$ یا -90°	$\frac{\pi}{2}+0$ یا $90^\circ+0$	$\frac{2\pi}{3}-0$ یا 120°	$\frac{5\pi}{6}-0$ یا 150°	π یا 180°
$+\infty$	$-\infty$	-0.58	-1.73	$\pm\infty$

همدارنگه د $[0,360]$ په انټروال کې د $y = \sec(t)$ د تابع گراف د رسمولو لپاره کولای شو له لاندې جدول څخه استفاده وکړو.

t	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y	1	1.15	2	∞	-2	-1.15	-1	-1.15	-2	$-\infty$	2	1.15	1

Y=csc(t)

t	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\csc(t)$	∞	2	1.15	1	1.15	2	$+\infty$ $-\infty$	-2	-1.15	-1	-1.15	-2	$-\infty$

د پوښتنو ځوابونه

1- د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کومو قیمتونو کې تعریف شوي نه ده؟ ولې؟

حل: څرنګه چې $\cot(t)=\dfrac{\cos t}{\sin t}$ د $\sin t=0$ په قیمتونو کې تعریف شوي نه ده او یا غیر معین ده، ځکه چې د تابع مخرج صفر کیږي.

د $t=n\pi$, (چې n یو تام عدد دی) لپاره د $\sin t$ قیمت صفر کیږي یاپه بل عبارت د $f(t)=\cot(t)$ د تابع قیمت د π د تام مضرب په قیمتونو کې تعریف شوي نه ده.

2- څه وخت چې د θ زاویه له $\dfrac{\pi}{2}$ څخه π ته تحول وکړي د $\cot\theta$ تحول عبارت دی له:

a) $1\to+\infty$ b) $0\to-\infty$ c) دواړه سمې نه دي

جواب: د $\cot$ تحول له صفر څخه $-\infty$ پورې دی. (د b جز سم دی).

3- که $\hat{t}=\pi$ وي، $\cot(t)$ عبارت دی له:

$a)$ صفر $b)$ -1 $c)$ نه دی تعریف شوی

حل: که $\hat{t}=\pi$ وي، د $\cot(t)$ قیمت تعریف شوی نه دی. (د c جز سم دی)

4- د $\sec$ او $\csc$ د تابعګانو $Range$ عبارت دی له:

$a)$ $R-\{x|-1<x<1\}$ $b)$ ټول حقیقي عددونه $c)$ $R-\{x\ |-1\le x\le 1\}$

حل: د $\sec(t)$ او $cse(t)$ د تابعګانو $Range$ له ټولو هغو حقیقي عددونو څخه عبارت دی چې له 1- سره مساوي او یا تر ې کوچنی وي او یا یو او یا له یوه څخه لوی وي. (د c جز سم دی).

5- د $F(t)=\csc t$ د تابع د تعریف ساحه $(Domain)$ عبارت ده، له:

a) ټول حقیقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقیقي عددونه پرته د $\dfrac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقیقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه

d) درې واړه سمې نه دي

حل: د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه دي، پرته د π له تام مضرب څخه: (د a جز سم دی).

6- د $F(t)=\csc t$ تابع د $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

$a)$ متزایده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ نه متزایده او نه متناقصه ده

حل: د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ په انتروال کې متناقصه ده:

حل: (b) جز سم دی.

د څپرکي د پوښتنو ځوابونه

1- د 42.6033° زاویه په درجه، دقیقه او ثانیه بدله کړئ.

حل: $42.6033^\circ = 42^\circ + (0.6033\cdot 60)' = 42^\circ(636.198) = 42^\circ + 36' + (0.198\cdot 60)'' = 42^\circ\ \ 36^\circ\ \ 11.8''$

2- که د یوه ساعت د ثانیې د عقربې دوران 3 دقیقې او 25 ثانیې وي، د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړې وي؟

حل: په دریو دقیقو کې د ثانیې عقربه درې دورونه $(3\cdot 2\pi)=6\pi$ طی کوي او په $(25)''$ کې کومه زاویه چې طی کوي عبارت ده له:

$$\left.\begin{array}{l} 30'' \text{——} \pi^R \\ \\ 25'' \text{——} x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{25\cdot\pi^R}{30} = \left(\frac{5\pi}{6}\right)^R$$

په نتیجه کې طی شوې زاویه مساوي ده په:

$$6\pi + \frac{5\pi}{6} = \left(\frac{41\pi}{6}\right)^R$$

$$\frac{6\pi + 5\pi}{6} = \left(\frac{41\pi}{6}\right)^R$$

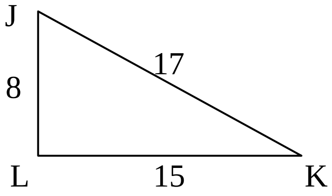
3- د JLK په مثلث کې لاندې قیمتونه پیدا کړئ.

$$\sin k = \frac{8}{17} \approx 0.4706 \quad , \quad \sin J = \frac{15}{17} \approx 0.8824 \quad , \quad \cos J = \frac{8}{17} \approx 0.4706$$

$$\cos k = \frac{15}{17} \approx 0.8827 \quad , \quad \tan k = \frac{8}{15} \approx 0.5333 \quad , \quad \tan J = \frac{15}{8} = 1.875$$

$$\sec k = \frac{17}{15} \approx 1.333 \quad , \quad \sec J = \frac{17}{8} = 2.125 \quad , \quad \cot J = \frac{8}{15} \approx 0.5333$$

$$\cot k = \frac{15}{8} = 1.875 \quad , \quad \csc J = \frac{17}{15} \approx 1.1333 \quad , \quad \csc k = \frac{17}{8} = 2.125$$



4- که د یوې دایرې شعاع $20cm$ او د مرکزي زاويې مقابل قوس یې $S = 85cm$ وي مرکزي زاویه څو راډیانه ده؟

حل:

$R = 20cm$

$s = 85cm \qquad \theta = \frac{S}{R} = \frac{85cm}{20cm} = \left(\frac{17}{4}\right)^R$

$\theta = ?$

5- د 1 راډیان او 2 راډیان مرکزي زاویو د مقابلو قوسونو اوږدوالی پیدا کړئ په دې ډول چې د دایرې قطر $10cm$ وي.

حل:

$\theta = 1^R$

$R = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow R = 5cm \qquad S = R\cdot\theta = 1\frac{cm}{cm}\cdot 5cm = 5cm$

$s = ?$

دویم جز:

$$S = 2\frac{cm}{cm}\cdot 5cm = 10cm$$

6- د لاندې راکړل شوو زاویو دویمې ضلعې چیرې واقع کیږي؟.

$$\frac{3\pi}{2}\ ,\quad -7\pi\ ,\quad \frac{11\pi}{2}\ ,\quad -500^\circ\ ,\quad -\pi\ ,\quad 900^\circ$$

حل: د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې دویمه ضلع د y د محور په منفي جهت پرته ده.

د -7π د زاویې دویمه ضلع د x د محور په منفي جهت پرته ده.

د $-\frac{11\pi}{2}$ د زاویې دویمه ضلع د y د محور په مثبت جهت پرته ده.

د -500° د زاویې دویمه ضلع په دریمه ناحیه کې پرته ده.

د $-\pi$ د زاویې دویمه ضلع د x د محور په منفي جهت پرته ده.

د 900° زاویې دویمه ضلع هم د x د محور په منفي جهت پرته ده.

7- لاندې زاویې چې په راډیان راکړل شوي دي، په درجه یې واړوئ.

$$\frac{\pi}{8}\ ,\ \frac{\pi}{15}\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\frac{17\pi}{45}$$

حل:

$$\frac{\pi^R}{8}\cdot(\frac{180^\circ}{\pi}) = \frac{180^\circ}{8} = 22{,}5^\circ \qquad \frac{\pi^R}{15}\cdot(\frac{180^\circ}{\pi}) = \frac{180}{15} = 12^\circ$$

$$(\frac{\pi^R}{4})\cdot(\frac{180^\circ}{\pi}) = 45^\circ \qquad \frac{\pi^R}{3}\cdot(\frac{180^\circ}{\pi}) = 60^\circ$$

$$\frac{\pi^R}{2}\cdot(\frac{180^\circ}{\pi}) = 90^\circ \qquad \frac{\pi^R}{6}\cdot(\frac{180^\circ}{\pi}) = 30^\circ$$

$$\frac{17\pi^R}{45}\cdot(\frac{180^\circ}{\pi}) = 68^\circ$$

8- په 54 دقیقو کې د یوه ساعت د دقیقې او د ساعت عقربه هره یوه څو راډیانه طی کوي؟

حل:

$$60' \text{——} 2\pi$$

$$54 \text{——} x$$

$$x = \frac{54\cdot 2\pi}{60}$$

$x = (\frac{9\pi}{5})^R$ (د دقیقې عقربه)

$$60' \text{——} \frac{\pi}{6}$$

$$54 \text{——} x$$

$$x = \frac{54\cdot\frac{\pi}{6}}{60}$$

$x = (\frac{3\pi}{20})^R$ (د ساعت عقربه)

9-که د یوه ټراکټور د کوچني ټایر قطر یو متر ا و د لوی ټایر قطر یې 120cm وي، څه وخت چې کوچني ټایر د 70° درجو په اندازه وڅرخیږي، لوی ټایر څو راډیانه طی کوي؟

حل: خرنگه چې $S_1 = S_2$ او $70^\circ = 70\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{7\pi^R}{18}$:

$$r_1\theta_1 = r_2\cdot\theta_2$$

$$\theta_2 = \frac{r_1\cdot\theta_1}{r_2} = \frac{100cm\cdot\frac{7\pi}{18}}{120cm} = \frac{700\pi}{120\cdot18} = (\frac{35\pi}{108})^R$$

10- يو څرخ په يو ساعت کې $300\,\mathrm{Re}\,v$ دورانونه څرخي، دا څرخ په يوه ثانيه کې څو راډيانه طی کوي؟

حل:

دورانونه	ساعت
300	$1=$
x	$\frac{1}{3600}=$

دور $\frac{1}{12} = \frac{1}{3600}\cdot300 =$ په يوه ثانيه کې دورانونه

$1\longrightarrow 2\pi^R$

$\frac{1}{12}\longrightarrow x$

$\frac{\pi^R}{6} = 2\pi^R\cdot\frac{1}{12} =$ په يوه ثانيه کې طی شوي زاويه

په يوه ثانيه کې $\frac{\pi}{6}$ راډيانه يا 30° قوس طی کوي.

11- د يو مثلث زاويې په ترتيب سره $4x$ درجې $\frac{70x}{9}$ گراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډيان دي هره يوه زاويه څو درجې ده؟

حل:

$$4x^\circ + (\frac{70x}{9}\cdot\frac{9}{10})^\circ + (\frac{\pi x}{20}\cdot\frac{180}{\pi})^\circ = 180^\circ$$

$$4x + 7x + 9x = 180^\circ$$

$$20x = 180^\circ$$

$$x = 9^\circ$$

نو زاويې عبارت دي له:

$$36^\circ + 64^\circ + 81^\circ = 180^\circ$$

$$4\cdot9 = 36^\circ$$

$$7\cdot9 = 63^\circ$$

$$9\cdot9 = 81^\circ$$

12- A , B , C, D د يوې څلور ضلعې زاويې دي که $\hat{A}+\hat{D} = 240^\circ$ او $\hat{C}+\hat{D} = 200g$ او $\hat{B}+\hat{D} = \frac{2\pi^R}{3}$ وي، ددې څلور ضلعې زاويې د درجې په حساب پيدا کړئ.

حل: خرنگه چې $200^g = 180^\circ$ او $\frac{2\pi^R}{3} = 120^\circ$ کيږي، نو:

$$\hat{A}+\hat{D} = 240^\circ$$

$$\hat{C}+\hat{D} = (200\cdot\frac{9}{10})^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{B}+\hat{D} = (\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{180}{\pi})^\circ = 120^\circ$$

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$

$\hat{A}=240-D$

$\hat{B}=120-D$

$\hat{C}=180-D$

همدارنگه:

$(240-D)+(120-D)+(180-D)+D=360^\circ$

$-2D+540=360 \Rightarrow 2D=180^\circ$

$\hat{D}=90^\circ$

$\hat{A}=240^\circ-90^\circ=150^\circ$

$\hat{B}=120^\circ-90^\circ=30^\circ$

$\hat{C}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

13- د یوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

$a=30^\circ$ $\quad b: \frac{\pi}{6}$ *radian* $\quad c: \frac{100}{3}g$ $\quad d$: دري واړه سمې دي

حل:

$\frac{1}{12}\cdot 2\pi^R=\frac{\pi^R}{6}=30^\circ=(\frac{100}{3})^g$

(د d جز سم دی).

14- د دوو زاویو مجموعه 17° او د تفریق حاصل یې 17g دی، ددې دواړو زاویو پراخوالی پیدا کړئ.

$\hat{A}+\hat{B}=17^\circ ... \text{I}$

$\hat{A}-\hat{B}=15.3^\circ ... \text{II}$ $\qquad 17g(\frac{9}{10})=(\frac{153}{10})^\circ=15.3^\circ$

$2A=32.3$ $\qquad A=\frac{32.3}{2}=(16.15)^\circ=16^\circ \quad 9'$

$\hat{B}=17^\circ-16.15^\circ=0.85^\circ=51'$

15- د درجې په حساب د دوو زاویو مجموعه x او تفاضل یې د گراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

$A+B=x^\circ$

$A-B=(\frac{9}{10}x)^\circ$

$2A=\frac{19x}{10}$

$A=(\frac{19x}{20})^\circ$

$(\frac{19x}{20})^\circ+B=x^\circ$

$B=x-\frac{19x^\circ}{20}=\frac{x^\circ}{20}$

16- لاندې زاویې د درجې په اعشاري شکل ولیکئ.

$47^\circ\ 15'\ 36''$ $\qquad 15^\circ\ 24'\ 45'$

حل:

$$47^\circ\ 15'\ 36''=47^\circ+(\frac{15}{60})^\circ+(\frac{36}{3600})^\circ=\ 47^\circ+(0.25)^\circ+0.01=47^\circ.26^\circ$$

$$15^\circ\ 24'\ 45'=15^\circ+(\frac{24}{60})^\circ+(\frac{45}{3600})^\circ=15^\circ+(0.4)^\circ+0.0125=(15.4125)^\circ$$

17- د لاندې زاويې په درجه، دقيقه او ثانيې (D.M.S) واړوئ.

حل:

23.16° $\qquad$ 4.2075°

$$23.16^\circ=23^\circ+(0.16\cdot 60)'=23^\circ+(9.60)'=23^\circ+9'+(0.6\cdot 60)''=23^\circ\ 9'\ 36''$$

$$4.2075^\circ=4^\circ+(0.2045\cdot 60)'=4^\circ+12'+(0.27\cdot 60)''=4^\circ\ 12'\ 16.2''$$

18- $\sin(-\frac{\pi}{3}),\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ پيدا کړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\frac{3\pi}{4})=\tan(3\cdot 45)^\circ=\tan(135^\circ)=\tan(180^\circ-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$$

يا

$$\tan(\frac{3\pi}{4})=\tan(\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\cot(\frac{7\pi}{6})=\cot(7\cdot 30)^\circ=\cot(210^\circ)=\cot(180^\circ+30^\circ)=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$$

يا

$$\cot(\frac{7\pi}{6})=\cot(\pi+\frac{\pi}{6})=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

19- د $[-2\pi.2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قيمت $\sin\theta=1$ دی؟

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

20 د $[-2\pi,2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع د θ په کومو قيمتونو کې عمودي مجانب لري؟

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

حل: په هغه قيمتوکو کې چې $\cos\theta=0$ وي، د $\tan\theta$ تابع عمودي مجانب لري.

$$\cos(-\frac{3\pi}{2})=0\ ,\ \cos(-\frac{\pi}{2})=0\ ,\ \cos\frac{\pi}{2}=0\ ,\ \cos\frac{3\pi}{2}=0$$

نو د $\tan\theta$ تابع د $[-2\pi,2\pi]$ په انټروال کې د $-\frac{3\pi}{2},\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ په قيمتونو کې عمودي مجانب لري.

21- له $(i)-(iii)$ پورې کومه اړيکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x)=-\sin x$

(ii) $\cos(-x)=-\cos x$

(iii) $\tan(-x)=-\tan x$

$a)$ (i) و (ii) سمې دي.

$b)$ فقط ii سمه ده.

$c)$ (i) و iii سمې دي.

$d)$ درې واړه سمې دي.

$e)$ هيڅ يو هم سمه نه ده.

حل: (c) جز سم دي.

-22 $\sin(-13\pi), \cos\dfrac{47\pi}{2}$ او $\tan\dfrac{8\pi}{3}$ پيدا کړئ.

حل:

$$\cos\frac{47\pi}{2} = \cos(11\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$
$$\sin(-13\pi) = -\sin 13\pi = -\sin(6\cdot 2\pi + \pi) = \sin\pi = 0$$
$$\tan\frac{8\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \tan\frac{2\pi}{3} = \tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

-23 داسې زاويه پيدا کړئ چې که دګراد په حساب يې له مقداره 23 واحده کم کړو، د زاويې مقدار په درجه لاس ته راشي.

حل:

$$\frac{10}{9}\mathrm{D} - 23 = \mathrm{D} \Rightarrow 10\mathrm{D} - 207 = 9\mathrm{D} \Rightarrow \mathrm{D} = 207^\circ = (207+23)^g = 230^g = 207^\circ$$

-24 د دريو زاويو مجموعه 240 ګراده ده که لومړنۍ زاويه 40 ګراده اودويمه $\dfrac{3\pi}{4}$ راډيانه وي، دريمه زاويه څو درجې ده؟

حل:

$$(40\cdot\frac{9}{10})^\circ + (\frac{3\pi^R}{4}\cdot\frac{180}{\pi})^\circ + x^\circ = (240\cdot\frac{9}{10})^\circ$$
$$36^\circ + 135^\circ + x^\circ = 216^\circ$$
$$171^\circ + x^\circ = 216^\circ$$
$$x^\circ = 216^\circ - 171^\circ = 45^\circ$$

دريمه زاويه45 درجې يا 50 ګراده ده($50^g\cdot\dfrac{9}{10} = 45^\circ$ کيږي).

-25 د 4185° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin 4185^\circ = \sin(11\cdot 360 + 225) = \sin 225 = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 4185^\circ = \cos(11\cdot 360 + 225) = \cos 225 = \cos(180 + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 4185 = \mathrm{tg}45^\circ = 1$$
$$\sec 4185 = -\sec 45^\circ = -\sqrt{2}$$
$$\cot 4185 = \cot 45^\circ = 1$$
$$\csc 4185 = -\csc 45^\circ = -\sqrt{2}$$

-26 د $\left(-3660^\circ\right)$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: $\sin\left(-3660^{\circ}\right) = -\sin 3660^{\circ} = -\sin\left(10\cdot 360+60\right) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-3660) = \cos 3660 = \cos(10\cdot 360+60) = \cos 60 = \frac{1}{2}$

$\tan(-3660) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$

$\cot(-3660) = -\cot 60 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec(-3660) = \sec 60 = 2$

$\csc(-3660) = -\csc 60 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

27- د $y=\cos\theta$ تابع د $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ په انتروال کې:

$a)$ متزایده ده $\quad$ $b)$ متناقصه ده $\quad$ $c)$ هم متزایده ده هم متناقصه

حل: متزایده ده د a جز سم دی.

28- د $\mathrm{y}=\tan\theta$ د تابع پریود عبارت دی له:

$a)\ 2\pi$ $\quad$ $b)\ \pi$ $\quad$ $c)\ \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $d)\ \frac{3\pi}{2}$

حل: پریود یې π دی(b جز سم دی).

29- د $F(t)=\cot(t)$ تابع:

a) جفته ده $\quad$ b) طاقه ده $\quad$ c) نه جفته او نه طاقه ده

حل: د $f(t)=\cot(t)$ یو تاقه تابع ده د b جز سم دی.

30- هغه تابع چې گراف یې نظر مبدا ته سره متناظر وي.

a) جفته ده $\quad$ b) طاقه ده $\quad$ c) نه جفته او نه طاقه ده

حل: طاقه ده د b جز سم دی.

31- د $y=\cos\theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده له:

$a)\ \pi$ $\quad$ $b)\ \frac{3\pi}{2}$ $\quad$ $c)\ 2\pi$ $\quad$ $d)\ 3\pi$

حل: 2π ده د c جز سم دی.

32- $\sin 67^{\circ}$ د $\sin 787^{\circ}$ سره څه اړیکه لري ؟

$a)\ \sin 787° > \sin 67°$ $\quad$ $b)\ \sin 787° < \sin 67°$ $\quad$ $c)\ \sin 67° = \sin 787°$

حل: $\sin 787^{\circ} = \sin\left(2\cdot 360+67\right) = \sin 67^{\circ}$

یو له بله سره مساوي دي (د c جز سم دی).

33- کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\sec 135^{\circ} = -\csc 45^{\circ}$ $\quad$ b) $\sec 135^{\circ} = \csc 40^{\circ}$ $\quad$ d) $\sec 135^{\circ} = -\sec 45^{\circ}$ $\quad$ c) $\sec 135^{\circ} = -\sec 45^{\circ}$

حل: د c جز سم دی.

34-کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240^\circ = \tan 60$ b) $\tan 240^\circ = -\tan 60^\circ$

c) $\tan 240^\circ = \cot 60^\circ$ d) $\tan 240^\circ = -\cot 60^\circ$

حل: د a جز سم دی.

$\cot 0^\circ = ?$ -35

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی.

تعریف شوی نه ده (د d جز سم دی).

$\cos 9\pi = ?$ -36

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)\frac{1}{2}$

حل: b جز سم دی.

$\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$ -37

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ درې واړه سم نه دي

حل:

$$\sin(-\frac{13\pi}{2}) = -\sin\frac{13\pi}{2} = -\sin\left(3\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

38 - د -2430° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin\left(-2430^\circ\right) = -\sin 2430^\circ = -\sin(6\cdot 360 + 270)^\circ = -\sin 270 = 1$$
$$\cos\left(-2430^\circ\right) = \cos 2430^\circ = \cos(6\cdot 360 + 270)^\circ = \cos 270 = 0$$

$\tan(-2430^\circ)$ (غیر معین)

$\cot(-2430^\circ) = 0$

$\sec(-2430^\circ)$ (غیر معین)

$\csc(-22430^\circ) = 1$

$\sin(270^\circ - \theta) = ?$ -39

$a)\sin\theta$ $b)-\sin\theta$ $c)\cos\theta$ $d)-\cos\theta$

حل: $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$ حل: d سم دی.

40

$\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی.

حل:

$$\sin(-\frac{9\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = 1$$

جز سم دی. b

-41

$\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی.

حل:

$$\sec(-\frac{9\pi}{2}) = \frac{1}{\cos(-\frac{9\pi}{2}} = \frac{1}{\cos(\frac{9\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$$

حل: تعریف شوی نه دی، نو d جز سم دی.

$\tan(-15\pi) = ?$ -42

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی.

حل:

$$\tan(-15\pi) = -\tan 15\pi = \tan(7\cdot 2\pi + \pi) = \tan\pi = 0$$

حل: c جز سم دی.

$\sec(-1530^\circ) = ?$ -43

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی.

حل: $\sec(-1530) = \sec(4\cdot 360 + 90) = \sec 90 =$ (تعریف شوی نه دی)

$\cot(-2430°) = ?$ -44

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی.

حل:

$$\cot(-2430^\circ) = -\cot 2430 = -\cot(6\cdot 360 + 270)$$
$$= -\cot 270 = -\cot(180 + 90) = -\cot 90 = 0$$

د c جز سم دی.

$\mathrm{Sin}(\frac{235\pi}{2}) = ?$ -45

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی.

حل:

$$\mathrm{Sin}\frac{235\pi}{2} = (58\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}) = \mathrm{Sin}(\frac{3\pi}{2}) = -1$$

حل: b سم دی.

$\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$ -46

a) 1 b) 0 c) -1 d تعریف شوی نه دی

حل:

$$\cos(\frac{407\pi}{2}) = \cos(203\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

د b جز سم دی.

47- $\tan(90^\circ + \theta) = ?$

$a)\ \cot\theta \qquad b) -\cot\theta \qquad c)\ -\tan\theta \qquad d)\tan\theta$

حل:

$$\tan(90^\circ + \theta) = \tan(90^\circ - (-\theta)) = \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

د b جز سم دی.

48- $\tan(270^\circ + \theta) = ?$

$a)\ \cot\theta \qquad b)\ -\cot\theta \qquad c)\ \tan\theta \qquad d) -\tan\theta$

حل:

$$\tan(270^\circ + \theta) = \frac{\text{Sin}(270^\circ + \theta)}{\text{Cos}(270^\circ + \theta)} = \frac{-\text{Cos}\theta}{\text{Sin}\theta} = -\cot\theta$$

د b جز سم دی.

49- $\text{Sin}(-1980) = ?$

$a)\ 1 \qquad b)\ -1 \qquad c)\ 0 \qquad d)\frac{1}{2}$

حل:

$$Sin(-1980)^\circ = -\sin(1980^\circ) = -\sin(5\cdot 360^\circ + 180^\circ) = -\sin 180^\circ = 0$$

د c جز سم دی.

50- $\text{Sin}(-\frac{3\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1 \qquad b)\ -1 \qquad c)\ 0 \qquad d)\frac{1}{2}$

حل:

$$\text{Sin}(-\frac{3\pi}{2}) = \sin(2\pi - \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

حل: a جز سم دی.

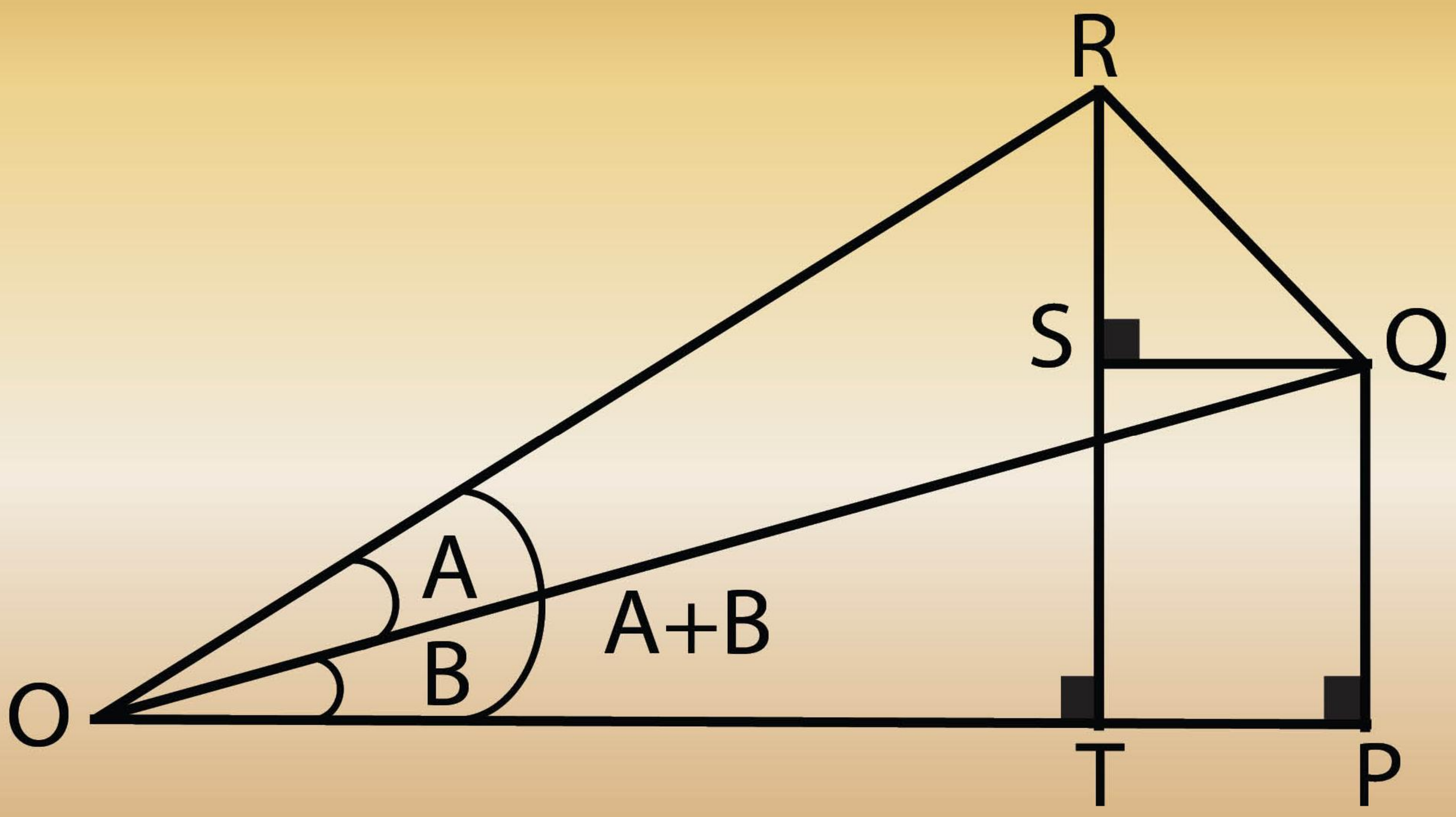
51- له لاندینو رابطو څخه کومه یوه سم ده؟

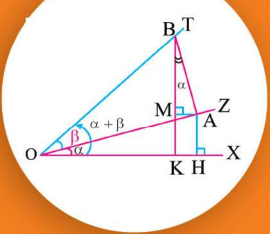
a) $\text{Sin}\frac{3\pi}{4} = \text{Sin}\frac{\pi}{4}$ b) $\text{Sin}\frac{3\pi}{4} > \text{Sin}\frac{\pi}{4}$ c) $\text{Sin}\frac{3\pi}{4} < \text{Sin}\frac{\pi}{4}$

حل: a جز سم دی ځکه چې:

$$Sin\frac{3\pi}{4} = Sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}$$

پنځم څپرکی
د مثلثاتو تطبیقات


R
S
Q
A
A+B
B
O
T
P



د جمعې او تفاضل فورمولونه

د درسي کتاب (223)مخ د لوست وخت (1درسي ساعت)

د زده کړې موخې **- پوهنيزې** **- مهارتي** **- ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې باید زده کوونکي: • د دوو زاويو د مجموعي او تفاضل د مثلثاتي نسبتونو د پيداکولو طريقه زده کړي. • د دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو له مخې د دوي د مجموعي او تفاضل مثلثاتي نسبتونه پيدا کړای شي. • د دوو زاويو د مجموعي او تفاضل د مثلثاتي نسبتونو په توپير وپوهيږي. • د مثلثاتي مسايلو په حل کې ددې فرمولونو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	د لومړنو فعاليتونو له سرته رسولو وروسته ورودي پوښتنه د انګيزې د پيداکولو لپاره له زده کوونکو وکړئ. څرنګه چې دا رابطه سمه ده او له ثبوتولو وروسته يې زده کوونکي سموالی درک کوي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

په داسې حال کې چې ددې لوست د ورودي شکل چارت موجود وي، محترم ښوونکی دې د $\sin(\propto +B)$ ، $\cos(\propto +B)$ او $\tan(\propto +B)$ ، فورمولونه ثبوت کړي، بيا د (224) مخ مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ، بيا دې محترم ښوونکي د $(\propto -\mathrm{B})$ د زاويې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړي او زده کوونکي دې د (226) مخ فعاليت سرته ورسوي.

لومړی،دويم، دريم او څلورم مثالونه د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ او زده کوونکي دې د (227) مخ فعاليت سرته ورسوي.

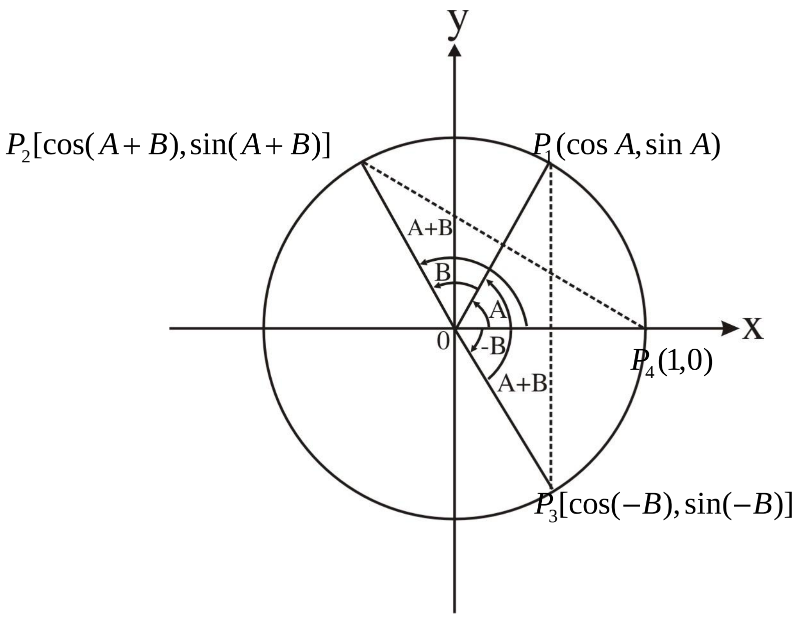
د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې:**

ددې لوست لومړی پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

ددې لوست د پوښتنو دريمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات



$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

د (O,R) ، پر مثلثاتي دايره د A , $A+B$ و $-B$ زاويې ټاکو ددې زاويو ضلعې د دايرې محيط د p_1, p_2, p_3 او p_4 په نقطو کې قطع کوي.

$\cos A = x_1$ $\sin A = y_1$

$p_1(x_1,y_1)=p_1(\cos A,\sin)$

څرنګه چې د P_1OP_3 او P_4OP_2 مثلثونه سره انطباق منونکي دي، نو $\overline{p_4p_2}=\overline{p_1p_3}$

$(\overline{p_1p_3})^2=[\cos A-\cos(-B)]^2+[\sin A-\sin(-B)]^2$

$(p_1p_3)^2=[\cos A-\cos B]^2+[\sin A+\sin B]^2$

$(p_1p_3)^2=\cos^2 A-2\cos A\cos B+\cos^2 B+\sin^2 A+2\sin A\sin B+\sin^2 B$

$\overline{(p_1p_3)}^2=2-2\cos A\cos B+2\sin A\sin B$

همدارنګه

$(\overline{p_2p_4})^2=[\cos(A+B)-1]^2+[\sin(A+B)-o]^2$

$(\overline{p_2p_4})^2=1+1-2\cos(A+B)=2-2\cos(A+B)$

څرنګه چې $(\overline{p_4p_2})^2=(\overline{p_3p_1})^2$ ده، نو لرو چې:

$2-2\cos A\cos B+2\sin A\sin B=2-2\cos(A+B)$

په نتيجه کې:

$\boxed{\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B}$

$\cos[A+(-B)]=\cos A\cos(-B)-\sin(A)\sin(-B)$

$\boxed{\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B}$

$\sin(A+B)=\cos[90^\circ-(A+B)]=\cos[(90^\circ-A)-B]$

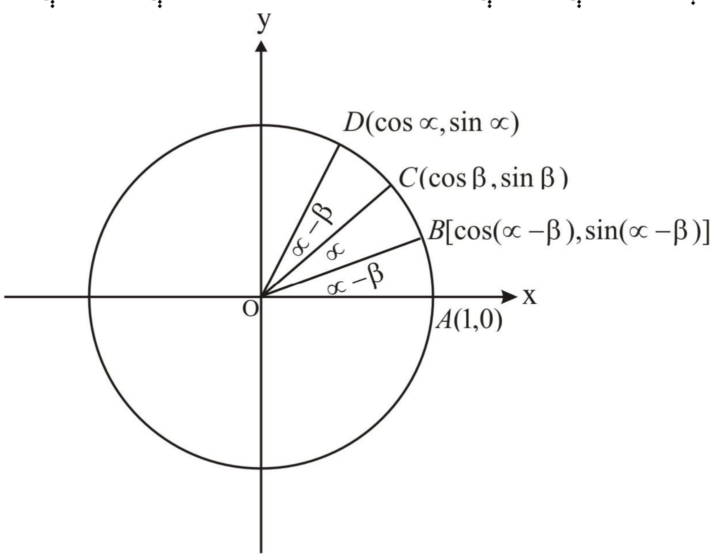
$\sin(A+B)=\cos(90^\circ-A)\cos B+\sin(90^\circ-A)\sin B$

$\cos(90 - A) = \sin A$

$\sin(90 - A) = \cos A$

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

یا په بله طریقه: د مثلثاتي دایرې محیط چې مرکز یې O دی، د C, B, A او D نقطې په نظر کې نیسو:



په دې ډول چې د AB د قوس اوږدوالی د CD قوس له اوږدوالی سره مساوي وي. له هندسي څخه پوهیږو څه وخت چې ددایرې دوه قوسونه سره انطباق منوونکي وي $(AB \cong CD)$ نو اړونده وترونه یې هم سره انطباق مننونکي دي د AB د وتر اوږدوالی د CD د وتر له اوږدوالي سره مساوي دی $|AB| = |CD|$ که د $A\hat{O}D = \alpha$ او $A\hat{O}C = \beta$ وي نو $C\hat{O}D = \alpha - \beta$ کیږي او څرنګه چې $|AB| = |CD|$ دی، نو $C\hat{O}D = A\hat{O}B$ ده، په نتیجه کې $A\hat{O}B = \alpha - \beta$ ده د C, B, A او D د نقطو وضعیه کمیات عبارت دي له: $(1,0), [\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)], (\cos\beta, \sin\beta)$، او $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ څرنګه چې $|AB|^2 = |CD|^2$ ده.

د فاصلې له فورمول څخه لرو چې:

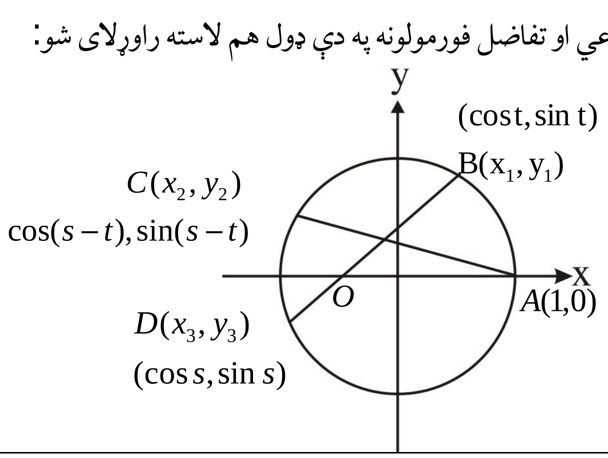
$$[(1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + [0 - \sin(\alpha - \beta)]^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 1 + 1 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

د دوو زاویو د مجموعي او تفاضل فرمولونه (Sum and Difference Identities)

که s او t دوه زاويې وي ددې زاویو د مجموعي او تفاضل فورمولونه په دې ډول هم لاسته راوړلای شو:



که د مثلثاتي دایرې پر محیط د $A(1,0)$, $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$ او $D(x_3,y_3)$ نقطې واقع وي، په دې ډول چې د AD د قوس اوږدوالی $AD = s$ ، $AB = t$ او $AC = s - t$ وي او په دې فرض سره چې $0 < t < s < 2\pi$ وي، د BD د قوس اوږدوالی s-t سره مساوي دی $(AC = BD)$.

څرنګه چې د قوسونو اوږدوالي سره مساوي دي، نو د AC او BD د قطعه خطونو اوږدوالي هم سره مساوي دي د فاصلې د فورمول له مخې لرو چې:

$$\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-0)^2} = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$$

دواړو خواوي مربع کوو، لرو چې:

$$x_2^2 - 2x_2 + 1 + y_2^2 = x_3^2 - 2x_3x_1 + x_1^2 + y_3^2 - 2y_3y_1 + y_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

څرنګه چې د C,B او D نقطې د مثلثاتي دایرې پر محیط واقع دي، نو:

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad , \quad x_2^2 + y_2^2 = 1 \ , \quad x_3^2 + y_3^2 = 1$$

دا قیمتونه په (I) معادله کې وضع کوو لرو چې:

$$2 - 2x_2 = 2 - 2x_3x_1 - 2y_3y_1$$

یا

$$x_2 = x_3x_1 + y_3y_1$$

څرنګه چې $x_2 = \cos(s-t)$ و $x_3 = \cos(s)$, $x_1 = \cos(t)$, $y_3 = \sin(s)$, $y_1 = \sin(t)$

په پایله کې لرو چې:

$$\boxed{\cos(s-t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t}$$

$$\cos(s+t) = \cos[s-(-t)] = \cos s \cos(-t) \sin s \sin(-t)$$

څرنګه چې $\cos(-t) = \cos t$ او $\sin(-t) = -\sin t$ دی.

نو:

$$\boxed{\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t}$$

په همدې ډول

$$\sin(s+t) = \cos[\frac{\pi}{2} - (s+t)] = \cos[(\frac{\pi}{2} - s) - t]$$

$$\sin(s+t) = \cos(\frac{\pi}{2} - s) \cdot \cos t + \sin(\frac{\pi}{2} - s) \cdot \sin t$$

$$\boxed{\sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t}$$

که $\sin(s-t)$ د $\sin[s+(-t)]$ په شکل ولیکو $\sin(s+t)$ د فورمول له مخې لرو چې:

$$\sin(s-t) = \sin s \cos t - \cos s \sin t$$

څرنګه چې $\tan(s+t) = \dfrac{\sin(s+t)}{\cos(s+t)}$ دی.

د $\sin(s+t)$ او $\cos(s+t)$ د قمیتونو له وضع کولو څخه وروسته لرو چې:

$$\tan(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$

$$\tan(s-t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

•

$$\frac{\cos 11^\circ+\sin 11^\circ}{\cos 11^\circ-\sin 11^\circ}=\tan 56^\circ$$

$$\tan 56^\circ=\tan(45^\circ+11^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 11^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 11^\circ}=\frac{1+\tan 11^\circ}{1-\tan 11^\circ}=\frac{1+\frac{\sin 11^\circ}{\cos 11^\circ}}{1-\frac{\sin 11^\circ}{\cos 11^\circ}}=\frac{\cos 11^\circ+\sin 11^\circ}{\cos 11^\circ-\sin 11^\circ}$$

• که $\beta,\propto$ او γ د ABC د مثلث درې زاويې وي.

$$\tan\frac{\propto}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\propto}{2}=1$$

$$(\propto+\beta+\gamma=180\ )$$

$$\propto+\beta=180-\gamma$$

$$\frac{\propto}{2}+\frac{\beta}{2}=(90-\frac{\gamma}{2})$$

$$\tan(\frac{\propto}{2}+\frac{\beta}{2})=\frac{\tan\frac{\propto}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\propto}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}}=\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}$$

$$\tan\frac{\propto}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\propto}{2}=1$$

• د $\cot(\propto+\beta)$ محاسبه کول:

$$\cot(\propto+\beta)=\frac{1}{\tan(\propto+\beta)}=\frac{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{1-\frac{1}{\cot\alpha}\cdot\frac{1}{\cot\beta}}{\frac{1}{\cot\alpha}+\frac{1}{\cot\beta}}=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

• که A،B او C د يو مثلث زاويې وي نو:

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

$$A+B+C=\pi\Rightarrow A=\pi-(\hat{B}+\hat{C})$$

$$\tan A=\tan[\pi-(\hat{B}+\hat{C})]=-\tan(\hat{B}+\hat{C})=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}$$

$$\Rightarrow\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

• که $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ او $\cos\beta=\frac{12}{13}$ او α په دريمه او β په څلورمه ربع کې واقع وي:

$$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{33}{65}\qquad\sin(\alpha-\beta)=-\frac{63}{65}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{33}{65}\qquad\tan(\alpha-\beta)=\frac{63}{16}$$

• که $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$، $\cos\beta=-\frac{8}{17}$، α او β په دريمه ربع کې واقع وي:

$$\sin(\alpha+\beta)=1\qquad\sin(\alpha-\beta)=-\frac{161}{289}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=(\text{undifend})\qquad\tan(\alpha-\beta)=-\frac{161}{240}$$

• که $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ او $\sin\beta = -\frac{1}{3}$ وي:

$\cos(\alpha+\beta) = \frac{-2\sqrt{10}+2}{9}$ $\qquad$ $\cos(\alpha-\beta) = \frac{-2\sqrt{10}-2}{9}$

• که $\sin A = -\frac{4}{5}$ او $\sin B = \frac{12}{13}$ وي:

$\cos(A+B) = \frac{56}{65}$ $\qquad$ $\cos(A-B) = \frac{16}{65}$

• که $\sin\theta = -\frac{8}{17}$ او $\cos\gamma = -\frac{8}{17}$ وي:

$\cos(\theta+\gamma) = 0$ $\qquad$ $\cos(\theta-\gamma) = \frac{240}{289}$

• که $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ او $\cos\beta = -\frac{3}{5}$ وي:

α او β په دریمه ربع کې قرار لري.

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{77}{85}$ $\qquad$ $\sin(\alpha-\beta) = \frac{13}{85}$

$\tan(\alpha+\beta) = -\frac{77}{36}$ $\qquad$ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{13}{84}$

د پوښتنو ځوابونه:

1- وښایاست چې:

$$\tan(45-\theta) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

حل:

$$\tan(45^\circ-\theta) = \frac{\tan 45^\circ - \tan\theta}{1+\tan 45^\circ\cdot\tan\theta} = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- وښایاست چې:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\ \sin\beta$$

حل:

$a)\ \ (\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\beta\cdot\sin\alpha)+(\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$b)\ \ (\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta = 2\sin\alpha\cdot\sin\beta$

3- $\cos 277^\circ\cos 97^\circ + \sin 277^\circ \sin 97^\circ = ?$

a) -1 $\qquad$ b) 1 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) $\frac{1}{2}$

حل:

$$\cos 277^\circ\cos 97^\circ + \sin 277^\circ\cdot\sin 97^\circ = \cos(227^\circ - 97^\circ) = \cos(180^\circ) = -1$$

(د a جز سم دی).

4- د جمعې د فورمولو په واسطه ، $\sin 240°$ ، $\cos 240°$ او $\tan 240°$ پیداکړئ.

حل:

$$a)\quad \sin 240° = \sin(180° + 60°) = \sin 180° \cdot \cos 60° + \cos 180° \cdot \sin 60° = 0 \cdot \frac{1}{2} + (-1)\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b)\quad \cos 240° = \cos(180° + 60°) = \cos 180° \cdot \cos 60° - \sin 180° \cdot \sin 60° = (-1)(\frac{1}{2}) - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$c)\quad \tan 240° = \tan(180° + 60°) = \frac{\tan 180° + \tan 60°}{1 - \tan 180° \cdot \tan 60°} = \frac{0 + \sqrt{3}}{1 - 0 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

5- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په واسطه وښیي چې $\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y] = \cos x \cdot \cos y$ دی.

حل:

$$\frac{1}{2}[(\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y) + (\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y)] = \frac{1}{2} \cdot 2\cos x \cdot \cos y = \cos x \cdot \cos y$$

6- د جمعې د فورمولونو په واسطه د $210°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

$$a:\quad \sin 210° = \sin(180° + 30°) = \sin 180° \cos 30° + \cos 180° \cdot \sin 30° = (0) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$b:\quad \cos 210° = \cos(180° + 30°) = \cos 180° \cos 30° - \sin 180° \cdot \sin 30° = (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c:\quad \tan 210° = \tan(180° + 30°) = \frac{\tan 180° + \tan 30°}{1 - \tan 180° \cdot \tan 30°} = \frac{0 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

درې پاتې مثلثاتي نسبتونه ($\csc 21^{o}$, $\sec 210^{o}$ او $\cot 210^{o}$) هم په همدې ډول په اساني سره پیداکولای شو.

7- $\sin 105°$ ، $\cos 105°$ او $\tan 105°$ پیداکړئ. $(105° = 60° + 45°)$

حل:

$$\text{a)}\quad \sin 105^{\circ} = \sin(60^{\circ} + 45^{\circ}) = \sin 60^{\circ} \cdot \cos 45^{\circ} + \cos 60^{\circ} \cdot \sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

$$\text{b)}\quad \cos 105^{\circ} = \cos(60^{\circ} + 45^{\circ}) = \cos 60^{\circ} \cdot \cos 45^{\circ} - \sin 60^{\circ} \cdot \sin 45^{\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$$

یا

$$\cos 105^{\circ} = \cos 60^{\circ} \cdot \cos 45^{\circ} - \sin 60^{\circ} \cdot \sin 45^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$c)\quad \tan 105^{\circ} = \tan(60^{\circ} + 45^{\circ}) = \frac{\tan 60^{\circ} + \tan 45^{\circ}}{1 - \tan 60^{\circ} \cdot \tan 45^{\circ}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

8- که $\sin x = -\frac{3}{4}$ او $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وي، $\cos(\frac{\pi}{4} + x)$ پیدا یې کړئ.

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{3}{4}) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+3)}{8}$$

9- وښایاست چې: $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\cos\beta$ دی.

$$(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) - (\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta) = -2\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

-10

$$\sin 2^\circ \cos 88^\circ + \cos 2^\circ \sin 88^\circ = ?$$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

حل:

$\sin = 90^\circ = 1$ (د b جز سم دی).

$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$

$\cos^2 x-\sin^2 x=?$

د 2α د زاويې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه

د درسي کتاب (229)مخ **د لوست وخت: (2 درسي ساعتونه)**

د زده‌کړې موخې - پوهنيزې - مهارتي - ذهنيتي	ددې لوست په پای کې زده‌کوونکي باید: • د يوې زاويې د مثلثاتي نسبتونو لـه جنسه د زاويې د دوه چنـده مثلثاتي نـسبتونو د لاس تـه راوړلو په طريقه وپوهيږي. • زده کړي چې د يوې زاويې مثلثاتي نـسبتونه د دې زاويـې د نيمـايې tan لـه جنـسه څنګـه لاس ته راځي. • د يـوې زاويـې د مثلثـاتي نـسبتونو لاس تـه راوړل د زاويـې د دوه چنـده مثلثاتي نـسبتونو لـه جنسه زده‌کړي. • د زاويې د دوه چنده مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پيداکړای شي. • د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه ددې زاويې د نيمايي ټانجانت له مخې پيداکړای شي. • د مثلثاتي مسايلو د حلولو په وخت کې لـه دې اړيکـو څخـه ګټـه واخيـستلای شـي ا و پـه اهميت يې وپوهيږي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته د انګيزې پيداکولـو لپـاره د ورودي پوښـتنې له زده‌کوونکو وکړئ. $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=\sin\frac{2x}{3}$ $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

محترم ښوونکي دې د زده‌کوونکو په ونډې اخيستنې سره د $\cos 2x, \sin 2x$ ، او $\tan 2x$ فورمولونه ثبوت او لـومړی مثال دې حل کړي.

زده کوونکي دې ددې لوست د (230) مخ فعاليت سرته ورسوي چې ددې فعاليت ځواب په لاندې ډول دی:

د لومړۍ برخې حل:

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\sin\alpha=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5})}{(\frac{4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{24}{7}$$

د دويمې برخې حل:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-(\frac{12}{13})^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} \Rightarrow \cos\beta = -\frac{5}{13}$$ (د β دويمه ضلعه په دويمه ناحيه کې واقع ده)

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = 2(\frac{12}{13})(-\frac{5}{13}) = -\frac{120}{169}$$

ښوونکي دې د زده‌کوونکو په ونډې اخيستنې سره دويم او دريم مثال حل کړي او د (231)مخ فعاليت دې زده‌کوونکي په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي، بيا د θ د زاويې مثلثاتي نسبتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه په لاس راوړل شي او هم دې د θ مثلثاتي نسبتونو په لاس راوړل د 2θ د مثلثاتي نسبتونو له جنسه ثبوت شي او ددې لوست د 233 مخ لومړی او دويم مثال دې د زده‌کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي او د 234 مخ فعاليت دې زده‌کوونکي سرته ورسوي او دريم او څلورم مثال دې محترم ښوونکي حل کړي.

د زده‌کړې پياوړتيا: (7) دقيقې:

د 90° زاويې مثلثاتي نسبتونه د 45° زاويې له جنسه پيدا کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې:

د $\cos\frac{\pi}{12}$ د $\cos\frac{\pi}{6}$ له جنسه په لاس راوړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د $2\propto$ مثلثاتي نسبتونه (Multiple – Angle Identities)

1- که $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$ وي، د θ مثلثاتي نسبتونو په داسې حال کې چې د θ دويمه ضلعه په دويمه ناحيه کې واقع وي عبارت دي له:

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\frac{4}{5} = 1 - 2\sin^2\theta \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$-\frac{1}{5} = -2\sin^2\theta \qquad \cos^2\theta = \frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{10} = \sin^2\theta \qquad \cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \cos\theta = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{3} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{10}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{-\sqrt{10}}{3} \qquad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=-3$$

2- که $\cos\theta=\frac{3}{5}$ او $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ وي $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ او $\tan 2\theta$ په لاندې ډول دي.

څرنګه چې $\cos\theta=\frac{3}{5}$ دی، نو $\sin\theta=-\frac{4}{5}$ دی.

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2(-\frac{4}{5})(\frac{3}{5})=-\frac{24}{25} \qquad \cos 2\theta=\cos^2-\sin^2\theta=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}}=\frac{24}{7}$$

یا

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2(-\frac{4}{3})}{1-\frac{16}{9}}=\frac{\frac{-8}{3}}{-\frac{7}{9}}=\frac{24}{7}$$

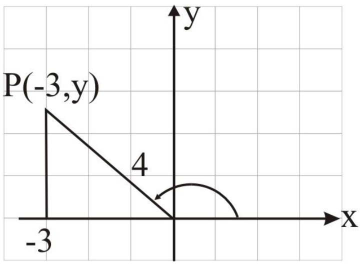
3- که $\cos\theta=-\frac{3}{4}$ او $90^\circ\le\theta\le180^\circ$ وي $\cos 2\theta$ عبارت دی له

$x^2+y^2=r^2$

$(-3)^2+y^2=4^2$

$y=\sqrt{7}$ (په دویمه ناحیه کې د y قیمت مثبت دی)

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{7}}{4}$



$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(-\frac{3}{4})^2-(\frac{\sqrt{7}}{4})^2=\frac{1}{8}$

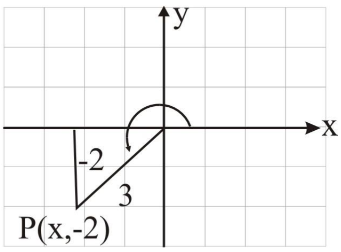
که $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ او $180^\circ\le\theta\le270^\circ$ وي $\cos\frac{\theta}{2}$ قیمت عبارت دی له:

$x^2+y^2=r^2$

$x^2+(-2)^2=3^2$

$x=-\sqrt{5}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{5}}{3}$



څرنګه چې $180^\circ\le\theta\le270^\circ$ دی، نو $90^\circ\le\frac{\theta}{2}\le135^\circ$ په نتیجه کې $\cos\frac{\theta}{2}$ منفي دی.

$$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+(-\frac{5}{3})}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{5}}{3})}=-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

4- په همدې ډول تاسو کولای شی چې لاندې درکړل شوي ځوابونه په لاس راوړئ:

- که $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ او $90^\circ\le\theta\le180^\circ$ وي، $\sin 2\theta=-\frac{24}{25}$ او $\cos 2\theta=-\frac{7}{25}$ دي.
- که $\sin\theta=\frac{3}{5}$ او $90^\circ\le\theta\le180^\circ$ وي، $\sin 2\theta=-\frac{24}{25}$ او $\cos 2\theta=\frac{7}{25}$ دي.
- که $\cos\theta=\frac{2}{5}$ او $270^\circ\le\theta\le360^\circ$ وي، $\sin 2\theta=-\frac{4\sqrt{21}}{25}$ او $\cos 2\theta=-\frac{17}{25}$ دي.

-که $\sin\theta = -\frac{2}{5}$ او $270^\circ \le \theta \le 360^\circ$ وي، $\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{21}}{25}$ او $\cos 2\theta = \frac{17}{25}$ دي.

-که $\sin\theta = \frac{1}{4}$ او $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ وي، $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$ او $\cos 2\theta = \frac{7}{8}$ دي.

-که $\cos\theta = \frac{1}{4}$ او $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ وي، $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$ او $\cos 2\theta = -\frac{7}{8}$ دي.

-که $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{4}$ او $180^\circ \le \theta \le 270^\circ$ وي، $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{55}}{8}$ او $\cos 2\theta = \frac{3}{8}$ دي.

-که $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{4}$ او $180^\circ \le \theta \le 270^\circ$ وي، $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{55}}{8}$ او $\cos 2\theta = -\frac{3}{8}$ دي.

-که $\sin\theta = \frac{1}{5}$ او $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ وي، $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{5}}$ او $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{5}}$ دي.

-که $\cos\theta = \frac{1}{5}$ او $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ وي، $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ او $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$ دي.

-که $\cos\theta = -\frac{5}{6}$ او $90^\circ \le \theta \le 180^\circ$ وي، $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{11}{12}}$ او $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{12}}$ دي.

-که $\sin\theta = \frac{5}{6}$ او $90^\circ \le \theta \le 180^\circ$ وي، $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{11}{12}}$ او $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{11}{12}}$ دي.

-که $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ او $180^\circ \le \theta \le 270^\circ$ وي، $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{5}{6}}$ او $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ دي.

-که $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ او $180^\circ \le \theta \le 270^\circ$ وي $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}}$ او $\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6}}$ دي.

5- واضح ده چې:

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta} = 2\sin\theta \qquad \frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \sin\theta \qquad \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \cos\theta - \sin\theta$$

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos - \sin\theta} = \cos\theta \qquad \sin^2 2\theta = 4\sin^2\theta\cos^2 \qquad 2\cos^2 - \sin^2\theta = \cos^2\theta + \cos 2\theta$$

$$2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 2\cos 2\theta$$

6- د يوې زاويې د دوچنده مثلثاتي نسبتونو په مرسته $\cos\frac{2\pi}{3}$ په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \cos^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3} = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

7- د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

په همدې ډول تاسو کولای شی چې لاندې درکړل شوی ځوابونه په لاس راوړئ:

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \sin\frac{7\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \tan\frac{7\pi}{8} = -\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2}$$

8- که $\cos\theta = \frac{2}{3}$ او $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ وي $\tan\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ عبارت دي له:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt6}=\frac{\sqrt6}{6}\qquad \cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}}=-\sqrt{\frac{5}{6}}=-\frac{\sqrt{30}}{6}\qquad \tan\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{\sqrt6}{6}}{-\frac{\sqrt{30}}{6}}=\frac{-\sqrt5}{5}$$

9- ښودلای شو چې $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ دی او ددې په مرسته $\tan 22.5^\circ$ په لاندې ډول په لاس راوړلای شو:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

$$\tan 22.5^\circ=\frac{\sin 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{1+\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{\sqrt2}{2+\sqrt2}=\frac{\sqrt2(2-\sqrt2)}{2}=\sqrt2-1$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د $120°$ زاویې د مثلثاتي نسبونو له مخې د $240°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړې.

حل:

$$\sin 240^\circ=2\sin 120^\circ\cdot\cos 120^\circ=2(\frac{\sqrt3}{2})\cdot(\frac{-1}{2})=-\frac{\sqrt3}{2}$$

$$\cos 240^\circ=\cos^2 120^\circ-\sin^2 120^\circ=(-\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt3}{2})^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ=\frac{2\tan 120^\circ}{1-\tan^2 120^\circ}=\frac{2(-\sqrt3)}{1-3}=\sqrt3$$

2- که $\sin\theta=\frac{3}{5}$ او د θ دویمه ضلعه په لومړۍ ناحیه کې واقع وي $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل:

(د θ دویمه ضلعه په لومړنۍ ناحیه کې واقع ده.)

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=2\cdot\frac{3}{5}(\frac{4}{5})=\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(\frac{4}{5})^2-(\frac{3}{5})^2=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}}=\frac{24}{7}$$

3- که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ وي او د θ دویمه ضلعه په دویمه ناحیه کې واقع وي $\cos\theta/2$ پیدا کړئ.

حل: په دویمه ربعه کې $\cos\theta<0$ دی. لومړی $\cos\theta$ د $\sin\theta$ له جنسه په لاس راوړو:

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin\theta}=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

څرنګه چې $90^\circ<\theta<180^\circ$ څکه چې د θ دویمه ضلعه په دویمه ناحیه کې واقع ده، نو $45^\circ<\frac{\theta}{2}<90^\circ$ ده او $\cos\frac{\theta}{2}>0$ دی.

4- د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه $\sin\frac{\pi}{12}$ پیدا یې کړئ.

حل: که $\theta=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{12}$ وي:

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

5- که $\sin\theta=\frac{12}{13}$ وي او د θ دویمه ضلعه په دویمه ناحیه کې وي $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پیداکړئ.

حل:

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin\theta}=\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\sqrt{\frac{169-144}{169}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=-\frac{5}{13}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{18}{13}}{2}}=\sqrt{\frac{18}{26}}=\sqrt{\frac{9}{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{1-\frac{5}{13}}}=\sqrt{\frac{\frac{18}{13}}{\frac{8}{13}}}=\sqrt{\frac{18}{8}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

6- د 30° زاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 15° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

حل:

$$\sin^2 15^\circ=\frac{1-\cos30^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin15^\circ=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos^2 15^\circ=\frac{1+\cos30^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos15^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan15^\circ=\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2-\sqrt{3}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45-30) = \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3} \qquad \cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

7- که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وي او β دویمه ضلعه په دویمه ناحیه کې وي، $\sin 2\beta$ مساوي دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= \frac{169}{120}$ d) دریٍ واړه سم نه دي

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cdot\cos\beta$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{12}{13})^2} = \pm\sqrt{\frac{169-144}{169}} = -\frac{5}{13}$$ (د θ دویمه ضلعه په دویمه ناحیه کې پرته ده)

$$\sin 2\beta = 2\cdot\frac{12}{13}(-\frac{5}{13}) = -\frac{120}{169}$$

(د b جز سم دی).

8- $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$ مساوي دی په:

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

حل:

$$\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos 3\beta - \cos\beta\cdot\sin 3\beta}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-3\beta)}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = \frac{\sin(-2\beta)}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = -\frac{\sin 2\beta}{\cos\beta\cdot\sin\beta}$$

$$= -\frac{2\sin\beta\cdot\cos\beta}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = -2$$

(د c جز سم دی).

$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$

3α مثلثاتي نسبتونه د (α) د مثلثاتي
د نسبتونو له جنسه

د درسي کتاب (237) مخ   د تدریس وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې - پوهنيزې - مهارتي - ذهنيتي	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د 3α د مثلثاتي نسبتونو د پیداکولو طریقه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه زده کړي. • د یوې زاویې درې چنده مثلثاتي نسبتونه ددې زاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې پیدا کړای شي. • د دریو زاویو د مجموعي مثلثاتي نسبتونو پیداکول ددې زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه زده کړي. • د دریو زاویو د مجموعي مثلثاتي نسبتونه د هرې زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیدا کړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو وروسته د انګیزې د پیداکولو لپاره د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = \cos 135^\circ$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

محترم ښوونکي دې $\sin 3\alpha$ د $\sin\alpha$ له جنسه په لاس راوړئ او د (237) مخ لومړی مثال دې حل کړي. بیا دې د $\cos 3\alpha$ فرمول ثبوت کړئ او زده کوونکي دې د (238) مخ فعالیت په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي او د خپل کار پایله دې نورو ته توضیح کړي. بناغلی ښوونکي دې دویم، دریم او څلورم مثالونه د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره حل کړي. بیا د $\cos(\propto+\beta+\gamma),\sin(\propto+\beta+\gamma)$ او $\tan(\propto+\beta+\gamma)$ ثبوت کړي او پنځم مثال دی یو زده کوونکي په خپله خوښه حل کړي او که ستونزه یې درلوده تاسو یې حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د پوښتنو څخه لومړی پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

دویمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتنئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• څرنګه چې $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\binom{n}{n-3}a^3b^{n-3} + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n$ دي.

د پورتني باينوم له ضريبونو څخه په استفاده په مثلثاتو کې د $\cos na, \sin na$ او $\tan na$ د مثلثاتي نسبتونو د پيداکولو لپاره له لاندينو فورمولو څخه کار اخيستل کيږي:

$$\cos na = \binom{n}{0}\cos^n a - \binom{n}{2}\cos^{n-2} a\sin^2 a.........................(I)$$

$$\sin na = \binom{n}{1}\cos^{n-1} a\sin a - \binom{n}{3}\cos^{n-3} a\sin^2 a ....(II)$$

پام مو وي چې:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال: په I او II فورمولونو کې کولای شو د n پر ځای هر عدد عوض کړو:

$$\cos 3\theta = \binom{3}{0}\cos^3\theta - \binom{3}{2}\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\cos 7\theta = \binom{7}{0}\cos^7\theta - \binom{7}{2}\cos^5\theta\sin^2\theta + \binom{7}{4}\cos^3\theta\sin^4\theta - \binom{7}{6}\cos\theta\sin^6\theta$$

$$= \cos^7\theta - 21\cos^5\theta(1-\cos^2\theta) + 35\cos^3\theta(1-\cos^2\theta)^2 - 7\cos\theta(1-\cos^2\theta)^3$$

$$= 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = \binom{3}{1}\cos^2\theta\sin\theta - \binom{3}{3}\cos^0\theta\sin^3\theta = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\sin 7\theta = \binom{7}{1}\cos^6\theta\sin\theta - \binom{7}{3}\cos^4\theta\sin^3\theta + \binom{7}{5}\cos^2\theta\sin^5\theta + \binom{7}{7}\cos^0\theta\sin^7\theta$$

له ساده کولو څخه وروسته لرو چې: $\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta$

د $\tan(na)$ لپاره لرو چې:

$$\tan(na) = \frac{\binom{n}{1}\tan a - \binom{n}{3}\tan^3 a + \binom{n}{5}\tan^5 a - ...}{1 - \binom{n}{2}\tan^2 a + \binom{n}{4}\tan^4 a - \binom{n}{6}\tan^6 a + ...}$$

$$\tan 3x = \frac{\binom{3}{1}\tan x - \binom{3}{3}\tan^3 x}{1 - \binom{3}{2}\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

$$\tan 5x = \frac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x}$$

$$\tan x\tan(60^\circ - x)\tan(60^\circ + x) = \tan 3x$$

- $$\frac{\sin x\sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x)}{\cos x\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x)} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \tan 3x$$

- $$\cot 3\alpha = \frac{1}{\tan 3\alpha} = \frac{1 - 3\tan^2\alpha}{3\tan\alpha - \tan^3\alpha} = \frac{1 - \frac{3}{\cot^2\alpha}}{\frac{3}{\cot\alpha} - \frac{1}{\cot^3\alpha}} = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1} = \frac{3\cot\alpha - \cot^3\alpha}{1 - 3\cot^2\alpha}$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- $\sin 90^\circ$ ، $\cos 90^\circ$ ، $\tan 90^\circ$ په ترتیب سره د $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ او $\tan 30^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

$$\sin 90^\circ = \sin(30^\circ + 30^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 30^\circ\cos 30^\circ\cos 30^\circ - \sin 30^\circ\sin 30^\circ\sin 30^\circ + \sin 30^\circ\cos 30^\circ\cos 30^\circ + \sin 30^\circ\cos 30^\circ\cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3-1+3+3}{8}=1$$

$$\cos 90^\circ=\cos(30^\circ+30^\circ+30^\circ)$$

$$=\cos 30^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 30^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 30^\circ-\cos 30^\circ\cdot\sin 30^\circ\sin 30^\circ$$

$$-\cos 30^\circ\sin 30^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{8}=\frac{0}{8}=0$$

$$\tan(\propto+\beta+\gamma)=\frac{\tan\propto+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\propto\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}{1-\tan\propto\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\propto\cdot\tan\gamma}$$

$$\tan 90^\circ=\tan(30^\circ+30^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 30^\circ+\tan 30^\circ+\tan 30-\tan 30^\circ\cdot\tan 30^\circ\cdot\tan 30^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 30^\circ-\tan 30^\circ\tan 30^\circ-\tan 30^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}}{1-3\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}}{0}$$ (تعریف شوی نه دی)

2- $\cos 135^\circ$ او $\tan 135^\circ$ پیداکړئ. $135^\circ=(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$

حل:

$$\cos 135^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$$

$$=\cos 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ-\cos 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\sin 60^\circ-\cos 60^\circ\sin 30^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{-4\sqrt{2}}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 135^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$$

$$=\sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ+\sin 45^\circ\cos 30^\circ\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ=\frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$

-3

$8\cos^3\theta-6\cos\theta=?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

b جز سم دی ځکه چې:

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$8\cos^3\theta - 6\cos\theta = 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = 2\cos 3\theta$

4 – $\cos(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C})$ د $\hat{A}$, $\hat{B}$ او $\hat{C}$ د زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیدا کړئ.

حل: لومړی طریقه:

$Cos(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C}) = \cos[(A+(-B)+C]$

$= \cos A\cos(-B)\cos C - \cos A\sin(-B)\sin C - \cos C\sin A\sin(-B) - \cos(-B)\sin A\sin C$

$= \cos A\cos B\cos C + \cos A\sin B\sin C + \cos C\sin A\sin B - \cos B\cdot\sin A\sin C$

دویمه طریقه:

$\mathrm{Cos}(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C}) = \cos[(\hat{A}-\hat{B})+\hat{C}]$

$= \cos(\hat{A}-\hat{B})\cos\hat{C} - \sin(A-B)\sin C$

$= (\cos A\cos B + \sin A\sin B)\cos C - (\sin A\cos B - \cos A\sin B)\sin C$

$= \cos A\cos B\cos C + \sin A\sin B\cos C - \sin A\cos B\sin C + \cos A\sin B\sin C$

5- وښایاست چې:

$a)\ \ 4\cos x\cos(60° - x)\cos(60° + x) = \cos 3x$

$b)\ \ \tan x\cdot\tan(60° - x)\tan(60° + x) = \tan 3x$

حل:

a)

$4\cos x\cos(60° - x)\cos(60° + x) = \cos 3x$

$4\cos x(\cos 60\cos x + \sin 60°\sin x)(\cos 60°\cos x - \sin 60°\sin x)$

$= 4\cos x(\cos^2 60°\cos^2 x - \sin^2 60°\sin^2 x) = 4\cos x(\frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{3}{4}\sin^2 x)$

$= 4\cos x\left[\frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{3}{4}(1-\cos^2 x)\right] = \cos^3 x - 3\cos x + \cos^3 x$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x$

b)

$\tan x(\frac{\tan 60° - \tan x}{1+\tan 60°\cdot\tan x})(\frac{\tan 60° + \tan x}{(1-\tan 60°\tan x)}) = \tan x(\frac{\tan^2 60° - \tan^2 x}{1-\tan^2 60°\tan^2 x}) = \tan x(\frac{(\sqrt{3})^2 - \tan^2 x}{1-(\sqrt{3})^2\tan^2 x}$

$= \tan x\frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \tan 3x$

$\sin 30° + \sin 60° = ?$
$\tan 45° + \tan 60° = ?$

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعي او تفاضل تبدیلول د ضرب د حاصل په شکل

د درسي کتاب (241)مخ　　　د تدریس وخت (2 درسي ساعتونه)

د زده کړې موخې **- پوهنيزې** **- مهارتي** **- ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په شکل د بدلولو په طریقه وپوهیږي. • د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د مجموعې یا تفاضل په شکل د بدلولو په فورمولونو وپوهیږي. • ددې فورمولونو په واسطه مثلثاتي مطابقتونه ثبوت کړای شي. • د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې او یا تفاضل، د ضرب د حاصل په شکل او د ضرب حاصل یې د جمعې او تفاضل په شکل تبدیل کړای شي. • د مثلثاتي مسایلو په حل کې ددې بدلولو اهمیت درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	د لومړنیو فعالیتونو د سرته رسولو وروسته د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = 2\sin\frac{30^\circ+60^\circ}{2}\cos\frac{30^\circ-60^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ \cos 15^\circ$ $\tan 45^\circ + \tan 60^\circ = \frac{\sin(45^\circ+60^\circ)}{\cos 45^\circ \cos 60}$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

د هغو فورمولونو له ثبوت کولو وروسته چې د دوو زاویو مثلثاتي نسبتونو د جمعې او یا تفاضل حاصل د ضرب د حاصل په شکل بدلوي. زده کوونکي دې د (242) مخ فعالیت په ګروپونو کې سرته ورسوي او د خپل کار پایله دې توضیح کړي.

بیا دې محترم ښوونکي د (242) مخ د لومړي مثال د a او b برخې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

زده کوونکي دې د (243) مخ فعالیت سرته ورسوي او که یې ونه شو کولای ښوونکي دې لارښوونه او همکاري وکړي چې حل یې په لاندې ډول دی:

$$\cot p + \cot q = \frac{\cos p}{\sin p} + \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\sin q \cos p + \cos q \sin p}{\sin p \sin q} = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$$

$$\cot p - \cot q = \frac{\cos p}{\sin p} - \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\sin q \cos p - \cos q \sin p}{\sin p \sin q} = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$$

او دویم مثال دې ښوونکي کار کړي.

د هغه فرمولونو له ثبوتولو وروسته چې د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعې او تفاضل په حاصل بدلوي د 244

مخ د لومړی مثال د a او b برخې دې ښوونکي د زده‌کوونکو په وړاندې اخيستنې سره حل کړي او په همدې ډول دې ددې لوست دويم، دريم، څلورم او پنځم مثال په ثبوت ورسوي.

د زده‌کړې پياوړتيا: (7) دقيقې:

لاندې پوښتنه حل کړئ.

وښاياست چې: $\sin 5x + \sin 7x = 2\sin 6x \cos x$ کيږي.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې:

د ارزونې لپاره ددې لوست له پوښتنو څخه د دويمې پوښتنې يوه برخه له زده‌کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

-1

$$\sin\frac{7\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}[\sin\pi+\sin\frac{\pi}{6}]=\frac{1}{2}[0+\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}$$

-2

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4}\left[4\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[(2\cos 20^\circ\cos 40^\circ)2\cos 80^\circ\right]$$

$$\frac{1}{4}\left[(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)2\cos 80^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[(\frac{1}{2}+\cos 20^\circ)2\cos 80^\circ\right]$$

$$\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ+2\cos 80^\circ\cos 20^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ+\cos 100^\circ+\cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ+\cos(180^\circ-80^\circ)+\cos 60^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ-\cos 80^\circ+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

3- د ضرب د حاصل په شکل يې واړوئ.

$$\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A=2\cos 2A\cos A+2\cos 6A\cos 2A$$

$$2\cos A[\cos 2A+\cos 6A]=2\cos A[2\cos 4A\cos 2A]=4\cos A\cos 2A\cos 4A$$

4- وښاياست چې $\sin 19^\circ\cos 11^\circ+\sin 71^\circ\sin 11^\circ=\frac{1}{2}$ دی.

حل:

$$=\frac{1}{2}\left[2\sin 19^\circ\cos 11^\circ+2\sin 71\sin 11^\circ\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin(19^\circ+11^\circ)+(\sin(19^\circ-11^\circ)-\cos(71^\circ+11^\circ)-\cos(71^\circ-11^\circ)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin 30^\circ+\sin 8^\circ-\cos 82^\circ+\cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\sin 8^\circ-\cos(90^\circ-8^\circ)+\cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\sin 8^\circ-\sin 8^\circ+\cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

5-

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \sin 10^\circ \cdot \sin(60^\circ - 10^\circ)\sin(60^\circ + 10^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\sin(3\cdot 10)=\frac{1}{4}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

ځکه چې:

$$4\sin x\sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x)=\sin 3x$$

$$4\cos x\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x)=\cos 3x$$

$$\tan x\tan(60^\circ - x)\tan(60^\circ + x)=\tan 3x$$

$$\cot x\cot(60^\circ - x)\cot(60^\circ + x)=\cot 3x$$

$$\cot x\cot(60^\circ - x)\cot(60^\circ + x)=\frac{1}{\tan x\tan(60^\circ - x)\cdot\tan(60^\circ + x)}=\frac{1}{\tan 3x}=\cot 3x$$

6:

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

$$A+B+C=\pi\Rightarrow A=\pi-(B+C)$$

$$\tan A=\tan[\pi-(B+C)]=-\tan(B+C)$$

$$\tan A=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}\Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

7- د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول د مجموعي يا تفاضل په شکل:

$$1:\quad \sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ=-\frac{1}{2}[\cos(50^\circ+70^\circ)-\cos(50^\circ-70)]$$

$$=-\frac{1}{2}[\cos 120^\circ-\cos 20^\circ]=\frac{1}{2}\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\cos 120^\circ$$

$$2:\quad \sin 105^\circ\cdot\cos 65^\circ=\frac{1}{2}[\sin 170^\circ+\sin 40^\circ]=\frac{1}{2}\sin 170^\circ+\frac{1}{2}\sin 40^\circ$$

$$3:\quad \cos 70^\circ\cdot\sin 10^\circ=\frac{1}{2}[\sin(70^\circ+10^\circ)-\sin(70^\circ-10^\circ)]=\frac{1}{2}\sin 80^\circ-\frac{1}{2}\sin 60^\circ$$

$$4:\quad \cos 80^\circ\cdot\cos 20^\circ=\frac{1}{2}[\cos 100^\circ+\cos 60^\circ]=\frac{1}{2}\cos 100^\circ+\frac{1}{2}\cos 60^\circ$$

$$5:\quad \cos 35^\circ\sin 25^\circ=\frac{1}{2}[\sin 60^\circ-\sin 10^\circ]$$

$$3\cos 5x\cos 3x=\frac{3}{2}[\cos 8x+\cos 2x]$$

$$\sin(-\theta)\sin(-3\theta)=\frac{1}{2}[\cos 2\theta-4\cos 4\theta]$$

$$6:\quad -8\cos 4y\cos 5y=-4[\cos 9y+\cos y]$$

$$7:\ \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = -\frac{1}{2}[\cos(15^\circ + 75^\circ) - \cos(15^\circ - 75^\circ)] = -\frac{1}{2}[\cos 90^\circ - \cos(-60^\circ)]$$

$$= -\frac{1}{2}[0 - \cos 60^\circ] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

8- د ضرب د حاصل په شکل يې واړوي.

$$1:\quad \cos 16^\circ + \sin 34^\circ + \sin 50^\circ = 2\cos\frac{16+34}{2}\cos\frac{34-16}{2} + 2\sin 25\cos 25$$

$$= 2\cos 25^\circ \cos 9^\circ + 2\sin 25^\circ \cos 25^\circ = 2\cos 25^\circ(\cos 9^\circ + \cos 65^\circ)$$

$$= 2\cos 25^\circ(2\cos\frac{9+65}{2}\cos\frac{65-9}{2}) = 4\cos 25^\circ \cos 37^\circ \cos 28^\circ$$

$$\sin 60^\circ - \sin 30^\circ = 2\cos 45^\circ \sin 15^\circ$$

$$\cos 42^\circ + \cos 148^\circ = 2\cos 95^\circ \cos 35^\circ$$

$$\sin 12\beta - \sin 3\beta = 2\cos\frac{15\beta}{2}\sin\frac{9\beta}{2}$$

$$\cos 50^\circ - \cos 20^\circ = -2\sin 35^\circ \sin 15^\circ$$

$$\sin 70^\circ + \sin 20^\circ = \sqrt{2}\cos 25^\circ$$

$$\tan 70^\circ + \tan 10^\circ = \frac{\sin(70^\circ + 10^\circ)}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1}{\cos 70^\circ}$$

$$\cot 80^\circ - \cot 20^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2\sin 80^\circ \cdot \sin 20^\circ}$$

$$2:\quad \sin A - \sin 5A) + (\sin 9A + \sin 3A)$$

$$= (2\cos\frac{A+5A}{2}\sin\frac{A-5A}{2}) + (2\sin\frac{9A+3A}{2}\cos\frac{9A-3A}{2})$$

$$= 2\cos 3A\sin(-2A) + 2\sin 6A\cos 3A\cos 3A = -2\cos 3A\sin 2A + 2\sin 6A\cos 3A$$

$$= 2\cos 3A(\sin 6A - \sin 2A) = 2\cos 3A(2\cos\frac{6A+2A}{2}\sin\frac{6A-2A}{2})$$

$$= 4\cos 3A\cos 4A\sin 2A$$

$$3:\quad \sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C)$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C-A-B-C}{2}\cos\frac{C+A+B+C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{2C+A+B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{2C+A+B}{2}]$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}[2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}] = 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$

4- که A,B او C د يو مثلث درې زاويې وي نو:

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4\cos A\cos B\cos C + 1 = 0$ دی.

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=2\cos^2 A-1+2\cos(B+C)\cos(B-C)$$
$$=2\cos^2 A-1-2\cos A\cos(B-C)=2\cos A[\cos A-\cos(B-C)]-1$$
$$=-2\cos A[\cos(B+C)+\cos(B-C)]-1=-4\cos A\cos B\cos C-1$$
$$\Rightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0$$

9- وښاياست چې:

$$\frac{\sin 3\propto+\sin 5\propto+\sin 7\propto+\sin 9\propto}{\cos 3\propto+\cos 5\propto+\cos 7\propto+\cos 9\propto}=\tan 6\propto$$
$$\frac{\sin 3\propto+\sin 5\propto+\sin 7\propto+\sin 9\propto}{\cos 3\propto+\cos 5\propto+\cos 7\propto+\cos 9\propto}=\frac{2\sin 6\propto\cdot\cos(-3\propto)+2\sin 6\propto\cdot\cos(-\propto)}{2\cos 6\propto\cdot\cos(-3\propto)+2\cos 6\propto\cos(-\propto)}=\tan 6\propto$$
$$\frac{\sin^2 x+\sin x\sin 3x+\sin x\sin 5x}{\cos^2 x+\cos x\cos 3x+\cos x\cos 5x}=\tan x\cdot\tan 3x$$
$$\frac{\sin x(\sin x+\sin 3x+\sin 5x)}{\cos x(\cos x+\cos 3x+\cos 5x)}=\tan x\cdot\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$$
$$=\tan\cdot\frac{2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x}{2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x}=\tan x\cdot\frac{\sin 3x(2\cos 2x+1)}{\cos 3x(2\cos 2x+1)}=\tan x\cdot\tan 3x$$

10- وښاياست چې $\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$ دی.

يا:

$$\sin\frac{\pi}{9}\cdot\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{3}{16}$$

11- که $A=\frac{\pi}{8}$ وی:

$$\frac{\cos 13A+\cos A}{\cos 7A\cdot\cos 2A}=-2$$
$$\frac{\cos 13A+\cos A}{\cos 7A\cdot\cos 2A}=\frac{2\cos 7A\cdot\cos 6A}{\cos 7A\cdot\cos 2A}=\frac{2(-\cos 2A)}{\cos 2A}=-2\qquad \begin{cases}8A=\pi\Rightarrow 6A+2A=\pi\\ 6A=\pi-2A\\ \cos 6A=\cos(\pi-2A)=-\cos 2A\end{cases}$$

12) $$\frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}-\frac{\cos 12^\circ}{\cos 4^\circ}=2$$
$$\frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}-\frac{\cos 12^\circ}{\cos 4^\circ}=\frac{\sin 12^\circ\cos 4^\circ-\cos 12^\circ\sin 4^\circ}{\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=\frac{2\sin 8^\circ}{2\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=\frac{2\sin 8^\circ}{\sin 8^\circ}=2$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- وښاياست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ+\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ-\sin 37^\circ}=\cot 8^\circ$$

حل:

$$\frac{\cos 37^\circ+\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ-\sin 37^\circ}=\frac{\sin 53^\circ+\sin 37^\circ}{\sin 53^\circ-\sin 37^\circ}=\frac{2\sin\frac{53^\circ+37^\circ}{2}\cdot\cos\frac{53^\circ-37^\circ}{2}}{2\cos\frac{53^\circ+37^\circ}{2}\cdot\sin\frac{53^\circ-37^\circ}{2}}=\frac{\sin 45^\circ\cdot\cos 8^\circ}{\cos 45^\circ\cdot\sin 8^\circ}=\cot 8^\circ$$

په دويمه طريقه:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \frac{\cos 37^\circ + \cos(90^\circ - 37^\circ)}{\cos 37^\circ - \cos(90^\circ - 37^\circ)}$$

$$= \frac{\cos 37^\circ + \cos 53^\circ}{\cos 37^\circ - \cos 53^\circ} = \frac{2\cos\frac{37^\circ + 53^\circ}{2}\cos\frac{37^\circ - 53^\circ}{2}}{-2\sin\frac{37^\circ + 53^\circ}{2}\sin\frac{37^\circ - 53^\circ}{2}} = \frac{\cos 45^\circ \cos(-8^\circ)}{-\sin 45^\circ \sin(-8^\circ)} = \frac{\cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = \cot 8^\circ$$

-2 د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعې یا تفاضل په شکل تبدیل کړئ.

$a)\ \sin 5x \cos 8x \quad b)\ \sin 3\theta \cos 5\theta \quad c)\ \cos 30^\circ \cos 60^\circ \quad d)\ \sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$

$e)\ \cos 5x \sin 8x \quad f)\ \cos 7\theta \sin 5\theta \quad g)\ \sin 88^\circ \sin 12^\circ \quad h)\ 2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$

$i)\ 2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta \quad j)\ 2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha \quad k)\ \sin\frac{A+B}{2}\quad \cos\frac{A\quad B}{2}$

حل:

$$a)\ \sin 5x \cos 8x = \frac{1}{2}(\sin 13x - \sin 3x)$$

$$b)\ \sin 3\theta \cos 5\theta = \frac{1}{2}(\sin 8\theta - \sin 2\theta)$$

$$c)\ \cos 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{1}{2}(\cos 90^\circ + \cos 30^\circ)$$

$$d)\ \sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ = \frac{1}{2}(\sin 56^\circ + \sin 8^\circ)$$

$$e)\ \cos 5x \sin 8x = \frac{1}{2}(\sin 13x + \sin 3x)$$

$$f)\ \cos 7\theta \sin 5\theta = \frac{1}{2}(\sin 12\theta - \sin 2\theta)$$

$$g)\ \sin 88^\circ \sin 12^\circ = -\frac{1}{2}(\cos 100^\circ - \cos 76^\circ) = \frac{1}{2}(\cos 76^\circ - \cos 100^\circ)$$

$$h)\ 2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ = -(\cos 80^\circ - \cos 40^\circ) = \cos 40^\circ - \cos 80^\circ$$

$$i)\ 2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta = (\sin 12\theta - \sin 4\theta)$$

$$j)\ 2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha = (\sin 100 - \sin 50)$$

$$k)\ \sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}[\sin(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}) + \sin(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2})] = \frac{1}{2}[\sin A + \sin B]$$

-3 د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې یا تفاضل حاصل، د ضرب د حاصل په شکل تبدیل کړئ.

$a: \cos 56^\circ + \cos 22^\circ \quad b: \sin 84^\circ - \sin 76^\circ \quad c: \sin 94^\circ - \sin 86^\circ \quad d: \cos 86^\circ + \cos 22^\circ$

$e: \cos 84^\circ - \cos 76^\circ \quad f: \sin 8\theta + \sin 4\theta \quad g: \cos 95^\circ - \cos 41^\circ \quad h: \sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$

$i: \sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6} \quad j: \cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3} \quad k: \cos 84^\circ + \cos 76^\circ \quad l: \cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$

حل:

$$a)\ \cos 56^\circ + \cos 22^\circ = 2\cos\frac{56^\circ + 22^\circ}{2} \cdot \cos\frac{56^\circ - 22^\circ}{2} = 2\cos 39^\circ \cos 17^\circ$$

$$b)\ \sin 84^\circ - \sin 76^\circ = 2\cos\frac{84^\circ + 76^\circ}{2} \cdot \sin\frac{84^\circ - 76^\circ}{2} = 2\cos 80^\circ \cdot \sin 4^\circ$$

c) $\sin 94° - \sin 86° = 2\cos\frac{94° + 86°}{2} \cdot \sin\frac{94° - 86°}{2} = 2\cos\frac{180°}{2} \cdot \sin\frac{8°}{2} = 2\cos 90° \cdot \sin 4°$

d) $\cos 86° + \cos 22° = 2\cos\frac{86° + 22°}{2} \cdot \cos\frac{86° - 22°}{2} = 2\cos 54° \cdot \cos 32°$

e) $\cos 84° - \cos 76° = -2\sin\frac{84° + 76°}{2} \cdot \sin\frac{84° - 76°}{2} = -2\sin 80° \cdot \sin 4°$

f) $\sin 8\theta + \sin 4\theta = 2\sin\frac{8\theta + 4\theta}{2} \cdot \cos\frac{8\theta - 4\theta}{2} = 2\sin 6\theta \cdot \cos 2\theta$

g) $\cos 95° - \cos 41° = -2\sin\frac{95° + 41°}{2} \cdot \sin\frac{95° - 41°}{2} = -2\sin 68° \cdot \sin 27°$

h) $\sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2} = 2\cos(\frac{P+Q}{2} + \frac{P-Q}{2})\frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{P+Q}{2} - \frac{P-Q}{2})\frac{1}{2} = 2\cos\frac{P}{2} \cdot \sin\frac{Q}{2}$

i) $\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6} = 2\cos\frac{10x + 5x}{6} \cdot \sin\frac{10x - 5x}{6}) = 2\cos\frac{15x}{6} \cdot \sin\frac{5x}{6}$

j) $\cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3} = 2\cos\frac{\frac{3A}{4} + \frac{4A}{3}}{2} \cdot \cos\frac{\frac{3A}{4} - \frac{4A}{3}}{2} = 2\cos\frac{25A}{24} \cdot \cos\frac{7A}{24}$

k) $\cos 84° + \cos 76° = 2\cos\frac{84° + 76°}{2} \cdot \cos\frac{84° - 76°}{2} = 2\cos\frac{160°}{2} \cdot \cos\frac{8°}{2} = 2\cos 80° \cdot \cos 4°$

l) $\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}}{2} \cos\frac{\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}}{2} = 2\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2}$

4- وښاياست چې:

a) $\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A$

$$\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \frac{2\cos\frac{6A}{2} \cdot \sin\frac{2A}{2}}{2\cos\frac{6A}{2} \cdot \cos\frac{2A}{2}} = \frac{2\cos 3A \cdot \sin A}{2\cos 3A \cdot \cos A} = \tan A$$

b) $\frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta$

$$\frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \frac{2\cos(\frac{\beta + 9\beta}{2})\cos(\frac{\beta - 9\beta}{2})}{2\sin(\frac{\beta + 9\beta}{2})\cos(\frac{\beta - 9\beta}{2})} = \frac{2\cos 5\beta \cdot \cos(-4\beta)}{2\sin 5\beta \cdot \cos(-4\beta)} = \cot 5\beta$$

c) $\sin 10° \cdot \sin 30° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70° = \frac{1}{16}$

په $= \sin 10° \cdot \sin 30° \cdot \frac{1}{2}(2\sin 50° \cdot \sin 70°) = \sin 10° \cdot \sin 30° \cdot \frac{1}{2}[-\cos(50° + 70°) + \cos(50° - 70°)]$

$= \sin 10° \cdot \sin 30° \cdot \frac{1}{2}[-\cos 120° + \cos(-20°)] = \sin 10° \cdot (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})[\cos 20° - \cos 120°]$

$= \frac{1}{4}(\sin 10° \cdot \cos 20° - \sin 10° \cdot \cos 120°) = \frac{1}{4}[\sin 10° \cdot \cos 20° - \sin 10°(-\frac{1}{2})]$

$= \frac{1}{4}\left[\sin 10° \cos 20° + \frac{1}{2}\sin 10\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{2\sin 10° \cos 20°}{2} + \frac{1}{2}\sin 10°\right]$

$= \frac{1}{8}[2\sin 10° \cos 20° + \sin 10°] = \frac{1}{8}[\sin 30° - \sin 10° + \sin 10°] = \frac{1}{8}(\sin 30°) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

دویمه طریقه:

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \sin 30^\circ \cdot (\sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ) \cdot \sin 50^\circ$$

$$= \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}(\cos 80^\circ - \cos(-60^\circ))] \cdot \sin 50^\circ = -\frac{1}{4}[\cos 80^\circ - \frac{1}{2}] \cdot \sin 50^\circ$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 50^\circ \cdot \cos 80^\circ + \frac{1}{8} \cdot \sin 50 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}[\sin 130^\circ + \sin(-30^\circ)] + \frac{1}{8}\sin 50^\circ$$

$$= -\frac{1}{8}[\sin 50^\circ - \sin 30^\circ] + \frac{1}{8}\sin 50^\circ = -\frac{1}{8}\sin 50^\circ + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sin 50^\circ = \frac{1}{16}$$

d) $\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = \frac{1}{16}$

$$\cos 20° \cdot \cos 40° \frac{1}{2} \cdot \cos 80° = \frac{2}{2}\cos 20° \cdot \cos 40°(\frac{1}{2})\cos 80° = \frac{1}{4}[2\cos 20° \cdot \cos 40 \cdot \cos 80°]$$

$$= \frac{1}{4}[2\cos 20° \cos 40°]\cos 80° = \frac{1}{4}[\cos 60° + \cos 20°]\cos 80° = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \cos 20°\right]\cos 80°$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\frac{1}{2})\cos 80° + \cos 20° \cdot \cos 80°\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\left[2(\frac{1}{2})\cos 80° + 2\cos 20° \cos 80°\right]$$

$$= \frac{1}{8}[\cos 80° + \cos(20° + 80°) + \cos(20° - 80°)] = \frac{1}{8}[\cos 80° + \cos 100° + \cos 60°]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\cos 80° + \cos(180° - 80) + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8}\left[\cos(80° - \cos 80°) + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ وي(د يو مثلث د داخلي زاويو مجموعه) وښاياست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

حل: لومړی طریقه:

$$(\sin A + \sin B) + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$

$$= 2\cos\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}) = 2\cos\frac{C}{2}(2\cos\frac{\frac{A+B+A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B-A+B}{2}}{2})$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}(2\cos\frac{2A}{4} \cdot \cos\frac{2B}{4}) = 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

$$A + B + C = 180$$

$$A + B = 180 - C$$

$$\sin(\frac{A+B}{2}) = \sin(90 - \frac{C}{2}) = \cos\frac{C}{2}$$

دویمه طریقه:

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right]=2\sin\frac{A+B}{2}\left[2\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right]$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

6- وښاياست چې $\sin 10°+\sin 50°-\sin 70°=0$

پام مو وي چې: د درسي کتاب د 248 مخ په لومړي کرښه کې په اشتباهي ډول $\sin 75°$ ليکل شوي دی، مهرباني وکړئ هغه $\sin 70°$ کړئ.

حل:

$$\sin 10°+(\sin 50°-\sin 70°)=\sin 10°+2\cos\frac{50°+70°}{2}\cdot\sin\frac{50°-70°}{2}$$

$$=\sin 10°+2\cos 60°\cdot\sin(-10)$$

$$=\sin 10°-2\cos 60°\cdot\sin 10°=\sin 10°-2\cdot\frac{1}{2}\sin 10°=0$$

7- $\sin 30°\cos 60°+\cos 30°\sin 60°=\ ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

حل:

$$\sin 30°\cos 60°+\cos 30°\sin 60°$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(60°+30°)+\sin(60°-30°)]+\frac{1}{2}[\sin(60°+30°)-\sin(60°-30°)]$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 90°+\sin 30°)+\frac{1}{2}(\sin 90°-\sin 30°)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=1$$

(د b جز سم دی).

8- د جمعې يا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښاياست چې:

a) $\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$ c) $\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$ e) $\sin(360°-\theta)=-\sin\theta$

b) $\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ d) $\cos(270°+\theta)=\sin\theta$ f) $\cos(360°-\theta)=\cos\theta$

حل:

$a)\ \sin(180°+\theta)=\sin 180\cdot\cos\theta+\cos 180\cdot\sin\theta=0+(-1)\cdot\sin\theta=-\sin\theta$

$b)\ \sin(270°+\theta)=\sin 270\cdot\cos\theta+\cos 270\cdot\sin\theta=-\cos\theta$

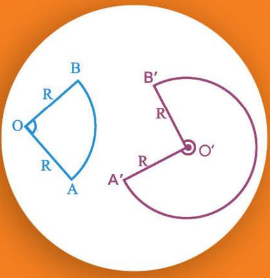
$c)\ \cos(180°+\theta)=\cos 180\cdot\cos\theta+\sin 180\cdot\sin\theta=-\cos\theta$

$d)\ \cos(270°+\theta)=\cos 270\cdot\cos\theta-\sin 270\cdot\sin\theta=-\sin\theta$

$e)\ \sin(360°-\theta)=\sin 360\cdot\cos\theta-\cos 360\cdot\sin\theta=-\sin\theta$

$f)\ \cos(360°-\theta)=\cos 360\cdot\cos\theta+\sin 360\cdot\sin\theta=\cos\theta$

$$\begin{cases}\sin 270=-1\\ \cos 180=-1\\ \cos 270=0\\ \cos 360=1\\ \sin 360=0\end{cases}$$



د قوس اوږدوالی (Arc Length)

د درسي کتاب: (249)مخ **د لوست وخت:**(2 درسي ساعتونه)

د زده کړې موخې **- پوهنيزې** **- مهارتي** **- ذهنيتي**	ددې لوست په پای زده کوونکي باید: • د يوې دايرې د قوس د اوږدوالي د پيداکولو طريقه زده کړي. • د قطاع او قطعې تعريفونه زده کړي. • د قوس د اوږدوالی د دايرې د شعاع د قطاع د مساحت او د دايرې د مرکزي زاويې ترمنځ په اړيکه ويوهيږي. • د يوې دايرې د قطعې او قطاع مساحت پيداکړای شي. • د يوې دايرې د قوس اوږدوالی پيداکړای شي. • د هندسي مسايلو په حلولو کې ددې اړيکو اهميت درک کړي او زده کړې ته يې علاقه مند شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته د انګيزې د پيداکولو لپاره ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $R = 5cm$ $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$Radian $L = ?$ $L = R\theta = 5cm(\frac{\pi}{4})^R = \frac{5\pi cm}{4}$ $L = \frac{5\cdot\frac{22}{7}}{4}cm = \frac{110}{7}\cdot\frac{1}{4}cm \approx 3.92cm$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

محترم ښوونکي په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، د شکل له مخې دې وروښودل شي چې که د دوو قوسونو شعاعګانې سره مساوي وي، ددې قوسونو اوږدوالي د راډيان په حساب د قوسونو له اندازې سره متناسب دي.د قوس د اوږدوالي فرمول په لاس راوړئ، بيا دې ښوونکي لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي او دريم مثال دې په خپله خوښه يو زده کوونکي حل کړي، بيا دې د يوې دايرې قطاع تعريف شي او د قطاع د مساحت فورمول په لاس راوړئ. د 251 مخ لومړی، دويم او دريم مثال حل کړئ.

څلورم او پنځم مثال دې زده کوونکي په خپله خوښه حل کړي او د (252) مخ فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې کار کړي او خپل کار دې نورو ته توضيح کړي.

شپږم او اووم مثال دې حل شي، بيا د دايرې قطعه تعريف کړئ او د قطعې د مساحت فورمول دې ثبوت شي لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ

د (256) مخ فعالیت دې زده‌کوونکي سرته ورسوي او ښاغلی ښوونکي دې د درېیم مخ مثال حل کړي.

د زده‌کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

ددې لوست لومړی پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د ارزونې لپاره دې د (256) مخ دویمه پوښتنه حل شي.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د هغې دایرې د شعاع اوږدوالی چې د 45° زاویې د مخامخ قوس اوږدوالی $3\pi cm$ وي، عبارت دی له:

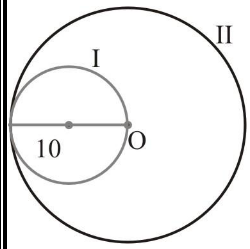
$$45^\circ = (\frac{\pi}{4})\text{Radian} \qquad L = R\theta \Rightarrow 3\pi\text{cm} = R\frac{\pi}{4} \Rightarrow R = 12\text{cm}$$

- د هغې دایرې د شعاع اوږدوالی چې محیط او مساحت یې سره مساوي وي عبارت دی له:

$$\pi R^2 = 2\pi R \Rightarrow R = 2$$

- د هغې دایرې د شعاع اوږدوالی چې مساحت یې د محیط شپږ چنده وي مساوي دی په:

$$\pi R^2 = 6\cdot 2\pi R \Rightarrow R^2 = \frac{12\pi R}{\pi} \Rightarrow \frac{R^2}{R} = \frac{12R}{R} \Rightarrow R = 12$$



لومړی دایره د دویمې دایرې له مرکز څخه تیرېږي او له دویمې دایرې سره مماس ده که د لومړۍ دایرې مساحت $4cm^2$ وي، د دویمې دایرې مساحت $16cm^2$ دی.

- که د یوې دایرې د شعاع اوږدوالی 10 واحده وي، د هغو قطاعګانو مساحت چې د $90^\circ, 72^\circ, 80^\circ, 216^\circ$ او 324° قوسونو په مقابل کې واقع دي عبارت دي له:

  $60\pi, 50\pi, 20\pi, 25\pi$ او 90π د اوږوالی د واحد مربع.

- که د یوې دایرې مساحت 180cm^2 وي، د 80° قطاع مساحت یې $40cm^2$ دی.
- که د یوې دایرې قطر 10m وي، د لاندینیو مرکزي زاویو د مقابلو قوسونو اوږدوالی یې په لاندې ډول دی:

مرکزي زاویه	د مخامخ قوس اوږدوالي
3.8 radian	19m
2.4 radian	12m
45 radian	225m
72 radian	360m
$\frac{\pi}{3}$ radian	$\frac{5\pi}{3}$ m
$\frac{\pi}{2}$ radian	$\frac{5\pi}{2}$ m
$\frac{7\pi}{4}$ radian	$\frac{35\pi}{4}$ m
$\frac{7\pi}{6}$ radian	$\frac{35\pi}{6}$ m

د پوښتنو ځوابونه:

1- که د یوې دایرې شعاع 20cm وي، د $\frac{\pi}{6}$ راډیان مرکزي زاویې د قطاع مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې:

$$S = \frac{1}{2}R^2 \cdot \theta$$

$$S = \frac{1}{2}(20cm)^2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}400 \cdot \frac{\pi}{6}cm^2 = \frac{100}{3}\pi cm^2 \approx 104.6cm^2$$

2- که د یوې قطاع مساحت $55.5cm^2$ او د دایرې شعاع $12cm$ وي، اړونده مرکزي زاویه یې پیدا کړئ.

$$S = \frac{1}{2}R^2\theta \Rightarrow \theta = \frac{2S}{R^2}$$

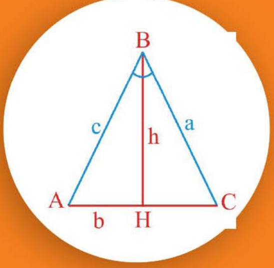
$$\theta = \frac{2(55.5)cm^2}{(12cm)^2} = \frac{111}{144}(Radian)$$

3- که د یوې دایرې د شعاع اوږدوالی $10m$ وي، د 3,8 او 27 راډیان مرکزي زاویو د مقابلو قوسونو اوږدوالی پیدا کړي.

حل:

$a)\ \ S = r\theta \Rightarrow S = 10cm(3 \cdot 8) = 38cm$

$b)\ \ S = 10cm \cdot 27 = 270cm$



د دوو ضلعو او د دوی تر منځ د زاویې له مخې د مثلث د مساحت پیدا کول

د درسي کتاب (257)مخ **د لوست وخت:** (3 درسي ساعتونه)

د زده کړې موخې **- پوهنیزې** **- مهارتي** **- ذهنیتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د درېو ضلعو او د دوو ضلعو او د دوی تر منځ زاویې له جنسه د مثلث د مساحت د پیدا کولو په طریقه وپوهیږي. • د مثلث د ضلعو د اوږدالی له جنسه د مثلث د مساحت او د مثلث د محیطي دایرې د شعاع د اوږدوالی د پیداکولو په فورمولونو وپوهیږي. • د یو مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاعګاني پیداکړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې ددې فورمولونو اهمیت درک او زده کړې ته یې علاقه مند شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $s=\frac{1}{2}(4\cdot 8)cm^2\cdot\sin 30=16\cdot\frac{1}{2}cm^2=8cm^2$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

له دې وروسته چې ښاغلی ښوونکي د مساحت فورمول لاس ته راوړ، ددې لوست فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او تاسو لومړی، دویم او دریم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

له دې وروسته د $\sin\frac{A}{2}$ فورمول ثبوت کړئ، د (259) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي او ښاغلي ښوونکي دې لارښوونه او مرسته ورسره وکړي. له دې وروسته چې ښوونکي د $\cos\frac{A}{2}$ فرمول ثبوت کړي. زده کوونکي دې د (260) مخ فعالیت سرته ورسوي . محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره د مثلث د درېو ضلعو د اوږدوالي له مخې دمثلث مساحت د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره په لاس راوړي. دریم مثال دې حل کړي، د (261) مخ فعالیت دې په خپله خوښه یو زده کوونکی حل کړي، څلورم او پنځم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره ښوونکي حل کړي، بیا دې ښوونکي د مثلث د محیطي شعاع د اوږدوالي فورمول په لاس راوړي او لومړی مثال دې حل کړي او ددې مخ فعالیت دې زده کوونکي حل کړي، بیاکولای شي چې ددې مخ دویم مثال یو زده کوونکي په خپله خوښه حل کړي. محترم ښوونکي دې د محاطي دایرې د شعاع د اوږدوالی فورمول ثبوت کړي او د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره دې دریم، څلورم او پنځم مثال حل کړي.

د پنځم مثال په لیکنه کې اشتباه شوي ده او د مثلث مساحت په $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$ سره ښودل شوی دی چې په حقیقت کې محیطي شعاع $R=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$ ده، له دې وروسته چې ښوونکي د شکل له مخې د متساوي الاضلاع مثلث لوړوالی، مساحت، محیطي او محاطي شعاعګاني په لاس راوړي، د زده‌کوونکو په ونډې اخیستنې سره دې شپږم مثال حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a=7\text{cm}\ \ b=9\text{cm}\ \ c=12\text{cm}$ وي؟

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

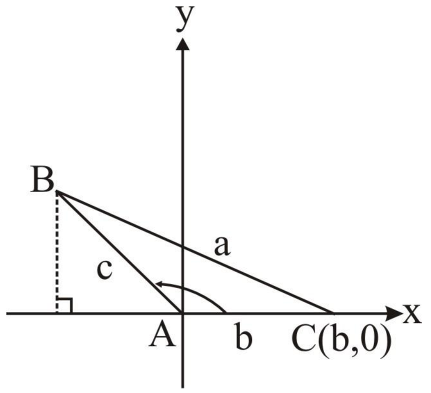
د (267) مخ دویمه پوښتنه له زده‌کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

په هره مثلث کې

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

چې د کوساین د قضیې په نامه یادیږي.



د $\overset{\Delta}{ABC}$ په پام کې نیسو چې د A زاویه په معیاري حالت کې رسم شوي ده.

د B د نقطې وضعیه کمیات د $(c\cos A, c\sin A)$ څخه عبارت دی.

$$\overline{B}C=\sqrt{(c\cos A-b)^2+(c\sin A-0)^2}=\sqrt{c^2\cos^2 A-2bc\cos A+b^2+c^2\sin^2 A}$$
$$=\sqrt{c^2(\cos^2 A+\sin^2 A)+b^2-2bc\ \cos A}=\sqrt{b^2+c^2-2bc\ \cos A}$$
$$|BC|=a$$
$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\ \cos A}$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos A$$

یا:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

په همدې ډول:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c$

د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونو پيداکول، د زاويې د ضلعو د اوږدوالي له جنسه:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad , \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

څرنګه چې پوهيږو:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \qquad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

$a+b+c = 2p$

$a+b+c-2b = 2p-2b$

$a+c-b = 2(p-b)$

$a+b+c+2p$

$a+b+c-2c = 2p-2c$

$a+b-c = 2(p-c)$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

همدارنګه دوه نورې اړيکې هم ثبوتيږي.

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$a+b+c = 2p$

$a+b+c-2a = 2p-2a$

$b+c-a = 2(p-a)$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2p\cdot 2(p-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

په پايله کې لرو چې:

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \qquad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

- څه وخت چې د مثلث دوې ضلعي او د دوي ترمنځ زاويه معلومه وي، د لاندينيو مثلثونو مساحت تر يوې اعشاري خانې پورې په لاندې ډول دی.

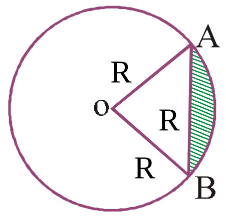
$a=5in$	$c=8in$	$A=45^\circ$	$\Rightarrow$	$S=14.1in^2$
$a=10\ ft$	$c=12\ ft$	$B=30^\circ$	$\Rightarrow$	$S=30\ ft^2$
$a=9in$	$b=11in$	$C=60^\circ$	$\Rightarrow$	$S=42.9in^2$
$b=7cm$	$c=10cm$	$A=45^\circ$	$\Rightarrow$	$S=24.7cm^2$
$a=6km$	$c=10km$	$B=57^\circ$	$\Rightarrow$	$S=25.2km^2$
$a=25\ ft$	$b=32\ ft$	$C=67^\circ$	$\Rightarrow$	$S=368.2\ ft^2$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د شکل په شان د OAB مثلث، متساوي الاضلاع مثلث دی، چې هره ضلعه يې R ده، د O په مرکز يوه دايره رسم شوې ده چې د A او B له نقطو څه تيريږي، د AB له وتر سره د اړوندې قطعې مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$



حل:

د قطعې مساحت $S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$

$$\theta=60=\frac{\pi}{3}^R,\ \sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})=R^2(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})$$

(e د جز سم دی).

2- که د يو متساوي الساقين مثلث د هر ساق اوږدوالی $6cm$ او ترمنځ زاويه يې 30° وي، ددې مثلث مساحت پيدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\sin 30^\circ=18\cdot\frac{1}{2}=9cm^2$$

3- که د يوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}cm$ او $6cm$ او ترمنځ زاويه يې 45° وي ددې مثلث مساحت پيدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6cm\cdot 5\sqrt{2}cm\cdot\sin 45^\circ$$

$$S=5\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=15cm^2$$

4-که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $3cm$ ، $4cm$ او $5cm$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل:

$$P=\frac{3+4+5}{2}=\frac{12}{2}=6$$

$$S=\sqrt{P(p-a)(p-b)(P-c)}=\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}=\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}=\sqrt{36}=6cm^2$$

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږوالی یې $a=7cm$ ، $b=9cm$ او $c=12cm$ وي.

حل: څرنګه چې:

$$\mathrm{P}=\frac{9+7+12}{2}=\frac{28}{2}=14\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{S}=\sqrt{\mathrm{P(p-a)(p-b)(p-c)}}=\sqrt{14(14-9)(14-7)(14-12)}=\sqrt{14(5)(7)(2)}=\sqrt{2.7.5.7.2}=14\sqrt{5}\mathrm{cm}^2$$

6- د هغه قایمه الزاویه مثلث د محیطي دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ چې د قایمو ضلعو اوږدوالی یې $12cm$ او $5cm$ وي.

$$R=\frac{a.b.c}{4S}$$

$$C^2=12^2+5^2=144+25=169$$

$$c=13$$

$$P=\frac{12+13+5}{2}=\frac{30}{2}=15$$

$$S=\sqrt{15(15-12)(15-5)(15-13)}=\sqrt{15\cdot3\cdot10\cdot2}=\sqrt{900}=30cm^2$$

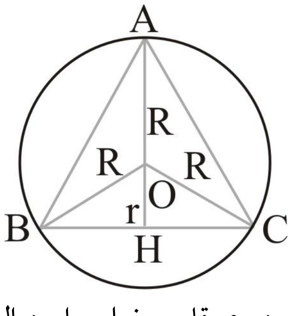
$$R=\frac{12\cdot5\cdot13cm^3}{4\cdot30cm^2}=\frac{13}{2}cm=6.5cm$$

7-که د ABC د متساوي الساقین مثلث د قاعدې اوږدوالی $a=8cm$ او محاطي شعاع یې $\mathrm{r}=3\mathrm{cm}$ وي ددې مثلث د ساقو او محیطي دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړې.

حل: څرنګه چې د OBC مثلث متساوي الساقین دی، نو دوه ضلعې یې سره مساوي او د ABC د مثلث د محیطي دایرې شعاعګانې سره مساوي دي او لوړوالی (ارتفاع) یې $r=0H$ د BC مقابله ضلع نیمايي کوي.

$$R=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5cm$$

$$AC=AB=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}cm$$



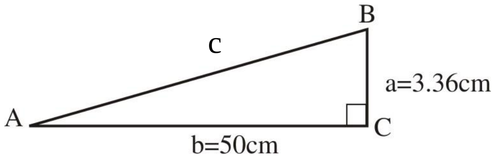
8-که د یو قایم الزاویه مثلث مساحت $84cm^2$ او د یوې قایمې ضلعې اوږدوالی یې $3.36cm$ وي ددې مثلث د محیطي دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{b\cdot h}{2}\Rightarrow 84=\frac{b\cdot 3,36}{2}\Rightarrow b=\frac{2\cdot 84}{3,36}=50cm$$

$$C^2=(3,36)^2+(50)^2=2511.7896\Rightarrow c=50.11cm$$

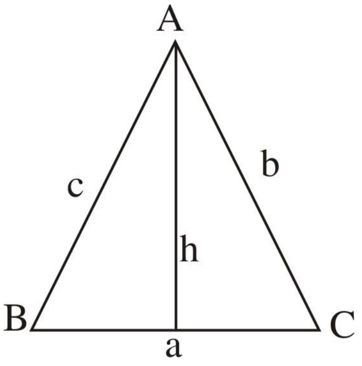
$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}=\frac{3.36\cdot 50\cdot 50.11}{4\cdot 84}=25.055\approx 25cm$$



د څېرکی د پوښتنو حل:

1- که د یوه متساوي الاضلاع مثلث هره ضلعه a وي وښایاست چې ددې مثلث مساحت $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a$ دی.

حل:



$$c^2=h^2+(\frac{a}{2})^2$$

$$h^2=a^2-\frac{a^2}{4}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$S=\frac{\frac{a(\sqrt{3}a)}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

2- که د یو مثلث د ضلعو اوږدوالی $C=9cm,\ b=8cm,\ a=7cm$ وي، ددې مثلث مساحت پیداکړئ.

حل:

$$P=\frac{7+8+9}{2}=\frac{24}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)}\Rightarrow$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=\sqrt{12\cdot5\cdot4\cdot3}=\sqrt{3\cdot4\cdot5\cdot4\cdot3}=12\sqrt{5}cm^2$$

3- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې د فرمولونو په مرسته $\text{Cos}165^\circ$ او $\text{Sin}165^\circ$ پیداکړئ.

$$\text{Sin}(165^\circ)=\text{Sin}(120^\circ+45^\circ)=\text{Sin}120^\circ\cdot\text{Cos}45^\circ+\cos120^\circ\sin45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})+(-\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Cos}(165^\circ)=\text{Cos}(120^\circ+45^\circ)=\text{Cos}120^\circ\text{Cos}45^\circ-\text{Sin}120^\circ\text{Sin}45^\circ$$

$$=(\frac{-1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}-(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

4- $\text{Sin}(-165^\circ)=?$

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

c) $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

د b جز سم دی) ځکه چې $\text{Sin}(-165^\circ)=-\sin165^\circ=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

5- وښایاست چې:

$$\frac{\cos2\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos3\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

حل:

$$\frac{\cos2\theta\cdot\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\cos(2\theta+\theta)}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\cos3\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$$

6- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې یا تفاضل د فرمولونو په مرسته د لاندینیو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړي.

$-\quad \frac{\sqrt{\ }}{}\quad \frac{\sqrt{\ }}{}\quad \frac{\sqrt{\ }}{}\quad \frac{\sqrt{\ }}{}\quad \frac{\sqrt{\ }}{}$

$$d)\ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{21}}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{10}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{10}}$$

9- وښایاست چې:

$$a)\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$$

$$b)\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta\Rightarrow\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$c)\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$$

$$\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta+2\sin^2\theta=1$$

$$d)\ 2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta\Rightarrow 2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2\cos 2\theta$$

$$e)\ \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\cos^2-\sin^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)}=\cos\theta-\sin\theta$$

10- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $8cm,\ 7cm,\ 5cm$ وي، ددې مثلث د محیطي او محاطي شعاګانو اوږدوالی پیدا کړئ.

حل:

$$P=\frac{8+7+5}{2}=\frac{20}{2}=10$$

$$S=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)^1}=\sqrt{10\cdot5\cdot3\cdot2}=10\sqrt{3}$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{5\cdot7\cdot8}{4(10\sqrt{3})}=\frac{7}{\sqrt{3}}\qquad r=\frac{S}{P}=\frac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3}$$

11- $\sin(180^\circ+\theta)=?$

a) $\sin\theta$

b) $-\cos\theta$

c) $-\sin\theta$

d) $\cos\theta$

حل: $\sin(180^\circ+\theta)=\sin180^\circ\cdot\cos\theta+\cos180^\circ\cdot\sin\theta=-\sin\theta$ (د c جز سم دی).

12- د جمعې او تفاضل د فرمولونو په مرسته وښایاست چې:

a) $\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$

$$\sin(360^\circ-\theta)=\sin 360\cdot\cos\theta-\cos 360\cdot\sin\theta=0\cdot\cos\theta-1\cdot\sin\theta=-\sin\theta$$

b) $\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\tan180+\tan\theta}{1-\tan180\cdot\tan\theta}=\frac{0+\tan\theta}{1-0}=\tan\theta$$

c) $\sec(360° - \theta) = \sec\theta$

$$\sec(360° - \theta) = \frac{1}{\cos(360° - \theta)} = \frac{1}{\cos 360° \cdot \cos\theta + \sin 360 \cdot \sin\theta}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

-13 $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = ?$

a) $2\sin\alpha\sin\beta$

b) $2\cos\alpha\cos\beta$

c) $-2\sin\alpha\sin\beta$

$(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) - (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) = -2\sin\alpha \cdot \sin\beta$

(د c جز سم دی).

-14 وښاياست چې: $\frac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha} = \sin 5\alpha$ دی.

حل:

$$= \frac{\sin\alpha \cdot \csc 4\alpha + \cos\alpha \cdot \sec 4\alpha}{\sec 4\alpha \cdot \csc 4\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}}{\frac{1}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos 4\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 4\alpha}{\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha}}{\frac{1}{\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha}}$$

$$= \sin(\alpha + 4\alpha) = \sin 5\alpha$$

يا:

$$= \frac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha} = \sin\alpha \cdot \cos 4\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 4\alpha = \sin(\alpha + 4\alpha) = \sin 5\alpha$$

-15 د لاندې مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصلونه د جمعې يا تفاضل په شکل واړوئ.

a) $\cos 100 \cdot \sin 50^\circ = \frac{1}{2}[\sin(100^\circ + 50^\circ) - \sin(100^\circ - 50^\circ)] = \frac{1}{2}(\sin 150^\circ - \sin 50^\circ)$

b) $\cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}[\cos(60^\circ + 40^\circ) + \cos(60^\circ - 40^\circ)] = \frac{1}{2}(\cos 100^\circ + \cos 20^\circ)$

c) $\sin 8\theta \cdot \cos 10\theta = \frac{1}{2}[\sin(8\theta + 10\theta) - \sin(8\theta - 10\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 18\theta + \sin 2\theta)$

d) $\sin\frac{3\theta}{2} \cdot \sin\frac{5\theta}{2} = -\frac{1}{2}[\cos(\frac{3\theta}{2} + \frac{5\theta}{2}) - \cos(\frac{3\theta}{2} - \frac{5\theta}{2})] = -\frac{1}{2}(\cos 4\theta - \cos\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 4\theta)$

-16 د لاندې مثلثاتي نسبتونو مجموعه يا تفاضل د ضرب د حاصل په شکل واړوئ.

$\sin 80° - \sin 72°$ ، $\sin 12\theta + \sin 8\theta$

a) $\sin 80^\circ - \sin 72^\circ = 2\cos\frac{80^\circ + 72^\circ}{2} \cdot \sin\frac{80^\circ - 72^\circ}{2} = 2\cos\frac{152^\circ}{2} \cdot \sin\frac{8^\circ}{2} = 2\cos 76^\circ \cdot \sin 4^\circ$

b) $\sin 12\theta + \sin 8\theta = 2\sin\frac{12\theta + 8\theta}{2} \cdot \cos\frac{12\theta - 8\theta}{2} = 2\sin 10\theta \cdot \cos 2\theta$

-17 وښاياست چې:

$$\frac{\sin 5\theta + \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot\theta$$

حل:

$$\frac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\cos 5\theta-\cos 3\theta}=\frac{2\sin 4\theta\cdot\cos\theta}{-2\sin 4\theta\cdot\sin\theta}=-\cot\theta$$

18- د يوې دايرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دايرې د $80°$ زاويې د قطاع مساحت پيدا کړئ.

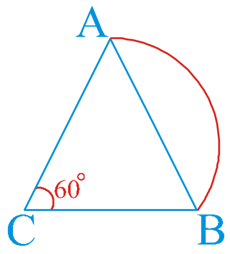
د دايرې مساحت $=\pi r^2$

$$r^2=\frac{180}{\pi}$$

$$r=\sqrt{\frac{180}{\pi}}\ ,\ s=\frac{1}{2}r^2\cdot\theta\Rightarrow S=\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{180}{\pi}})^2\cdot\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot\frac{4\pi}{9}=40cm^2$$

19- د شکل په شان د $60°$ درجې مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی 1cm دی ددې قوس د شعاع او د $\overline{AB}$ د وتر اوږدوالی پيدا کړئ.

حل:



$$S=R\cdot\theta$$

$$1=R\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$R=\frac{3}{\pi}cm$$

څرنګه چې مثلث متساوي الاضلاع دی، نو د $AB=R=\frac{3}{\pi}cm$ دی.

20- $\frac{\tan 60°-\tan 30°}{1+\tan 60°\cdot\tan 30°}=?$

a) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{3}$

d) $-\sqrt{3}$

حل:

$$\frac{\tan 60°-\tan 30°}{1+\tan 60°\cdot\tan 30°}=\tan 60-30=\tan 30=\frac{\sin 30}{\cos 30}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(د b جز سم دی).

21-که $\sin\theta=\frac{3}{5}$ او د θ دويمه ضلعه په لومړنی ناحيه کې وي، د $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ قيمتونه پيدا کړئ.

حل:

$a)\ \ \sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta\ \ ,\ \ \cos\theta=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin 2\theta=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

$b)\quad \cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2(\frac{3}{5})^2 = 1-\frac{18}{25} = \frac{7}{25}$

$c)\quad \tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{25}\cdot\frac{25}{7} = \frac{24}{7}$

22- وښاياست چې: $\tan(45^\circ+\theta) = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$ کيږي.

حل:

$$\tan(45^\circ+\theta) = \frac{\tan 45+\tan\theta}{1-\tan 45\cdot\tan\theta} = \frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

23- $\cos 37^\circ\cos 53^\circ - \sin 37^\circ\sin 53^\circ$ مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) 0 d) دري واړه سم نه دی

حل:

$\cos 37^\circ\cos 53^\circ - \sin 37^\circ\sin 53^\circ = \cos(37+53) = \cos 90 = 0$

(د c جز سم دی).

24- $\cos 60^\circ\cos 14^\circ + \sin 60^\circ\sin 14^\circ$ مساوي دی په:

a) $\cos 74^\circ$ b) $\cos 46^\circ$ c) $\sin 74^\circ$ d) $\sin 46^\circ$

حل:

$\cos 60^\circ\cos 14^\circ + \sin 60^\circ\sin 14^\circ = \cos(60-14) = \cos 46$

(د b جز سم دی).

25-

$\cos 14^\circ\cos 31^\circ - \sin 14^\circ\sin 31^\circ = ?$

a) $\cos 17^\circ$ b) $\cos 45^\circ$ c) $\sin 17^\circ$ d) $-\sin 17^\circ$

حل:

$\cos 14^\circ\cos 31^\circ - \sin 14^\circ\sin 31^\circ = \cos(14+31) = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(د b جز سم دی).

26- $\cos 80^\circ\cos 35^\circ + \sin 80^\circ\sin 35^\circ$ مساوي دی په:

a) $\cos 115^\circ$ b) $\sin 115^\circ$ c) $\cos 45^\circ$ d) $\sin 45^\circ$

حل: $\cos 80^\circ\cos 35^\circ + \sin 80^\circ\sin 35^\circ = \cos(80-35) = \cos 45$

(د c جز سم دی).

27- که $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ، $\sin\beta = \frac{5}{13}$ وي او α او β په لومړنۍ ناحیه کې واقع وي، $\cos(\alpha-\beta)$ پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$$

له بلې خوا:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{36}{65}+\frac{20}{65}=\frac{56}{65}$$

28- که $\cos\theta=-\frac{8}{17}$ ، $\cos\gamma=-\frac{3}{5}$ او د θ او γ دويمې ضلعې په دريمه ناحيه کې پرتې وي $\cos(\theta-\gamma)$ پيدا کړئ.

حل:

$$\cos(\theta-\gamma)=\cos\theta\cdot\cos\gamma+\sin\theta\cdot\sin\gamma$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(-\frac{8}{17})^2}=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\sqrt{\frac{189-64}{289}}=\pm\sqrt{\frac{125}{289}}=-\frac{15}{17}$$

(د θ دويمه ضلعه په دريمه ناحيه کې واقع ده)

$$\sin\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$\cos(\theta-\gamma)=(-\frac{18}{17})(-\frac{3}{5})+(-\frac{15}{17})(-\frac{4}{5})=\frac{24}{85}+\frac{60}{85}=\frac{84}{85}$$

29- وښاياست چې $\tan x\cdot\tan y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}$ کيږي.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}=\frac{\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y-(\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y)}{\cos x\cos y+\sin x\cdot\sin y+\cos x\cos y-\sin x\cdot\sin y}$$

$$=\frac{2\cdot\sin x\sin y}{2\cos x\cos y}=\tan x\tan y$$

30- $\cos(0°-t)=?$

$a)\sin t$ $\quad b)\cos t$ $\quad c)-\sin t$ $\quad d)-\cos t$

حل: $\cos(0°-t)=\cos(-t)=\cos t$

(د b جز سم دی).

31- وښاياست چې: $\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\sin\theta$ دی.

$$\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{\cos\theta(2\sin\theta\cdot\cos\theta)}{1+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{2\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{2\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{2\cos^2\theta}=\sin\theta$$

يا:

$$\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{\cos\theta(2\sin\theta\cos\theta)}{1+\cos^2\theta-1}=\sin\theta$$

32- وښایاست چې:

a) $\dfrac{\cos 8x+\cos 4x}{\cos 8x-\cos 4x}=-\cot 6x\cot 2x$

b) $\dfrac{\sin 4x+\sin 6x}{\cos 4x-\cos 6x}=\cot x$

c) $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}=-\cot 2x$

d) $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=-\tan x$

e) $\dfrac{\sin t+\sin 3t}{\cos t+\cos 3t}=\tan 2t$

حل:

a) $\dfrac{\cos 8x+\cos 4x}{\cos 8x-\cos 4x}=\dfrac{2\cdot\cos\dfrac{8x+4x}{2}\cdot\cos\dfrac{8x-4x}{2}}{-2\sin\dfrac{8x+4x}{2}\cdot\sin\dfrac{8x-4x}{2}}=\dfrac{2\cos 6x\cdot\cos 2x}{-2\sin 6x\cdot\sin 2x}=-\cot 6x\cdot\cot 2x$

b) $\dfrac{\sin 4x+\sin 6x}{\cos 4x-\cos 6x}=\dfrac{2\sin\dfrac{6x+4x}{2}\cdot\cos\dfrac{6x-4x}{2}}{-2\sin\dfrac{4x+6x}{2}\cdot\sin\dfrac{4x-6x}{2}}=\dfrac{2\sin 5x\cdot\cos x}{-2\sin 5x(-\sin x)}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

c) $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}=\dfrac{2\cos\dfrac{x+3x}{2}\cdot\sin\dfrac{x-3x}{2}}{-2\sin\dfrac{x+3x}{2}\cdot\sin\dfrac{x-3x}{2}}=\dfrac{2\cos 2x}{-2\sin 2x}=-\cot 2x$

d) $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\dfrac{2\cos\dfrac{x+3x}{2}\cdot\sin\dfrac{x-3x}{2}}{-2\cos\dfrac{x+3x}{2}\cdot\cos\dfrac{x-3x}{2}}=\dfrac{-2\cos 2x\cdot\sin x}{2\cos 2x\cdot\cos x}=-\tan x$

e) $\dfrac{\sin t+\sin 3t}{\cos t+\cos 3t}=\dfrac{2\sin\dfrac{t+3t}{2}\cdot\cos\dfrac{t-3t}{2}}{2\cos\dfrac{t+3t}{2}\cdot\cos\dfrac{t-3}{2}}=\dfrac{2\sin 2t\cdot\cos t}{2\cos 2t\cdot\cos t}=\tan 2t$

33- $\cos(x+y)\cos y+\sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده په:

a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $-\sin x$ d) $-\cos x$

حل:

$(\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y)\cos y+(\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y)\sin y$

$=\cos x\cdot\cos^2 y-\sin x\cdot\sin y\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin^2 y$

$=\cos x\cos^2 y+\cos x\sin^2 y=\cos x(\cos^2 y+\sin^2 y)=\cos x$

(د b جز سم دی).

34- $\sin(x-y)\cos y+\cos(x-y)\sin y=?$

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)-\sin x$ $d)-\cos x$

حل:

$$\sin x \cdot \cos^2 y - \cos x \cdot \sin y \cdot \cos y + \cos x \cdot \cos y \cdot \sin y + \sin x \cdot \sin^2 y$$
$$= \sin x \cdot \cos^2 y + \sin x \cdot \sin^2 y = \sin x(\cos^2 y + \sin^2 y) = \sin x$$

نو د a جز سم دی.

35- د هغه قطاع مساحت چې شعاع یې $2m$ او مرکزي زاویه یې $0.5Radian$ وي، مساوي دی په:

a) $3m^2$ b) $2m^2$ c) $1m^2$ d) دري واړه سمې نه دي

حل:

$$A = \frac{1}{2}R^2 \cdot \theta = \frac{1}{2}(2m)^2(0.5) = \frac{4m^2}{2}(0.5) = 1m^2$$

د c جز سم دی.

36-که د یوې قطاع مساحت $200cm^2$ او مرکزي زاویه یې 2 راډیانه وي، ددې دایرې شعاع مساوي ده په:

a) $14.14cm$ b) $-14.14cm$ c) $14cm$ d) دري واړه سمې نه دي

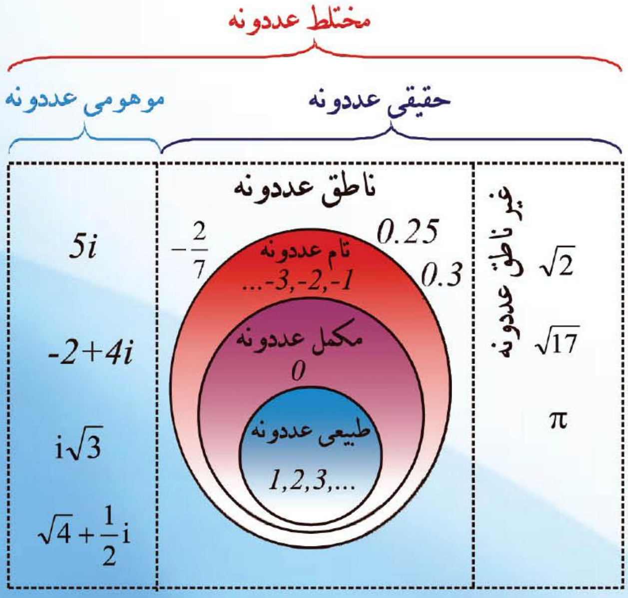
حل:

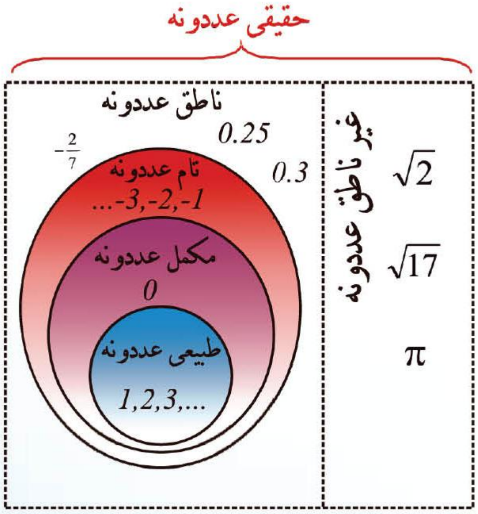
$$A = \frac{1}{2}R^2 \cdot \theta$$

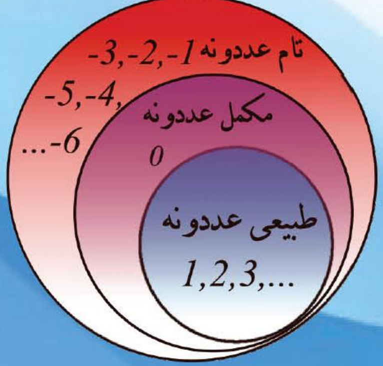
$$200 = \frac{1}{2}R^2 \cdot 2 \Rightarrow R^2 = \sqrt{200} = 14.14cm$$

د a جز سم دی.

شپږم څپرکی
مختلط عددونه

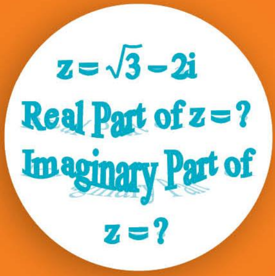

مختلط عددونه
موهومي عددونه
حقیقي عددونه
ناطق عددونه
غیر ناطق عددونه
5i
-2+4i
i√3
√4+1/2i
-2/7
0.25
0.3
تام عددونه
...-3,-2,-1
مکمل عددونه
0
طبیعي عددونه
1,2,3,...
√2
√17
π


حقیقي عددونه
ناطق عددونه
غیر ناطق عددونه
-2/7
0.25
0.3
تام عددونه
...-3,-2,-1
مکمل عددونه
0
طبیعي عددونه
1,2,3,...
√2
√17
π


تام عددونه -3,-2,-1
-5,-4,
...-6
مکمل عددونه
0
طبیعي عددونه
1,2,3,...

مختلط عددونه

د درسي کتاب (277)مخ **د لوست وخت: (1 درسي ساعت)**



د زده کړې موخې - پوهنيزې - مهارتي - ذهنيتي	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د مختلطو عددونو تعریف زده کړي، موهومي عددونه او د موهومي عددونو واحد وپيژني او د (i) توانونه پيدا کړای شي. • د مختلطو عددونو حقيقي او موهومي برخې وپيژني. • هرمختلط عدد په معياري شکل وليکلای شي. • د مختلطو عددونو خالصې حقيقي او موهومي برخې وښودلای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې له هغو څخه ګټه واخيستلای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته داسې دويمه درجه معادلې پر چارت يا پر تخته وليکئ چې د حقيقي عددونو په سټ کې حل و نه لري، ترڅو زده کوونکي د مختلطو عددونو د سټ اړتيا او اهميت درک کړي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

د موهومي عددونو مفهوم زد ه کوونکو ته وروپيژنئ او د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره لومړی او دويم مثال حل کړئ. د (i) د توانونو د پيداکولو طريقه زده کوونکو ته واضح کړئ، د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې دريم مثال حل شي. ددې لوست د 278 مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

څلورم مثال حل کړئ او د مختلطو عددونو د سټ اړتيا زده کوونکو ته واضح کړئ، صفري مختلط عدد زده کوونکو ته تعريف کړئ، د (280) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

ددې مخ لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې:

د ارزونې لپاره ددې لوست لومړۍ پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې:

له زده کوونکو دويمه پوښتنه وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

واضح ده چې $\sqrt{-1}$ يو حقيقي عدد نه دی، $\sqrt{-1}=i$ دی چې i يو موهومي عدد دی، همدارنګه $2i, -3i, \sqrt{5}i$ موهومي عددونه دي.

-1

$i^2=-1$ $\qquad$ $i^{43}=-i$

$i^3=i^2\cdot i=-i$ $\qquad$ $i^{20}=1$

$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$ $\qquad$ $i^{23}=-i$

$i^{13}=(i^2)^6\cdot i=(-1)^6\cdot i=i$ $\qquad$ $-i^{25}=-i$

$i^{256}=1$

$(-i)^{-19}=\frac{1}{i}$

-2

$\sqrt{-1}=i\Rightarrow\sqrt{-2}=\sqrt{-1\cdot 2}=\sqrt{2}i$

$\sqrt{-3}=\sqrt{-1\cdot 3}=\sqrt{3}i$

$\sqrt{-4}=\sqrt{-1\cdot 4}=\sqrt{(2i)^2}=2i$

$\sqrt{-9}=\sqrt{-1\cdot 9}=\sqrt{(3i)^2}=3i$

-3

$-\sqrt{-400}=-20i$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{-40}}{\sqrt{-10}}=2$

$\sqrt{-7}=i\sqrt{7}=\sqrt{7}i$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=-2$

$\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-5}=-5$ $\qquad$ $\frac{1}{i^9}=-i$

$\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-2}=-4$

$\sqrt{-1}b=ib=bi$

$\sqrt{\frac{-16}{25}}=\frac{4}{5}i$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{1}{-4}}=\frac{1}{2}i$

-4

$z_1=2-5i\Rightarrow Re(z_1)=2\quad,\quad im(z_1)=-5$

$z_2=-3i\Rightarrow Re(z_2)=0\quad,\quad im(z_2)=-3$

$z_3=-5\Rightarrow Re(z_3)=-5\quad,\quad im(z_3)=0$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د $(i)^{-33}$, $(i)^{79}$, i^{202} , $(2i)^2$, $(3i)^2$ قيمتونه پيدا کړئ.

حل:

$a)\ i^{-33}=\frac{1}{i^{33}}=\frac{1}{i^{4\cdot 8+1}}=\frac{1}{1\cdot i}=\frac{1}{i}=\frac{(1)(i)}{i(i)}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$

$b)\ (i)^{79}=(i)^{4\cdot 19+3}=i^{4\cdot 19}\cdot i^2\cdot i=1(-1)\cdot i=-i$

$c)\ (i)^{202}=i^{4\cdot 50+2}=i^{4\cdot 50}\cdot i^2=1(-1)=-1$

$d)\ (2i)^2=4i^2=4(-1)=-4$

$e)\ (3i)^2 = 9i^2 = 9(-1) = -9$

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معياري شکل وليکئ.

حل:

$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$

$a)\ -i-4 = -4-i$
$b)\ 5i = 0+5i$

$c)\ -4i+\sqrt{2} = \sqrt{2}-4i$

$d)\ -3i = 0-3i$

3- د $\sqrt{5}-\sqrt{7i},\ 7-i,\ 5+3i,\ -3i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل وليکئ.

$a)\ -3i = (0.-3)$

$b)\ 5+3i = (5,3)$

$c)\ 7-i = (7.-1)$

$d)\ \sqrt{5}-\sqrt{3}i = (\sqrt{5},-\sqrt{3})$

4- د $i-$ د مختلط عدد حقيقي برخه مساوي دی په:

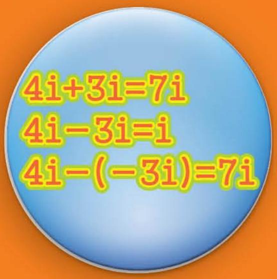
$a)1 \quad b)-1 \quad c)0 \quad d)2$

حل: څرنګه چې د $i-$ حقيقي برخه 0 ده، نو د c جز سم دی.

5- د $\sqrt{-16}$ د عدد جذر مساوي دی په:

$.a)\ \pm 4 \quad b)-4 \quad c)\pm 4i \quad d)\pm 2$

حل: $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = \pm 4i$ د c جز سم دی.



د موهومي عددونو څلور ګوني عمليې

د درسي کتاب (283) **مخ** **د لوست وخت:** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې **- پوهنيزې** **- مهارتي** **- ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د موهومي عددونو څلور ګوني عملې زده کړي او په دې پوه شي چې د موهومي عددونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبدیلي خاصیت صدق کوي. • موهومي عددونه سره جمع، تفریق، ضرب او تقسیم کړای شي او په دې پوه شي چې د دوو موهومي عددونو د ضرب او وېش حاصل یو حقیقي عدد دی. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې له دې عمليو څخه ګټه واخيستلای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنو فعاليتونو څخه وروسته په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، د تختې پر مخ دې ورودي پوښتنه وليکل شي او د انګيزې د پيداکولو لپاره له زده کوونکو دا پوښتنه وکړئ. $3i+4i=7i$ $(10i)(5i)=50i^2=50(-1)=-50$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

لومړی، دويم او دريم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ او ددې لوست لومړی فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي څلورم مثال هم د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ. او ددې لوست دويم فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**

له پوښتنو څخه لومړی پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

ددې لوست دويمه پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• $\sqrt{3-x}$ يو موهومي عدد دی که د $(3-x)$ عدد منفي وي.

$3-x<0 \qquad 3<x$

په هغه صورت کې چې $x>3$ وي، نو $\sqrt{3-x}$ يو موهومي عدد دی.

د $\sqrt{2-3x}$ عدد په هغه صورت کې يو موهومي عدد دی چې که $(2-3x)$ منفي وي. يا $x>\frac{2}{3}$ وي.

• $(\sqrt{2+\sqrt{3}})+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2=4+2\sqrt{4-3}$

$=4+2=6$

څرنګه چې $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ عدد یو مثبت عدد دی، نو د $\sqrt{3}$ $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ عدد د 6 د عدد مربع جذر دی.

همدارنګه $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=10$ کیږي، نو د $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$ عدد د 10 د عدد مربع جذر دی.

د پوښتنو ځوابونه:

1- جمع یې کړئ.

$\sqrt{-1}\ b+\sqrt{-1}c$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{7}i+\sqrt{7}i$

حل:

$a)\ (\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}\ c)=ib+ic=(b+c)i$

$b)\ \sqrt{-7}+\sqrt{-4}=\sqrt{7}i+2i=(2+\sqrt{7})i$

$c)\ \sqrt{7}i+\sqrt{7}i=(\sqrt{7}+\sqrt{7})i=2\sqrt{7}i$

2- تفریق یې کړئ.

$\sqrt{5}i-\sqrt{5}i$, $12i-7i$, $5i-2i$

حل:

a) $\sqrt{5}i-\sqrt{5}i=(\sqrt{5}-\sqrt{5})i=0i$

b) $12i-7i=(12-7)i=5i$

c) $5i-2i=(5-2)i=3i$

3- لاندیني موهومي عددونه ضرب او تقسیم کړئ.

a) $(\frac{7}{4}i)(\frac{-2}{9}i)=(\frac{7}{4})(\frac{-2}{9})i\cdot i=-\frac{7}{18}i^2=-\frac{7}{18}(-1)=\frac{7}{18}$

b) $(\sqrt{7}i)(-7i)=(\sqrt{7})(-7)(i\cdot i)=-7\cdot\sqrt{7}i^2=7\sqrt{7}$

c) $(3i)(5i)=3\cdot 5i\cdot i=15i^2=-15$

d) $\frac{16i}{-4i}=\frac{16}{-4}=-4$

e) $\frac{13i}{26i}=\frac{13}{26}=\frac{1}{2}$

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې

د درسي کتاب (285)مخ　　　**د لوست وخت:** (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې **- پوهنیزې** **- مهارتي** **- ذهنیتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د مختلطو عددونو د جمع کولو او تفریق کولو عملیې زده کړي. • مساوي مختلط عددونه، دمختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر او جمعې معکوس یې وپېژني. • مختلط عددونه جمع او تفریق کړای شي. • د مختلطو عددونو جمعې معکوسونه پیدا کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حل کې له دې عملیو څخه استفاده وکړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، پوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د انګیزې د پیدا کولو لپاره یا د چارت او یا د تختې له مخې د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $3x-2yi=6+i$　　$3x=6\Rightarrow x=2$　　$-2y=1\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

5- د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

د مساوي مختلطو عددونو له تعریفولو څخه وروسته د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره دې لومړی مثال حل شي.

د 285 مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي.

د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې له تعریفولو څخه وروسته دې دویم مثال حل شي او د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر دې وروپېژندل شي، د یو مختلط عدد جمعې معکوس دې تعریف شي. همدارنګه دې وروښودل شي چې د یو مختلط عدد او د عدد د جمعې معکوس د جمعې حاصل د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر دی. ددې لوست دویم فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي د مختلطو عددونو د تفریق د عملیې له تعریفولو څخه وروسته دې لومړی او دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

ددې لوست د پوښتنو څخه لومړی پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې:**

له پوښتنو څخه دویمه پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• لاندې مختلط عددونه په معیاري حالت کې عبارت دي له:

$(1-i)-(3+4i)+2i=-2-3i$

$(2a+ib)-(2a-ib)=0+2bi=2bi$

$(3+5i)+(2+4i)=5+9i$

$(8-3i)+(-5+6i)=3+3i$

$(3-4i)-(-5+6i)=8-10i$

$2+(3i+5)=7+3i$

$(2-5i)-(3+4i)-(-2+i)=1-10i$

$-i-2-(3-4i)-(5-2i)=-10+5i$

- که لاندیني مختلط عددونه سره مساوي وي، د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

$(2x-1)+(3y+2)i=5-4i$

$2x-1=5 \qquad 3y+2=-4$

$x=3 \qquad y=-2$

- که لاندیني مختلط عددونه سره مساوي وي، د m او k قیمتونه پیدا کړئ.

د $2+mi=k-3i \quad (m,k\in IR)$ لپاره لرو چې: $m=-3 \quad , \quad k=2$

- که لاندیني مختلط عددونه سره مساوي وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

$a+3i=5+3bi+2a \Rightarrow a=-5 \qquad b=1$

- که $z_1=x+3y-2i$ او $z_2=1-(x+2y)i$ په داسې حال کې چې $z_1=z_2$ وي نو $x=4$ او $y=-1$ دي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- لاندې مختلط عددونه سره جمع کړئ.

$a)\quad (2+5i)+(3+4i)=(2+3)+(5+4)i=5+9i$

$b)\quad (-3+6i)+(10-7i)=(-3+10)+(6-7)i=7-i$

$c)\quad (13-12i)+(13+12i)=(13+13)+(-12+12)i=26+0i=26$

$d)\quad (\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)=(\sqrt{3}+d)+(-c+5c)i=(\sqrt{3}+d)+4ci$

2- لاندې مختلط عددونه یو له بله تفریق کړئ.

$a)\quad (5-i)-(7+3i)=(5-i)+(-7-3i)=(5-7)+(-1-3)i=-2-4i$

$b)\quad (2\sqrt{3}+5\sqrt{7}i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}i)=2\sqrt{3}+5\sqrt{7}i+(-\sqrt{3}-3\sqrt{7}i$

$\quad =(2\sqrt{3}-\sqrt{3})+(5\sqrt{7}-3\sqrt{7})i=\sqrt{3}+2\sqrt{7}i$

$c)\quad (3c+4di)-(3c+8di)=(3c+4di)+(-3c-8di)=(3c-3c)+(4d-8d)i=-4di$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوسونه پیدا کړئ.

$2+3i \quad , \quad (2,-3) \quad , \quad \sqrt{2}+\sqrt{3}i$

د a حل:: د $2+3i$ جمعي معکوس $-2-3i$ څخه عبارت دی.

ځکه چې: $(2+3i)+(-2-3i)=(2-2)+(3-3)i=0+0i$

د b حل: د $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$ جمعي معکوس له $-\sqrt{2}-\sqrt{3}i$ څخه عبارت دی.

ځکه چې: $(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)+(-\sqrt{2}-\sqrt{3}i)=(\sqrt{2}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{3})i=0+0i$

د c حل: د $(2,-3)$ جمعي معکوس له $(-2,3)$ څخه عبارت دی.

4- که چیرې $(x, y, \in R)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د y, x قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$3x+2iy-ix+5y=3x+5y+(2y-x)i$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-x+2y=5\\3x+5y=7\end{cases} \quad \begin{cases}-3x+6y=15\\3x+5y=7\end{cases} \quad \begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$$

5- لاندینې عملیې سرته ورسوي او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

a) $(2+3i)+(-5+2i)=(2-5)+(3+2)i=-3+5i$

b) $(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)=(-5-4i)+(2+\sqrt{2}i)=(-5+2)+(-4+\sqrt{2})i$
$=-3+(-4+\sqrt{2})i$

c) $(2+3i)+(-5-i)=(2-5)+(3i-i)=-3+(3-1)i=-3+2i$

d) $(6-5i)+(3+2i)=(6+3)+(-5+2)i=9-3i$

e) $(3.7+6.1i)-(1+5.9i)=(3.7+6.1i)+(-1-5.9i)=(3.7-1)+(6.1-5.9)i$
$=2.7+0.2i$

f) $(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)=(8+7)+(\frac{3}{4}-\frac{2}{3})i=15+\frac{1}{12}i$

g) $(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)=(-6+4)+(-\frac{5}{8}+\frac{1}{2})i=-2-\frac{1}{8}i$

h) $(-2+5i)+(3-i)=(-2+3)+(5-1)i=1+4i$

i) $(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)=(3+11)+(\frac{3}{5}-\frac{7}{15})i=14+\frac{2}{15}i$

j) $(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)=(-4+13)+(-\frac{5}{6}+\frac{3}{8})i=9-\frac{11}{24}i$

k) $(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})=(-7-\sqrt{-1}\sqrt{72})+(8+\sqrt{-1}\sqrt{50}$
$=(-7-\sqrt{72}i)+(8+\sqrt{50}i)=(-7+8)+(-\sqrt{72}+\sqrt{50})i=1+(\sqrt{50}-\sqrt{72})i$

l) $(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})=\sqrt{3}+\sqrt{2}i-\sqrt{12}-\sqrt{8}=(\sqrt{3}-\sqrt{12}-\sqrt{8})+\sqrt{2}i$
$=\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}i=(-\sqrt{3}-2\sqrt{2})+\sqrt{2}i$

6- د لاندې مختلطو عددونو جمعې معکوسونه پیدا کړئ.

$a) 2-3i$

چې جمعي معکوس یې $-2+3i$ دی.

$b) 1-i \Rightarrow -1+i$ (جمعي معکوس)

$c) 5-8i \Rightarrow -5+8i$ (جمعي معکوس)

$d) -5i \Rightarrow 5i$ (جمعي معکوس)

$e) 8+11i \Rightarrow -8-11i$ (جمعي معكوس)

$f) -1+i \Rightarrow 1-i$ (جمعي معكوس)

$g) -13+13i \Rightarrow 13-13i$ (جمعي معكوس)

$h) 2i \Rightarrow -2i$ (جمعي معكوس)

د مختلطو عددونو د ضرب عمليه

د درسي کتاب (289)مخ **د لوست وخت:** (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې - **پوهنيزې** - **مهارتي** - **ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • د دوو مختلطو عددونو د ضرب کولو په طريقه وپوهيږي. • د يو مختلط عدد مزدوج وپيژني. • د يو مختلط عدد د ضربي معکوس د پيداکولو طريقه زده کړي. • مختلط عددونه يو له بله سره ضرب کړای شي. • د مختلطو عددونو مزدوجونه پيداکړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې له مختلطو عددونو څخه استفاده وکړای شي او اهميت يې درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړې تر څو انگيزه پيدا شي. $(2-3i)(3+4i)=6+8i-9i-12i^2=6-i-12(-1)=6-i+12=18-i$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

د ضرب د عمليې له تعريفوولو وروسته دې لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي او د دې لوست لومړنی فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي. د يو مختلط عدد مزدوج دې زده کوونکو ته توضيح شي، ترڅو د هر مختلط عدد مزدوج پيداکړای شي او دا زده کړي چې د دوو مختلطو عددونو د جمعې او ضرب حاصل يو حقيقي عدد، خو د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو موهومي عدد دی.

دويم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي او ددې لوست دويم فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي. د يو مختلط عدد د ضربي معکوس د پيداکولو طريقه دې توضيح شي او د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې دريم او څلورم مثال حل شي او ددې لوست اخيرنی فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**

ددې لوست د لومړۍ پوښتنې يوه برخه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

د دويمې پوښتنې يوه برخه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د مختلطو عددونو الجبري خاصيتونه:

که z_3, z_2, z_1 مختلط عدونه وي، نو لاندې خاصيتونه په کې صدق کوي.

1- د جمعې د عمليې د تبديلي خاصيت: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2- د جمعې د عمليې اتحادي خاصيت: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

3- د جمعې د عمليې د بستګي خاصيت: $z_1 \in C, z_2 \in C \Rightarrow (z_1 + z_2) \in C$

4- د ضرب د عمليې د تبديلي خاصيت: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

5- د ضرب د عمليې اتحادي خاصيت: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

6- د ضرب د عمليې د بستګي خاصيت: $z_1 \in C, z_2 \in C \Rightarrow (z_1 \cdot z_2) \in C$

7- د ضرب د عمليې توزيعي خاصيت پر جمع باندې: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

-

$(2i)(4i) = -8$ $\qquad$ $(3 - i)(4 + i) = 13 - i$

$-2i(4 - 6i) = -12 - 8i$ $\qquad$ $(1 + 2i)(3 - 4i) = 11 + 2i$

$(3 - \sqrt{-4})(-2 + \sqrt{-49}) = 8 + 25i$ $\qquad$ $(2 + 9i)(2 - 9i) = 85$

$(2 - 3i)(1 + i) = 5 - i$ $\qquad$ $(1 + i)(2 + 3i) = -1 + 5i$

$(5 + 2\sqrt{-4})(3 - \sqrt{-4}) = 23 + 2i$ $\qquad$ $(2 + \sqrt{-3})(3 - \sqrt{-3}) = 9 + \sqrt{3}i$

-

عدد	$1+2i$	$2-3i$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}i$	$2a-b$	$1-2i$	$-3-5i$	$-3i$
ضربي معکوس	$\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$	$-\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{i}{3}$	$\frac{2a}{b^2+4a}+\frac{bi}{b^2+4a}$	$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$	$-\frac{3}{34}+\frac{5}{34}i$	$\frac{1}{3}i$

-

$(1 + i)^2 = 2i$

$(1 - i)^{18} = [(1 - i)^2]^9 = (1 - 2i + i^2)^9 = (1 - 2i - 1)^9 = (-2i)^9 = -2^9 \cdot i^9 = -2^9 i$

$z = 2 + 5i \Rightarrow z^{-1} = \frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$

$(2 + 3i)^2 = -5 + 12i$ $\qquad$ $(3 - 4i)^{-1} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

$(3 - 2i)^2 = 5 - 12i$ $\qquad$ $(3,4)^2 = -7 + 24i$

$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2ab$ $\qquad$ $(3 - \sqrt{-4})^{-3} = \frac{-9}{2197} + \frac{46}{2197}i$

$(a + bi)^{-2} = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} - \frac{2ab}{(a^2 + b^2)}i \quad (a \neq 0, \ b \neq 0)$

$(a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$

$(a - bi)^3 = a^3 - 3ab^2 - (3a^2b - b^3)i$

همدارنګه $(-ai)^4 = a^4$ دی.

$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-3}=1$　　$(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-3}=1$　　$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-2}(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1$

•

$$(3-\sqrt{-4})^{-3}=\frac{1}{(3-\sqrt{-4})^3}=\frac{1}{(3-\sqrt{4}\sqrt{-1})^3}=\frac{1}{(3-2i)^3}=\frac{(3+2i)^3}{(3-2i)^3(3+2i)^3}$$

$$=\frac{(3)^3+3\cdot 3^2\cdot 2i+3\cdot 3(2i)^2+(2i)^3}{[(3-2i)(3+2i)]^3}=\frac{27+54i-36-8i}{(9+4)^3}=\frac{-9+46i}{2197}=\frac{-9}{2197}+\frac{26}{2197}i$$

•

$$(a+bi)^{-2}=\frac{1}{(a+bi)^2}\cdot\frac{(a-bi)^2}{(a-bi)^2}=\frac{(a-bi)^2}{[(a+bi)(a-bi)]^2}=\frac{a^2-2abi-b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}-\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}i$$

$(a\neq 0, b\neq 0)$

$$(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-3}=\frac{1}{(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3}=\frac{1}{(-\frac{1}{2})^3-3(-\frac{1}{2})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i+3(-\frac{1}{2})\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3}$$

$$=\frac{1}{-\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i-\frac{9}{8}i^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}i}=\frac{8}{-1-3\sqrt{3}i+9+3\sqrt{3}i}=\frac{8}{8}=1$$

• خاصيت هاي مزدوج يک عدد مختلط:

$z=\bar{z}$ که z يو حقيقي عدد وي:

$1:\ \overline{(\bar{z}_1)}=z_1$　　$2:\ \overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2\ ,\ \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$

$3:\ \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$　　$4:\ \overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad (z_2\neq 0)$

$5:\ \overline{(\frac{1}{z_1})}=\frac{1}{\bar{z}_1}\quad (z_1\neq 0)$　　$6:\ \overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$

$7:\ |z_1|=|\bar{z}_1|=|-z_1|=|-\bar{z}|$　　$8:\ z_1\cdot\bar{z}_1=|z_1|^2$

- $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$
- $x^2+9=(x+3i)(x-3i)$
- $x^2+2x+5=[(x+1)+2i][(x+1)-2i]$
- $x^2-6x+11=[x-3+\sqrt{2}i][x-3-\sqrt{2}i]$

د پوښتنو ځوابونه:

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

a) $(2+i)(3-2i)=2(3)+2(-2i)+3(i)-2(i)^2=6-4i+3i+2=8-i$

b) $(-2+3i)(4-2i)=-8+4i+12i-6i^2=-8+16i+6=-2+16i$

c) $(5+2i)(5-3i)=25-15i+10i-6i^2=25-5i-6(-1)=25-5i+6=31-5i$

d) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)=3-\sqrt{6}i+\sqrt{6}i+2=5$

e) $(3+i)(3-i)=9-3i+3i-i^2=9+1=10$

f) $(2-5i)(2+5i)=4+10i-10i-25i^2=4+25=29$

g) $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)=6-i^2=7$

2- د لاندینیو مختلطو عددونو ضربي معکوس پیداکړئ.

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

حل: د $1-i$ ضربي معکوس:

a) $\frac{1}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$:2+4i$

b) $\frac{1}{(2+4i)}\frac{(2-4i)}{(2-4i)}=\frac{2-4i}{20}=\frac{1}{10}-\frac{1`}{5}i$

c) $\frac{1}{(5-3i)}\frac{(5+3i)}{(5+3i)}=\frac{5+3i}{25+9}=\frac{5+3i}{34}=\frac{5}{34}+\frac{3}{34}i$

یا په مستقیمه طریقه (Direct method) کولای شو چې د 5-3i عدد ضربي معکوس په لاندې ډول په لاس راوړو:

$(5-3i)(x+yi)=1+0i$

$5x+5yi-3xi-3yi^2=1+0i$

$5x+3y=1$

$5y-3x=0\Rightarrow x=\frac{5}{34}\qquad y=\frac{3}{34}$

نو د 5-3i جمعي معکوس عبارت دی له:

$\frac{5}{34}+\frac{3}{34}i$

d) $\frac{1}{(3a-4bi)}(\frac{3a+4bi}{3a+4bi})=\frac{3a+4bi}{9a^2-16b^2i^2}=\frac{3a+4bi}{9a^2+16b^2}=\frac{3a}{9a^2+16b^2}+\frac{4b}{9a^2+16b^2}i$

لومړی $(7,4)$ د $7+4i$ په شکل لیکو او بیا یې ضربي معکوس پیداکوو:

یا په مستقیم ډول:

$(3a-4b):(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})=(\frac{3a}{9a^2+16b^2},\frac{4b}{9a^2+16b^2}i)$

e) $(7,4):(\frac{7}{49+16},\frac{-4}{49+16})=(\frac{7}{65},\frac{-4}{65}i)$

$\frac{1}{7+4i}\frac{(7-4i)}{(7-4i)}=\frac{7-4i}{49+16}=\frac{7-4i}{65}=\frac{7}{65}-\frac{4}{65}i$

3- لاندې افادې تجزیه کړئ.

a) $x^2+16=x^2-(-1)16=x^2-16i^2=x^2-(4i)^2=(x-4i)(x+4i)$

b) $x^2+8=x^2-(-1)8=x^2-8i^2=x^2-(\sqrt{8}i)^2=(x-\sqrt{8}i)(x+\sqrt{8}i)$

c) $x^2+5=x^2-(-1)5=x^2-5i^2=x^2-(\sqrt{5}i)^2=(x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{5}i)$

$d)$ $x^2+7=x^2-(-1)7=x^2-7i=x-(\sqrt{7}i)^2=(x-\sqrt{7}i)(x+\sqrt{7}i)$

4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قیمتونه پیداکړئ.

حل:

$a) \quad (2+i)^2=(2+i)(2+i)=4+2i+2i+i^2=4+4i-1=3+4i$

$b) \quad (-3+2i)^2=(-3+2i)(-3+2i)=9-6i-6i+4i^2=9-12i-4=5-12i$

5-که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پیدا کړئ.

حل:

$8z=8(4-3i)=32-24i$

$z^2=(4-3i)^2=(4-3i)(4-3i)=16-12i-12i+9i^2=16-12i-7-24i$

$8z-z^2=(32-24i)-(7-24i)=25$

6- د $x+yi=(2-3i)(2+3i)$ معادله حل پیدا کړئ.

حل:

$(2-3i)(2+3i)=4+6i-6i-9i^2=4+9=13$

$x+yi=13+0i$ یا $x+yi=13$

$\Rightarrow x=13 \quad , \qquad y=0$

7- وښایاست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ د i د عدد د مربع جذر دی.

حل:

$(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})^2$

$\frac{2}{4}+2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}+\frac{2}{4}\mathrm{i}^2=\frac{2}{4}+\frac{2}{2}\mathrm{i}-\frac{2}{4}=\mathrm{i}$

یا: $(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})=i$

8- وښایاست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ د $-i$ د عدد دریم جذر دی.

$(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i})^3=(\frac{\sqrt{3}}{2})^3-3(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2}\mathrm{i})+3(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}\mathrm{i})^2-(\frac{1}{2})^3$

$=\frac{\sqrt{27}}{8}-\frac{9}{8}\mathrm{i}-3\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{27}-9\mathrm{i}-3\sqrt{3}+\mathrm{i}}{8}=\frac{-8\mathrm{i}}{8}=-\mathrm{i}$

یا: $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^3=-i$ کیږي.

$$\frac{-2-2i}{-5+6i}=?$$

د مختلطو عددونو د وېش عمليه
(Divison of tow complex numbers)

د درسي کتاب (293) **مخ** **د لوست وخت:** (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې **- پوهنيزې** **- مهارتي** **- ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • يو پر بل باندې د دوو مختلطو عددونو وېشل زده کړي. • د وېش حاصل په معياري شکل ولیکلای شي. • د مختلطو عددونو د مزدوج خاصيتونه پر مختلطو عددونو تطبيق کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حل کې د مختلطو عددونو له وېش څخه ګټه واخیستلای شي او اهميت يې درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	د لومړنو فعاليتونوڅخه وروسته د انګيزې د پيدا کولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $\frac{-2-2i}{-5+6i}=\frac{(-2-2i)(-5-6i)}{(-5+6i)(-5-6i)}=\frac{10+12i+10i+12i^2}{25+30i-30i-36i^2}=\frac{-2+22i}{61}$ $=\frac{-2}{61}+\frac{22}{61}i$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

له دې څخه وروسته چې د ګويا کولو طريقه زده کوونکو ته توضيح شي، لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ او د 293 مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي. د مختلطو عددونو د وېش د عمليې له تعريفولو څخه وروسته دويم او دريم مثال حل کړئ.

له دې وروسته چې د يو مختلط عدد د مزدوج خاصيتونه توضيح شي د 295 لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د (295) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**

د لومړۍ پوښتنې يوه برخه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

د دويمې پوښتنې يوه برخه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

-1

- $\frac{2+i}{3-i}\cdot\frac{5+2}{1+i}=\frac{5}{2}+i$
- $\frac{6+2i}{5-i}\cdot\frac{1-3i}{2+6i}=-\frac{16}{65}-\frac{37}{65}i$
- $\frac{4-3i}{4+3i}=\frac{7}{25}-\frac{24}{25}i$
- $\frac{4+i}{6+2i}=\frac{13}{20}-\frac{1}{20}i$

که $z_1=2+4i$ و $z_2=1-3i$ وي $\frac{z_1}{z_2}$ مساوي دی په:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+4i}{1-3i}=(2+4i)(1-3i)^{-1}=(2+4i)(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i)=\frac{2+4i}{10}+\frac{6i+12i^2}{10}=\frac{-10}{10}+\frac{10}{10}i=-1+i$$

-2

- $\frac{1}{2-\sqrt{-9}}=\frac{1}{2-i\sqrt{9}}=\frac{1}{2-3i}=\frac{1}{(2-3i)}\cdot\frac{2+3i}{(2+3i)}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$
- $\frac{2}{5i}=\frac{2}{5i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{2i}{5i^2}=\frac{2i}{-5}=-\frac{2}{5}i$
- $\frac{1+3i}{2i}=\frac{(1+3i)}{(2i)}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i+3i^2}{2i^2}=\frac{i-3}{-2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$
- $\frac{1}{2+4i}=0.1-0.2i$
- $\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{4-5i-6i^2}{1-4i^2}=2-i$
- $\frac{7+i}{2+i}=\frac{(7+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{14-5i-i^2}{4-i^2}=\frac{14-5i+1}{4+1}=3-i$
- $\frac{8.14+2.63i}{3.04+6.27i}=\frac{(8.14+2.63i)}{(3.04+6.27i)}\cdot\frac{(3.04-6.27i)}{(3.04-6.27i)}$

$$=\frac{(8.14)(3.04)-(8.14)(6.27i)+(2.63i)(3.04)-(2.63i)(6.27i)}{(3.04)^2+(6.27)^2}=0.85-0.89i$$

- $\frac{5-\sqrt{-4}}{7}=\frac{5-i\sqrt{4}}{7}=\frac{5-2i}{7}=\frac{5}{7}-\frac{2}{7}i$
- $\frac{1}{2+4i}=0.1-0.2i$
- $\frac{4+3i}{1+2i}=2-i$
- $\frac{7+i}{2+i}=3-i$
- $(\frac{1-i}{1+i})^{10}=\left[\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right]^{10}=\left[\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}\right]^{10}=\left[\frac{1-2i-1}{1-(-1)}\right]^{10}=(\frac{-2i}{2})^{10}=(-i)^{10}=i^{10}=i^2=-1$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د وېش حاصلونه يې پيدا کړئ.

$$\frac{7-i}{3-5i}\quad,\quad\frac{5-2i}{6-i}\quad,\quad\frac{3-4i}{2-5i}\quad,\quad\frac{1+i}{1-1}$$

حل:

a) $\frac{7-i}{3-5i}=\frac{(7-i)}{(3-5i)}\frac{(3+5i)}{(3+5i)}=\frac{21+35i-3i-5i^2}{9+25}=\frac{26+32i}{34}=\frac{13}{17}+\frac{16}{17}i$

b) $\frac{5-2i}{6-i}=\frac{(5-2i)}{(6-i)}\frac{(6+i)}{(6+i)}=\frac{30+5i-12i-2i^2}{36+1}=\frac{30-7i+2}{37}=\frac{32}{37}-\frac{7}{37}i$

c) $\frac{3-4i}{2-5i}=\frac{(3-4i)}{(2-5i)}\frac{(2+5i)}{(2+5i)}=\frac{6+15i-8i-20i^2}{4+25}=\frac{26+7i}{29}=\frac{26}{29}+\frac{7}{29}i$

d) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)}=\frac{1+i+i+i^2}{1+1}=\frac{2i}{2}=i=0+i$

2- که $z_1=-a-3bi$ او $z_2=2a-3bi$ وي، وښاياست چې $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ او $(\frac{\bar{z}_1}{z_2})=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_3}$ دي.

حل:

$z_1\cdot z_2=(-a-3bi)(2a-3bi)=-2a^2+3abi-6abi+9b^2i^2=-2a^2-9b^2-3abi\Rightarrow\overline{z_1\cdot z_2}$

$=-2a^2-9b^2+3abi$

$\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=(-a+3bi)(2a+3bi)=-2a^2-3abi+6abi+9b^2i^2=-2a^2+3abi-9b^2$

$=-2a^2-9b^2+3abi\Rightarrow\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-a-3bi}{2a-3bi}=\frac{(-a-3bi)}{(2a-3bi)}\frac{(2a+3bi)}{(2a+3bi)}=\frac{-2a^2-3abi-6abi-9b^2i^2}{4a^2+9b^2}=\frac{-2a^2+9b^2-9abi}{4a^2+9b^2}$

$=\frac{-2a^2+9b^2}{4a^2+9b^2}-\frac{9ab}{4a^2+9b^2}i$

$(\frac{\bar{z}_1}{z_2})=\frac{-2a^2+9b^2}{(4a^2+9b^2)}+\frac{9ab}{4a^2+9b^2}i$ ....(I)

$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\frac{-a+3bi}{2a+3bi}=\frac{(-a+3bi)}{(2a+3bi)}\frac{(2a-3bi)}{(2a-3bi)}=\frac{-2a^2+3bi+6abi-9b^2i^2}{4a^2+9b^2}=\frac{-2a^2+9abi+9b^2}{4a^2+9b^2}$

$=\frac{-2a^2+9b^2}{4a^2+9b^2}+\frac{9ab}{4a^2+9b^2}i$ II

د I او II مقايسو لرو چې : $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

3- د وېش حاصلونه پيدا کړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

a) $\frac{2}{5-i}=\frac{(2)}{(5-i)}(\frac{5+i}{5+i})=\frac{10+2i}{25+1}=\frac{10+2i}{26}=\frac{10}{26}+\frac{2i}{26}=\frac{5}{13}+\frac{1}{13}i$

b) $\frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)}{(2+i)}\frac{(2-i)}{(2-i)}=\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}=\frac{5-5i}{5}=1-i$

c) $\frac{2-3i}{3}=\frac{2}{3}-i$

4- د $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د وېش حاصل مساوي دی په:

a) 1 b) 2 c) 3i d) -2

حل:

$$\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}=\frac{(6+6i)}{(3+3i)}=\frac{6+6i}{3+3i}\cdot\frac{(3-3i)}{(3-3i)}=\frac{18-18i+18i-18i^2}{9+9}=\frac{18+18}{18}=\frac{36}{18}=2$$

(د b جز سم دی).

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$$a)\ \frac{3+4i}{4i}=\frac{(3+4i)}{(4i)}\frac{(-4i)}{(-4i)}=\frac{-12i-16i^2}{16}=\frac{-12i+16}{16}=1-\frac{12}{16}i=1-\frac{3}{4}i$$

$$b)\ \frac{-5}{2-3i}=\frac{(-5)}{(2-3i)}\ \frac{(2+3i)}{(2+3i)}=\frac{-10-15i}{4+9}=-\frac{10}{13}-\frac{15}{13}i$$

$$c)\ \frac{6}{1+3i}=\frac{(6)}{(1+3i)}\ \frac{(1-3i)}{(1-3i)}=\frac{6-18i}{1+9}=\frac{6}{10}-\frac{18}{10}i=\frac{3}{5}-\frac{9}{5}i$$

$$d)\ \frac{7}{7-2i}=\frac{(7)}{(7-2i)}\frac{(7+2i)}{(7+2i)}=\frac{49+14i}{49+4}=\frac{49+14i}{53}=\frac{49}{53}+\frac{14}{53}i$$

$$e)\ \frac{-4+8i}{2-4i}=\frac{(-4+8i)}{(2-4i)}\ \frac{(2+4i)}{(2+4i)}=\frac{-8-16i+16i+32i^2}{4+16}=\frac{-40}{20}=-2=-2+oi$$

$$f)\ \frac{3-2i}{-6+4i}=\frac{(3-2i)}{(-6+4i)}\frac{(-6-4i)}{(-6-4i)}=\frac{-18-12i+12i+8i^2}{36+16}=\frac{-26}{52}=-\frac{13}{26}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+0i$$

$$g)\ \frac{1}{i}=\frac{1}{i}\frac{(-i)}{(-i)}=\frac{-i}{-i^2}=\frac{-i}{1}=0-i$$

$x^2+x+4=0$

$x_1=?$

$x_2=?$

د مختلطو عددونو په ساحه کې د یو مجهوله دویمې درجې معادلو حل

د درسي کتاب (297)مخ   د لوست وخت: (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې - پوهنیزې - مهارتي - ذهنیتي	دې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • په دې پوه شي کومې یو مجهوله دویمې درجې معادلې چې Δ یې له صفر کوچنۍ وي د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. • په هغه صورت کې چې د دویمې درجې یو مجهوله معادلې جذرونه راکړل شوي وي معادله یې تشکیل کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حل کې ترې ګټه واخیستلای شي او په اهمیت یې پوه شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارتونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د انګیزې د پیداکولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-16}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

د زده کوونکو په فعاله ونډې اخیستنې سره لومړی مثال حل کړئ. ددې لوست لومړی فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي.همدارنګه دویم او دریم مثال د زده کوونکو په فعاله ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

ددې لوست دویم فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

لومړی پوښتنه حل کړئ.

$(x-x_1)(x-x_2)=0$

$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د ارزونې لپاره د دویمې پوښتنې یوه برخه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- $4y^2+9=0\Rightarrow y=\pm\sqrt{-\frac{9}{4}}=\pm\frac{i\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\pm\frac{3i}{2}$
- $(n-3)^2=-4\Rightarrow n-3=\pm2i\Rightarrow n=3\pm2i$

- $x^2-2x+3=0 \Rightarrow x=1\pm i\sqrt{2}$
- $2t^2+8=6t \Rightarrow t=\dfrac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$
- $3w^2+4w+3=0 \Rightarrow w=\dfrac{-2\pm i\sqrt{5}}{3}$
- $3x=\sqrt{x^2-2} \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}i$

د (a) د منفي حقیقي عدد اصلي یا اساسي جذر په دې ډول ښودل کیږي:

$$\sqrt{-a}=i\sqrt{a} \qquad (a>0)$$

د $x^2+2ix=3$ معادله حل کړئ.

$$x^2+2ix-3=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2i\pm\sqrt{(2i)^2-4(1)(-3)}}{2(1)}=\frac{-2i\pm\sqrt{-4+12}}{2}=\frac{-2i\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2i\pm2\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\frac{2(-i\pm\sqrt{2})}{2}=-i\pm\sqrt{2}$$

$$\boxed{x_1=\sqrt{2}-i} \qquad \boxed{x_2=-\sqrt{2}-i}$$

د $y^{-2}-2y^{-1}+3=0$ معادله حل کړئ.

لومړۍ طریقه:

$$u=y^{-1} \Rightarrow u^2-2u+3=0$$
$$u^2-2u=-3$$
$$u^2-2u+1=-2$$
$$(u-1)^2=-2$$
$$u-1=\pm i\sqrt{2}$$
$$u=1\pm i\sqrt{2}$$
$$y^{-1}=1\pm i\sqrt{2}$$
$$\frac{1}{y}=1\pm i\sqrt{2}$$
$$y=\frac{1}{1\pm i\sqrt{2}}$$
$$y=\frac{1}{1\pm i\sqrt{2}}\cdot\frac{(1\mp i\sqrt{2})}{(1\mp i\sqrt{2})}=\frac{1\mp i\sqrt{2}}{1-(-2)}=\frac{1\pm i\sqrt{2}}{3}$$

دویمه طریقه:

$$\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}+3=0 \qquad (y\neq0)$$
$$1-2y+3y^2=0$$
$$3y^2-2y+1=0$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1(3)}}{2(3)}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{6}=\frac{2\pm 2i\sqrt{2}}{6}=\frac{1\pm i\sqrt{2}}{3}$$

د $x^2-2\sqrt{2}ix-3=0$ معادله حل کړئ.

$$\Delta=(-2\sqrt{2})^2-4\cdot 1\cdot(-3)=8i^2+12=-8+12=4$$

$$x_{1,2}=\frac{2\sqrt{2}i\pm\sqrt{4}}{2}$$

$x_1=\sqrt{2}i+1 \qquad x_2=\sqrt{2}i-1$

$$x^2-4x+5=0$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=-4<0$$
$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{4i^2}}{2}=2\pm i$$
$x_1=2-i \qquad x_2=2+i$

$$1+\frac{8}{x^2}=\frac{4}{x}$$
$$x^2-4x+8=0$$
$$x^2-4x+4=-8+4$$
$$(x-2)^2=-4$$
$$x-2=\pm\sqrt{-4}$$
$$x=2\pm i\sqrt{4}$$
$$x=2\pm 2i$$

$$x^3-1=0$$
$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$
$$x-1=0\Rightarrow x=1$$
$$x^2+x+1=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$
$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$$
$$x^2-2x+3=0$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(3)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

$$x^2+2ix=3$$
$$x_1=\sqrt{2}-i$$
$$x_2=-\sqrt{2}-i$$

$$4y^2+9=0$$
$$4y^2=-9$$
$$y=\pm\sqrt{-\frac{9}{4}}$$
$$y=\pm\frac{i\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\pm\frac{3i}{2}$$

$$(n-3)^2=-4$$
$$n-3=\pm 2i$$
$$n=3\pm 2i$$

$$2t^2+8=6t$$
$$2t^2-6t+8=0$$
$$t^2-3t+4=0$$
$$t=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)4}}{2(1)}$$
$$t=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$$
$$t=\frac{3\pm i\sqrt{7}}{2}$$
$$4u^2+8u+15=0$$
$$u^2+2u+\frac{15}{4}=0$$
$$u^2+2u+1=-\frac{15}{4}+1$$
$$(u+1)^2=-\frac{11}{4}$$
$$u+1=\pm\sqrt{-\frac{11}{4}}$$

$x=\frac{2\pm 2i\sqrt{2}}{2}$ $x=1\pm i\sqrt{2}$	$u=-1\pm\frac{i\sqrt{11}}{2}$ $u=-\frac{2}{2}\pm\frac{i\sqrt{11}}{2}$ $u=\frac{-2\pm i\sqrt{11}}{2}$

د پوښتنو ځوابونه:

1- هغه دویمه درجه معادله پیداکړئ چې جذرونه یې $(3+2i)$ او $(3-2i)$ وي.

حل:

$x^2-(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2=0$

$x^2-[(3+2i)+(3-2i)]x+(3+2i)(3-2i)=0 \Rightarrow x^2-(6-0)x+9+4=0 = x^2-6x+13=0$

2- لاندې معادلې حل کړئ:

$x^2-4x+13=0$, $x^2-6x+18=0$, $-4x^2+3x-5=0$

$x^2+8x+41=0$, $x^4-1=0$, $3x^2+x+2=0$

حل:

a) $x^2-4x+13=0$, $\Delta'=4-13=-9$

$x_1=\frac{2+\sqrt{-9}}{2}=\frac{2+3i}{2}=1+\frac{3i}{2}$ $\quad x_2=\frac{2-3i}{2}=1-\frac{3}{2}i$

b) $x^2+8x+41=0 \Rightarrow \Delta'=b'^2-ac=4^2-1\cdot 41=16-41=-25$

$x_{1,2}=-4\pm\sqrt{-25}\Rightarrow x_1=-4+5i$, $x_2=-4-5i$

c) $x^2-6x+18=0$ $\Delta'=9-18=-9$ $\quad x_{1,2}=3\pm\sqrt{-9}=3\pm 3i$

d) $x^4-1=0\Rightarrow x^4=1\Rightarrow x=\sqrt[4]{1}\Rightarrow x=\pm 1$

e) $-4x^2+3x-5=0$

$\Delta=9-4(-4)(-5)=9-80$ $\quad x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{-71}}{-8}=\frac{-3}{8}\pm\frac{\sqrt{71}}{8}i$

f) $3x^2+x+2=0$ $\quad \Delta=1-4\cdot 3\cdot 2=1-24=-23$ $\quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{6}$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{23}i}{6}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{23}i}{6}$

3- هغه دویمه درجه معادلې پیداکړئ چې جذرونه یې په لاندې ډول راکړل شوي وي:

$2+5i,\ 2-5i$	$1+i\ ,1-i$
$4i,\ -4i$	$5i\ ,\ -5i$
$2i\ ,\ 3i$	$i\ ,\ \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\ ,\ \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i\ ,\ 2+i$

حل: د فورمول په اساس:

$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$ لرو چې:

a) $x^2-(2+5i+2-5i)x+(2+5i)(2-5i)=0$

$x^2-4x+29=0$

b) $x^2-(4i-4i)x+(4i)(-4i)=0 \Rightarrow x^2+16=0$

c) $x^2-(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i)x+(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i)(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i)=0$

$x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}=0 \qquad x^2-\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}=0 \quad , \quad 36x^2-48x+25=0$

d) $x^2-(2i+3i)x+(2i)(3i)=0 \Rightarrow x^2-5ix+6i^2=0 \Rightarrow x^2-5ix-6=0$

e) $x^2-[(1+i)+(-1-i)]x+(1+i)(-1-i)=0$

مطلوب معادله:

$x^2+0+(-1-i-i-i^2)=0 \Rightarrow x^2-2i=0$

f) $x^2-(5i-5i)x+(5i)(-5i)=0 \qquad x^2-0\cdot x-25i^2=x^2+25=0$

g) $x^2-(i-i)x+i(-i)=0 \qquad x^2+1=0 \qquad \left[\begin{array}{l}\frac{1}{i}=-i\\ \frac{1}{i}=\frac{1}{i}\frac{(-i)}{(-i)}=-i\end{array}\right.$

i) $x^2-(2-i+2+i)x+(2+i)(2-i)=0$

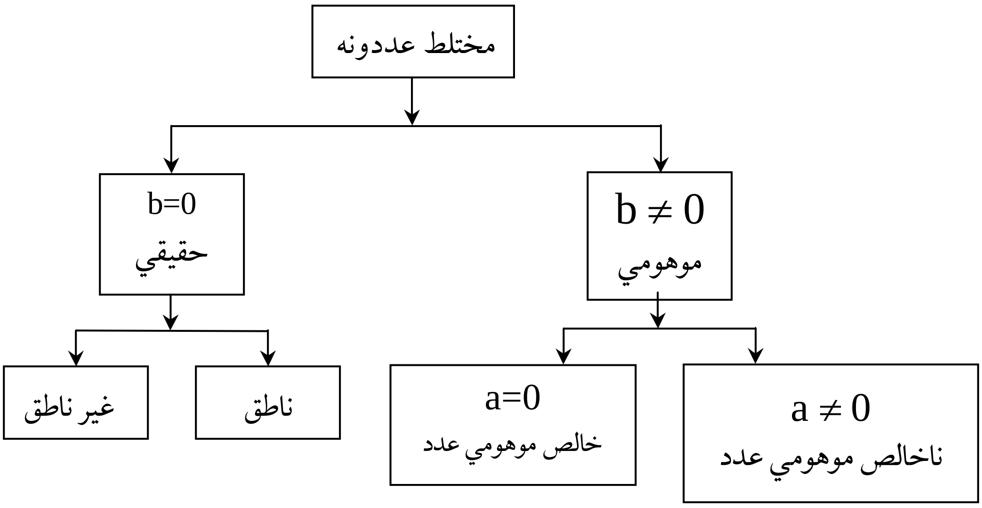
$x^2-4x+4+2i-2i-1i^2=0 \qquad x^2-4x+5=0$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

محترمو استادانو: څرنګه چې پوهیږی د مختلطو عددونو موضوع ډیره پراخه ده اوپو الجبري ساختمان (فیلډ) دی.

په انجنیري او فزیک کې یې د استعمال ځایونه ډیر دي چې په برقي دوره کې، د اتوم په کوانټم نظریه کې، الکترومقناطیسي موجونو او د طیارې د وینګ په ډیزاین کې استفاده کیږي او له بلې خوا د لومړي ځل لپاره دا موضوع د لسم ټولګي د ریاضي په نصاب کې ځای پر ځای شوي ده. په همدې اساس د تعلیم او تربیې پوهانو په خلص ډول د مختلطو عددونو څلورګونې عملیې ددې ټولګي لپاره لازم ګڼلې دي.

دا دی په دې برخه کې ستاسو محترمینو د معلوماتو د زیاتوالي لپاره په لنډ ډول د $(x+yi)^n$، د حقیقي او موهومي برخو پیدا کول، د مختلطو عددونو هندسي ښودنه او څلورګونې عملیې یې او د مختلطو عددونو مطلقه قیمت دلته راوړل شوي دي:



1- د $(x+yi)^n$ د حقیقي او موهومي برخو پیدا کول:

که $n=\pm1, \pm2, \pm3...$ وي.

-که $n=1$ وي $(x+yi)^1 = x+yi$ چې x یې حقیقي برخه او yi یې موهومي برخه ده.

-که $n=-1$ وي، $(x+yi)^{-1} = \dfrac{1}{x+yi}$

$$\frac{1}{x+yi} = \frac{1}{x+yi}\cdot\frac{x-yi}{x-yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

چې $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ یې حقیقي برخه او $-\dfrac{y}{x^2+y^2}.i$ یې موهومي برخه ده.

-که $n=2$ وي:

$$(x+yi)^2 = x^2 + 2x\cdot yi + (yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

چې حقیقي برخه یې x^2-y^2 او موهومي برخه یې $2xyi$ ده.

-که $n=-2$ وي:

$$(x+yi)^{-2} = \frac{1}{(x+yi)^2} = \frac{1}{(x+yi)^2}\cdot\frac{(x-yi)^2}{(x-yi)^2} = \frac{x^2-y^2-2xyi}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}i$$

چې حقیقي برخه یې $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ او موهومي برخه یې $-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}i$ ده.

-که $n=3$ وي:

$$\begin{aligned}(x+yi)^3 &= (x+yi)(x+yi)^2 = (x+yi)(x^2-y^2+2xyi)\\ &= x^3 - xy^2 + 2x^2yi + x^2yi - y^3i + 2xy^2i^2\\ &= x^3 - xy^2 + (2x^2y + x^2y - y^3)\cdot i - 2xy^2\\ &= (x^3 - xy^2 - 2xy^2) + (2x^2y + x^2y - y^3)i\\ &= \underbrace{(x^3-3xy^2)}_{\text{حقیقي برخه}} + \underbrace{(3x^2y-y^3)}_{\text{موهومي برخه}}\cdot i\end{aligned}$$

-که $n=-3$ وي،نو:

$$(x+yi)^{-3} = \frac{1}{(x+yi)^3} = \frac{1}{(x+yi)^3}\cdot\frac{(x-yi)^3}{(x-yi)^3} = \frac{x^3 - 3x^2yi + 3x(yi)^2 - (yi)^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{x^3 - 3xy^2 - 3x^2yi + y^3i}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{3x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^3}i$$

چې حقیقي برخه یې $\dfrac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3}$ او موهومي برخه یې $-\dfrac{(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^3}i$ ده.

لومړی مثال: $(2+3i)^2$ او $(3+4i)^{-1}$ د $(a+bi)$ په معیاري شکل عبارت دي له:

$$(2+3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$$

$$(3+4i)^{-1} = \frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{9-16i^2} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}\cdot i$$

دویم مثال: د $(2+5i)^3$ د a+bi په معیاري شکل مساوي دی په:

حل: $(2+5i)^3 = 2^3 + 3\cdot2^2\cdot5i + 3\cdot2\cdot(5i)^2 + (5i)^3 = 8 + 60i - 150 - 125i = -142 - 65i$

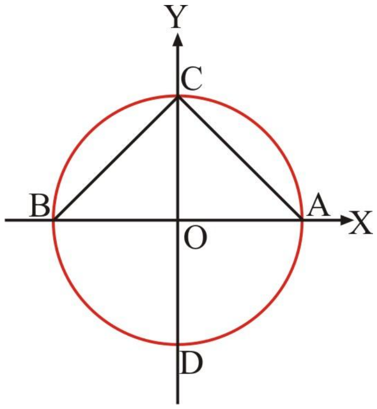
$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \quad , \quad (a+bi)^{-2} = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2} - \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}i$$

$$(a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i \quad , \quad (a+bi)^{-3} = \frac{a^3-3ab^2}{(a^2+b^2)^3} - \frac{(3a^2b-b^3)}{(a^2+b^2)^3}i$$

2- د یو مختلط عدد هندسي ښودنه:

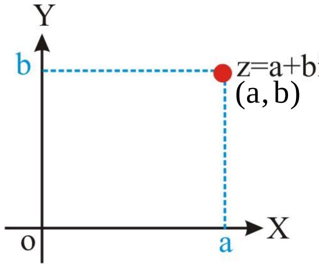
Geometric representation of a complex number

یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو (مثلثاتي دایره هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد وي) د ox او oy محورونه دایره د A ، B ، C او D په نقطو کې قطع کوي چې $OA = 1$ او $OB = -1$ دی. گورو چې د C او D نقطې له کوم عدد سره مطابقت کوي. ددې لپاره د C نقطه د A او B له نقطو سره نښلوو د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قایم الزاویه مثلث کې چې OC یې ارتفاع ده له هندسي څخه پوهیږو چې $(OC)^2 = OA \cdot OB = (1)\cdot(-1) = -1$ د OC واحد وکتور له i سره مساوي دی چې د اوږدوالي واحد دی. یا $OC = \sqrt{-1} = i$



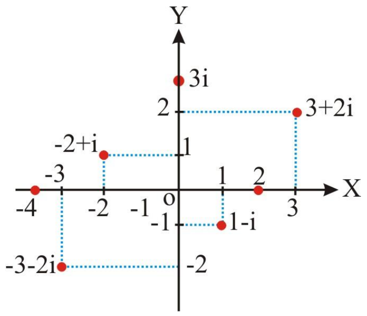
کولای شو مختلط عددونه د نقطو په واسطه د دیکارتي مختصاتو په سیستم کې وښایو. په دې ډول چې افقي محور ته حقیقي محور (Real Axis) او قایم محور ته موهومي محور (Imaginary Axis) وایي، نو په همدې اساس د یوه مختلط عدد حقیقي برخه د X پر محور او موهومي برخه یې د Y پر محور ښودل کیږي.

په 1806م کال کې یو سویسي ریاضي پوه (Jean Robert Argand) نومیده، د نقطو په واسطه یې مختلط عددونه د مختلطو عددونو په مستوي کې په هندسي ډول وښودل. له همدې امله په مستوي کې د مختلطو عددونو ښودنه د (Argand Diagram) په نامه یادیږي، نو د $z = a + bi$ مختلط عدد د (a, b) د مرتبې جوړې Order pair په واسطه ښودلای شو.

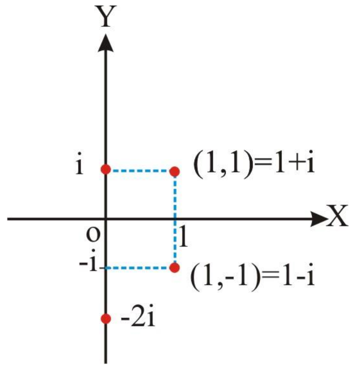


د مستوي هر یوه نقطه یو مختلط عدد او هر مختلط عدد د مستوي د یوې نقطې په واسطه ښودل کیږي یا دا چې د مختلطو عددونو او د مستوي د نقطو ترمنځ د یو په یو (1-1) مطابعت موجود دی. هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي حقیقي عددونه او هغه نقطې چې د Y پر محور پرتې دي موهومي عددونه ښکاره کوي د $Z = a + bi$ مختلط عددد شکل په شان د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د (a, b) د نقطې په واسطه ښودل کیږي.

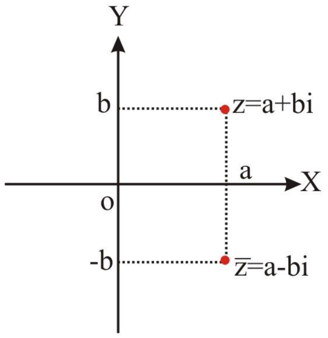
لومړی مثال: د $2, 3i, -3-2i, -2+i, 1-i, 3+2i$ او -4 مختلط عددونه د کمیات وضعیه په مستوي کې په لاندې ډول ښودل کیږي.

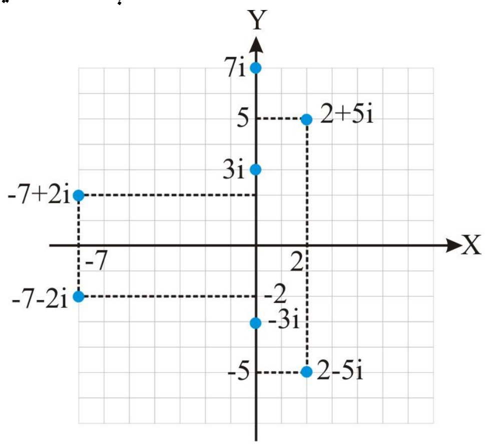


دویم مثال: د $1-i, 1+i, -2i$ او i عددونه په هندسي ډول داسې ښودل کیږي.

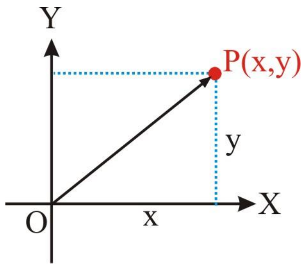


دریم مثال: د $a+bi$, $2-5i$, $-7+2i$, $-3i$ عددونه او مزدوجونه يې په هندسي ډول په شکل کې داسې ښودل کیږي.





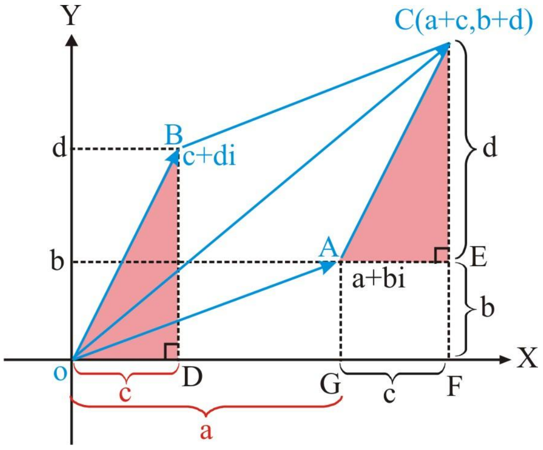
3- په هندسي ډول د مختلطو عددونو څلورګونې عملیې



څرنګه چې یو مختلط عدد د یوې نقطې په واسطه د مختلطو عددونو په مستوي کې ښودلای شو لکه څنګه چې په شکل کې د $z=x+yi$ مختلط عدد د (x,y) نقطې په واسطه ښودل شوی دی که د z مختلط عدد په مستوي کې د $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ د وکتور یا د $\overrightarrow{OP}$ خط په واسطه وښودل شي، نو مختلط عددونه په لاندې ډول جمع، تفریق، ضرب او وېشلای شو:

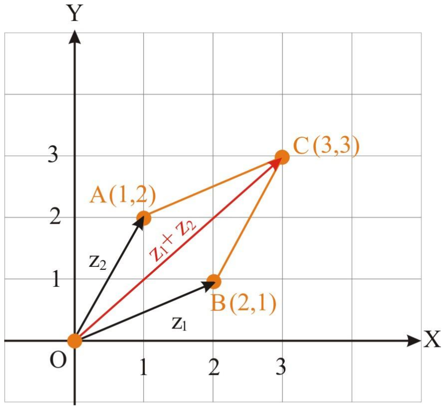
لومړی مثال: که $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي z_1+z_2 په هندسي ډول په لاندې ډول ښودل کیږي.

$$Z_1+Z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$



دویم مثال: که $z_1=2+i$ او $z_2=1+2i$ وي، z_1+z_2 په لاندې شکل کې وګورئ:

$$z_1+z_2=(2+i)+(1+2i)=3+3i$$

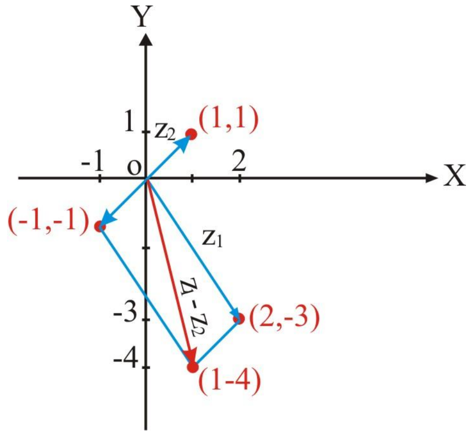


لیدل کیږي چې د OACB د متوازي الاضلاع قطر د $Z_1 + Z_2$ د جمعې حاصل ښيي.

$$OA = z_2 \quad , \quad OB = z_1 \quad , \quad OC = z_1 + z_2$$

دریم مثال: که $z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 1 + i$ وي $z_1 - z_2$ په لاندې شکل کې وګورئ.

$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (1 + i) = 2 - 3i - 1 - i = 1 - 4i = (1, -4)$$

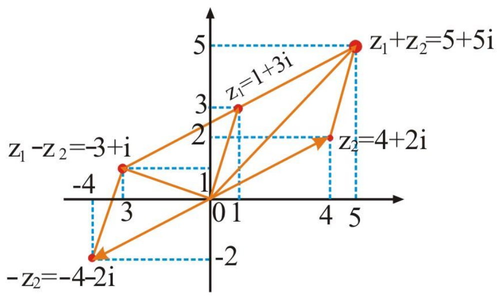


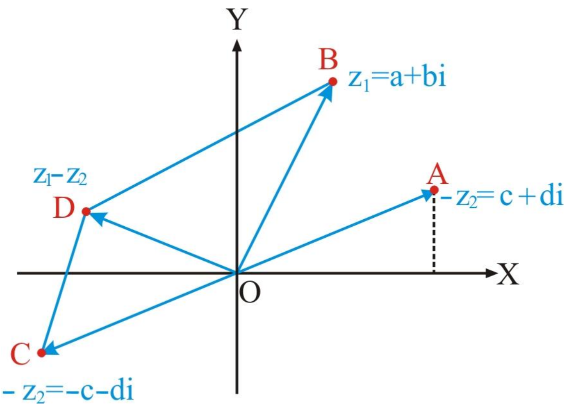
څلورم مثال: که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي، $z_1 - z_2$ اوکه $z_1 = 1 + 3i$ او $z_2 = 4 + 2i$ وي، $z_1 + z_2$ او $z_1 - z_2$ په لاندې شکل کې وګورئ.

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$z_1 + z_2 = (1 + 3i) + (4 + 2i) = 5 + 5i$$

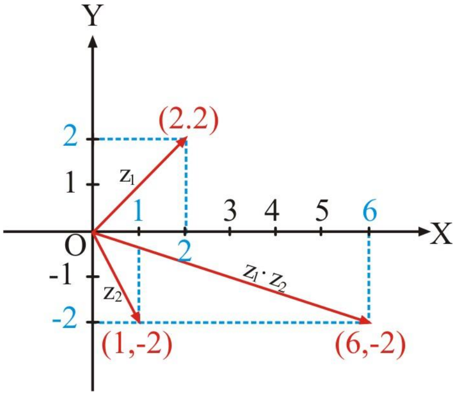
$$z_1 - z_2 = (1 + 3i) - (4 + 2i) = -3 + i$$





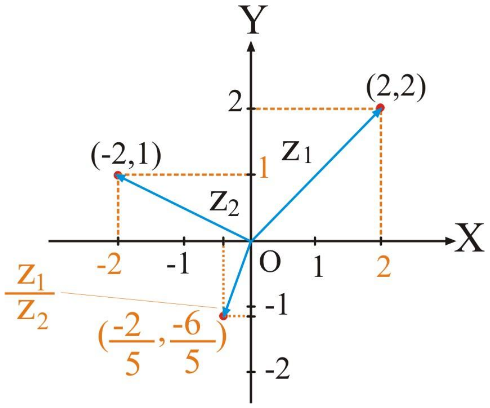
پنځم مثال: که $z_1 = 2 + 2i$ او $z_2 = 1 - 2i$ وي $z_1 \cdot z_2$ په لاندې شکل کې وګورئ:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 2i)(1 - 2i) = 2 - 4i + 2i - 4i^2 = 2 - 2i + 4 = 6 - 2i$$



شپږم مثال: که $Z_1 = 2+2i$ او $Z_2 = -2+i$ وي، $\frac{Z_1}{Z_2}$ په لاندې شکل کې وګورئ:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{2+2i}{-2+i}\right)\cdot\left(\frac{-2-i}{-2-i}\right) = \frac{-4-2i-4i-2i^2}{4+1} = \frac{-4-6i+2}{5} = \frac{-2-6i}{5} = \frac{-2}{5} - \frac{6}{5}i$$



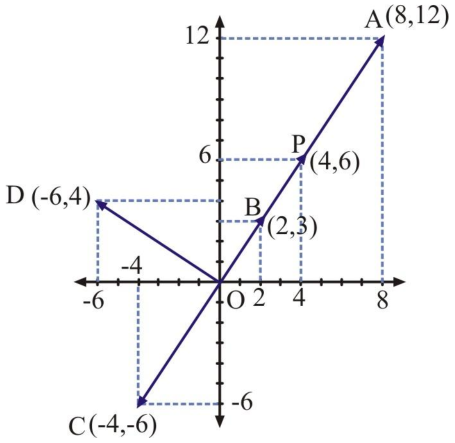
اووم مثال: که د $4+6i$ مختلط په پام کې ونیسو او دا عدد په ترتیب سره په 2 , $\frac{1}{2}$ ، -1 او i کې ضرب کړو د Argand په ډیاګرام کې په لاندې ډول ښودل کیږي.

$2(4+6i) = 8+12i = (8,12)$

$\frac{1}{2}(4+6i) = 2+3i = (2,3)$

$-1(4+6i) = -4-6i = (-4,-6)$

$i(4+6i) = 4i+6i^2 = -6+4i = (-6,4)$



لیدل کیږي چې: $\vec{OA} = 2OP$ و $\vec{OB} = \frac{1}{2}OP$

په پایله کې لیدل کیږي چې که یو وکتور په (-1) کې ضرب شي د $180°$ په اندازه یې جهت تغیر کوي (څرخي) په داسې حال کې چې اوږدوالی یې تغیر نه کوي. یا $\vec{OC} = -OP$ او که $(-1)^2$ یا (1) ضرب شي، وکتور د $180° + 180° = 360°$ په اندازه څرخي او یا هیڅ تغیر نه کوي.

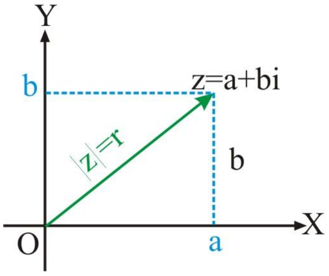
4- د یوه مختلط عدد مطلقه قیمت (Modulus of a complex number)

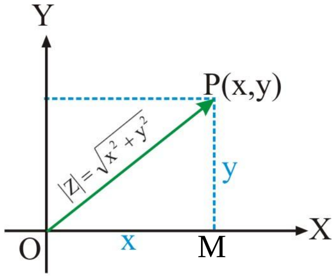
د $Z_1 = 4+5i$ او $Z_2 = -4-5i$ مختلطو عددونو مطلقه قیمتونو سره مساوي دي. یا $|4+5i| \overset{?}{=} |-4-5i|$

د مختلطو عددونو په مستوي کې د $Z = x + yi$ مختلط عدد په لاندې ډول ښودل کیږي.

د OP د خط اوږدوالی د $Z = x + yi$ عدد د مطلقه قیمت په نامه یادیږي او په دې ډول ښودل کیږي.

$|Z| = |OP| = |x + yi|$





د فیثاغورث د قضیې په اساس د $\overset{\Delta}{OPM}$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$(OP)^2 = (OM)^2 + (PM)^2$

$(OP)^2 = x^2 + y^2 \qquad \overline{PM} = y$ و $\overline{OM} = x$

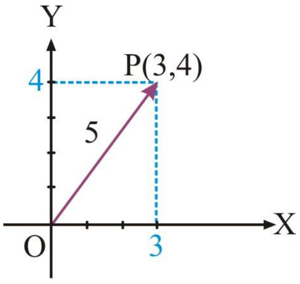
$(\overline{OP})^2 = x^2 + y^2$

$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|Z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

لومړی مثال: که $Z = 3 + 4i$ وي، $|Z|$ عبارت دی له:

$|Z| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$



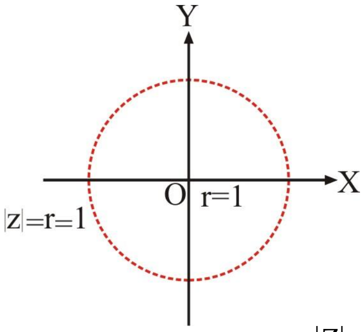
دویم مثال: د $2i$ ، $-2i$ او 4 مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي دی په:

$|2i| = |0 + 2i| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = \sqrt{0 + 4} = 2$

$|-2i| = |0 - 2i| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{0 + 4} = 2$

$|4| = |4 + oi| = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16} = 4$

دریم مثال: که $|Z| = 1$ وي، د هغو نقطو معادله چې دا شرط صدق کوي:



$|Z|=1$ د ټولو هغو نقطو له سټ څخه عبارت دی چې د هغه دایرې پر محیط واقع دي

چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې او شعاع یو واحد وي.

که $Z=x+yi$ وي $|Z|^2=x^2+y^2$ دی چې ددې دایرې معادله ده.

څلورم مثال: که $Z=5+4i$ وي $|Z|=Z\bar{Z}=\sqrt{x^2+y^2}$ دی.

د z د مختلط عدد مزدوج له $\bar{Z}=5-4i$ څخه عبارت دی نو:

$$|Z|=|5+4i|=\sqrt{(5+4i)(5-4i)}=\sqrt{25-20i+20i-16i^2}=\sqrt{25-16(-1)}=\sqrt{41}$$

په پایله کې: $|Z|=\sqrt{Z\bar{Z}}=\sqrt{x^2+y^2}$

د مختلطو عددنو د مطلقه قیمت خاصیتونه:

1) $|Z_1|+|Z_2|\geq|Z_1+Z_2|$

2) $|Z_1|-|Z_2|\leq|Z_1-Z_2|$

3) $|Z_1-Z_2|=|Z_2-Z_1|$

4) $|Z_1|\cdot|Z_2|=|Z_1\cdot Z_2|$

5) $\dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}=\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| \qquad Z_2\neq 0$

6) $|-Z|=|Z|=|\bar{Z}|=|-\bar{Z}|$

7) $|Z|=\sqrt{Z\bar{Z}}$

8) $|Z|^2=Z\bar{Z}$

لومړی مثال: که $Z_1=4+5i$ او $Z_2=2+3i$ وي نو $|Z_1-Z_2|=|Z_2-Z_1|$

$$|z_1-z_2|=|4+5i-(2+3i)|=|4+5i-2-3i|=|2+2i|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$|z_2-z_1|=|2+3i-4-5i|=|-2-2i|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore |z_1-z_2|=|Z_2-Z_1|=2\sqrt{2}$$

دویم مثال: که $z=x+5i$ او $|z|=49$ وي، د x قیمت مساوي دی په:

$$|z|=x^2+25 \qquad x^2+25=49$$

$$x^2=49-25$$

$$x^2=16$$

$$x=\pm 4$$

دریم مثال: که $z=2-3i$ وي نو $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$ او $|z|^2=z\bar{z}$

$$|z|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

$$\bar{z}=2+3i$$

$$\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{(2-3i)(2+3i)}=\sqrt{4+6i-6i+9}=\sqrt{13}$$

$$|z|^2=\left(\sqrt{13}\right)^2=13$$

$$z\bar{z}=(2+3i)(2-3i)=13 \qquad |z|^2=z\bar{z}$$

د څپرکي پوښتنې حل:

1- $(i)^{51}$ مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

حل: $(i)^{51} = (i)^{4\cdot 12+3} = i^{4\cdot 12}\cdot i^2 \cdot i = (1)(-1)i = -i$

(د d جز سم دی).

2- د i^{-98} موهومي عدد مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

حل: $i^{-98} = \dfrac{1}{i^{98}} = i^{-(4\cdot 24+2)} = \dfrac{1}{i^{(4\cdot 24+2)}} = \dfrac{1}{i^{4\cdot 24}\cdot i^2} = \dfrac{1}{(1)(-1)} = -1$

(د b جز سم دی).

3- ذ i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

حل:

$i^{67} = i^{4\cdot 16+3} = i^{4\cdot 16}\cdot i^2 \cdot i = 1\cdot(-1)i = -i$

(د a جز سم دی).

4- $7i - 4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

حل: (د b جز سم دی یعني $3i$) .

5- $3i\cdot 4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

حل: -12 (د a جز سم دی).

6- $\dfrac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

حل: (د b جز سم دی چې ځواب يې 8 دی).

7- $\dfrac{7}{9}i\cdot\dfrac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\dfrac{14}{81}$ b) $\dfrac{14}{81}$ c) $-\dfrac{14}{81}i$ d) $\dfrac{14}{81}i$

حل: $\dfrac{7}{9}i\cdot\dfrac{2}{9}i = \dfrac{14}{81}i^2 = -\dfrac{14}{81}$

(د a جز سم دی).

8- $\dfrac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $-\frac{11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

حل:

$$\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{11}\sqrt{-1}}{\sqrt{5}\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{11}i}{\sqrt{5}i}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{11}{5}}$$

(د a جز سم دی).

9- $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}$ مساوي دی په:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) درې واړه جزونه سم نه دي

حل:

$$\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}=\frac{\sqrt{5}i}{5i}=\frac{\sqrt{5}i}{5i}\left(\frac{-5i}{-5i}\right)=\frac{-5\sqrt{5}i^2}{-25i^2}=\frac{5\sqrt{5}}{25}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(د a جز سم دی).

10- $\frac{-xi}{\sqrt{yi}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

حل: (د b جز سم دی).

11- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)+(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

حل:

a) $(3+4i)+(2+5i)=(2+3)+(4+5)i=5+9i$

b) $(1+i)+(1-i)=2-0=2+0i$

c) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

d) $(2+3i)+(2-3i)=4-0=4+0i$

12- لاندې مختلط عددونه تفریق کړئ:

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

حل:

a) $(4+3i)-(4+4i)=(4-4)+(3-4)i=0-i=-i$

b) $(4+4i)-(4+3i)=(4-4)+(4-3)i=0+i=-i$

c) $(3-2i)-(3+2i)=3-2i-3-2i=0-4i=-4i$

d) $(1+i)-(1-i)=1+i-1+i=2i$

13- $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوی دی په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

حل: $(2a+ib)-(2a-ib)=2a+ib-2a+ib=2ib$

(د c جز سم دی).

14- د $(2-3i)(2+3i)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

$$(2-3i)(2+3i) = 4+6i-6i-9i^2 = 4-9(-1) = 4=9 = 13$$

(د c جز سم دی).

15- لاندې مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ $(4-3i)(2+i)$ $i(3-2i)^2$ i^{51}

حل:

a) $4(2+5i)-3(3-4i) = 8+20i-9+12i = -1+32i$

b) $(4-3i)(2+i) = 8+4i-6i-3i^2 = 8-2i+3 = 11-2i$

c) $i(3-2i)^2 = i(9-12i+4i^2) = 9i-12i^2-4i = 5i+12 = 12+5i$

d) $i^{51} = i^{4\cdot 12+3} = 1^{4\cdot 12}\cdot i^2\cdot i = 1\cdot(-1)\cdot i = -i = 0-i$

16- که $z_1 = 2-4i$, $z_2 = 1-i$ وي، وښایاست چې:

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}\ ,\quad \overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\ ,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

حل:

a) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ b) $\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

a) $z_1+z_2 = (2-4i)+(1-i) = 3-5i$

$\overline{z_1+z_2} = 3+5i$

$z_1 = 2-4i \Rightarrow \overline{z_1} = 2+4i$

$z_2 = 1-i \Rightarrow \overline{z_2} = 1+i$

$\overline{z_1}+\overline{z_2} = (2+4i)+(1+i) = 3+5i \Rightarrow \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

b) $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$z_1\cdot z_2 = (2-4i)(1-i) = 2-2i-4i+4i^2 = -2-6i$

$\overline{z_1\cdot z_2} = -2+6i$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (2+4i)(1+i) = 2+2i+4i+4i^2 = 2+6i-4 = -2+6i \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$$c:\ \overline{\left(\frac{2-4i}{1-i}\right)} = ?$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-4i}{1-i} = \frac{(2-4i)}{(1-i)}\,\frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{2+2i-4i-4i^2}{1+1} = \frac{6-2i}{2} = 3-i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3-i \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = 3+i$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{(2+4i)}{(1+i)}\,\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{2-2i+4i-4i^2}{1+1} = \frac{6+2i}{2} = 3+i \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

17- د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوسونه پیدا کړئ:

$a)\ 3x-\frac{1}{2}yi$ $b)\ 2a-bi$ $c)\ 2+5i$ $d)\ -7+3i$

$e)\ -6+2i$ $f)\ 3-i$ $g)\sqrt{2}+i$

حل:

a) د $3x-\frac{1}{2}yi$ جمعي معکوس $-3x+\frac{1}{2}yi$ دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$\frac{1}{3x-\frac{1}{2}yi}\left(\frac{3x+\frac{1}{2}yi}{3x+\frac{1}{2}yi}\right)=\frac{3x+\frac{1}{2}yi}{9x^2+\frac{1}{4}y^2}=\frac{3x}{9x^2+\frac{1}{4}y^2}+\frac{\frac{1}{2}y}{9x^2+\frac{1}{4}y^2}i$$

b) د $2a-bi$ جمعي معکوس $-2a+bi$ دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$\frac{1}{2a-bi}\left(\frac{2a+bi}{2a+bi}\right)=\frac{2a+bi}{4a^2+b^2}=\frac{2a}{4a^2+b^2}+\frac{b}{4a^2+b^2}i$$

c) د $2+5i$ جمعي معکوس $-2-5i$ دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$\frac{1}{2+5i}\cdot\left(\frac{2-5i}{2-5i}\right)=\frac{2-5i}{4+25}=\frac{2-5i}{29}=\frac{2}{29}-\frac{5}{29}i$$

d) د -7+3i جمعي معکوس 7-3i دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$(\frac{1}{-7+3\mathrm{i}})\cdot\left(\frac{-7-3\mathrm{i}}{-7-3\mathrm{i}}\right)=\frac{-7-3\mathrm{i}}{49+9}=\frac{-7}{58}-\frac{3}{58}\mathrm{i}$$

e) د -6+2i جمعي معکوس 6-2i دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$\frac{1}{-6+2\mathrm{i}}\cdot\left(\frac{-6-2\mathrm{i}}{-6-2\mathrm{i}}\right)=\frac{-6-2\mathrm{i}}{40}=\frac{-6}{40}-\frac{2}{40}\mathrm{i}=-\frac{3}{20}-\frac{1}{20}\mathrm{i}$$

f) د 3-i جمعي معکوس -3+i دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$(\frac{1}{3-i})(\frac{3+i}{3+i})\frac{3+i}{10}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$$

g) د $\sqrt{2}+i$ جمعي معکوس $-\sqrt{2}-i$ دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$(\frac{1}{\sqrt{2}+i})\cdot(\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}-i})=\frac{\sqrt{2}-i}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}i$$

18- د $5x^2+2x+1=0$ معادله حل کړئ:

حل:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{10}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{10}=\frac{-2\pm4i}{10}=-\frac{1}{5}\pm\frac{2}{5}i$$

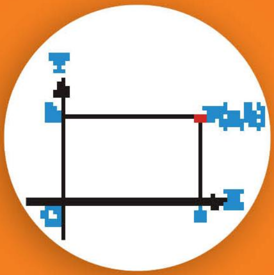
$$x_1=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i \qquad x_2=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

اووم څپرکی
تحليلي هندسه

تحلیلی هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنیکونه له هندسې سره یو ځای کوي. یا په بل عبارت تحلیلي هندسه موږ ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري میتودونو او معادلو څخه ګټه واخلو، همدارنګه د هندسې د اصولو څخه په الجبري مساواتونو (معادلو) کې ګټه واخلو.

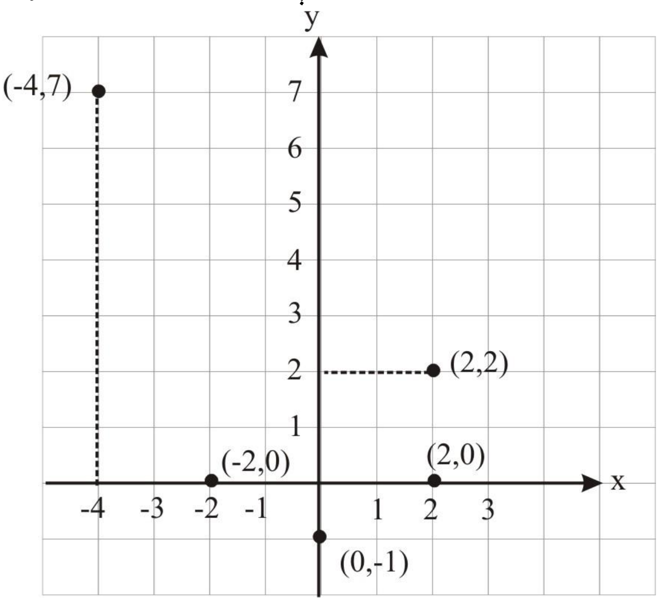
هندسه د الجبر یوه پخوانۍ څانګه ده. یونانیانو تقریباً څلور پیړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توګه څېړنه او مطالعه کړې وه چې تقریباً (300) کاله پخوا یو کلید (Euclid) دیارلس کتابونه تشریح او تفسیر کړي وو.

د تحلیلي هندسې مخترع یو فرانسوي عالم رین ډکارټېس (Rene Descartes) وه چې په (1596-1650 ب.م) کې یې ژوند کاوه الجبري میتودونه یې په هندسه کې معرفي او ګټه یې ترې واخیستله چې د تحلیلي هندسې (Analytic geometry) یا (هم اهنګه هندسې) (Coordinate geometry) په نامه یادیږي. نوموړي په (1637 م) کال کې یو کتاب د (La geometry) په نامه ولیکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه یو ځای ګټه اخیستل کیږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځینې اساسات مطالعه کړو.



د وضعیه کمیاتو سیستم یا کواردنټ سیستم

د درسي کتاب (305)**مخ** **د لوست وخت**(2 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • وپوهيږي چې چيرې د يوې نقطې وضعيه کميات مثبت يا منفي دي. • هغه نقطې چې وضعيه کميات يې ورکړل شوي وي، د وضعيه کمياتو په مستوي کې وټاکلای شي او وپوهيږي چې چيرې د نقطو يوه مختصه صفر وي. • د دوو نقطو ترمنځ د فاصلې فورمول ثبوت کړای شي. • د دوو نقطو ترمنځ فاصله پيدا کړای شي. • د هندسي مسايلو په حلولو کې له دې فرمول څخه ګټه واخيستلای شي او اهميت يې درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. 

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**

د x او y محورونه زده کوونکو ته وروپيژنئ چې د x او y مختصې په کوم حالت کې مثبت، منفي او صفر وي.

لومړی مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي.

زده کوونکي دې ددې لوست لومړی فعاليت سرته ورسوي او محترم ښوونکي دې هغوی ته لارښوونه او مرسته دې ورسره وکړي.

د فاصلې د فورمول له ثبوتولو څخه وروسته، دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي. دويم فعاليت له زده کوونکو وپوښتئ چې ځواب يې 6 دی او دريم مثال حل کړئ.

دريم فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

$$|AB|^2 = (3+6)^2 + (-5-3)^2 = 81+64 = 145$$
$$|BC|^2 = (3+1)^2 + (-5-5)^2 = 61+100 = 116$$
$$|CA|^2 = (-6+1)^2 + (-5-3)^2 = 25+4 = 29$$
$$|BC|^2 + |CA|^2 = |AB|^2$$

څلورم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې

لاندې پوښتنه دې حل شي:

د (5,7) او (1,3) نقطو ترمنځ فاصله پيدا کړئ. (ځواب $4\sqrt{2}$ دی.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې

له پوښتنو څخه د لومړۍ پوښتنې يوه برخه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د $(-\pi, \sqrt{2})$ او $(\pi, \sqrt{2})$ نقطو ترمنځ فاصله عبارت ده له:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(\sqrt{2}-\pi)^2+(-\pi-\sqrt{2})^2}$$
$$d = \sqrt{2-2\sqrt{2}\pi+\pi^2+\pi^2+2\sqrt{2}\pi+2} = \sqrt{4+2\pi^2}$$

- د دوو نقطو ترمنځ د فاصلې د فورمول په مرسته زيات هندسي مسايل حل کيږي، د مثال په ډول:

1- که د يوه مستطيل درې راسونه $A(3,0)$, $B(3,3)$ او $C(5,3)$ وي، نو ددې مستطيل څلورم راس عبارت دی له:

$$|AB|^2 = |DC|^2$$
$$(3-3)^2+(3-0)^2 = (x-5)^2+(y-3)^2$$
$$9 \quad = x^2-10x+25+y^2-6y+9$$
$$x^2+y^2-10x-6y+25=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$
$$|AD|^2 = |BC|^2$$
$$(x-3)^2+(y-0)^2 = (5-3)^2+(3-3)^2$$
$$x^2-6x+9+y^2 = 4 \Rightarrow x^2+y^2-6x+5=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

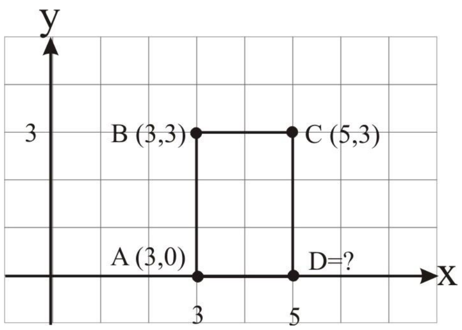
II معادله له I معادلې څخه تفريقوو، نو لرو چې:

$$-4x-6y+20=0$$
$$2x+3y-10=0 \Rightarrow y = \frac{10-2x}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots III$$

د y قيمت په (I) معادله کې وضع کوو لرو چې: $13x^2-94x+145=0$

ددې معادلې له حلولو څخه وروسته لرو چې: x=5 دی او د x قيمت په (III) معادله کې وضع کوو په نتيجه کې y=0 کيږي.

نو د مستطيل څلورم راس له D=(5,0) څخه عبارت دی.



2- د فاصلې د فورمول په مرسته ښودلای شو چې $A(3,1)$, $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یو مستقیم خط پرتې دي که د C,B,A نقطې پر یو مستقیم خط پرتې وي، نو باید د $|AB|+|BC|=|AC|$ شرط صدق کوي.

$|AB|=\sqrt{(6-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$|BC|=\sqrt{(9-6)^2+(3-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$|AC|=\sqrt{(9-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

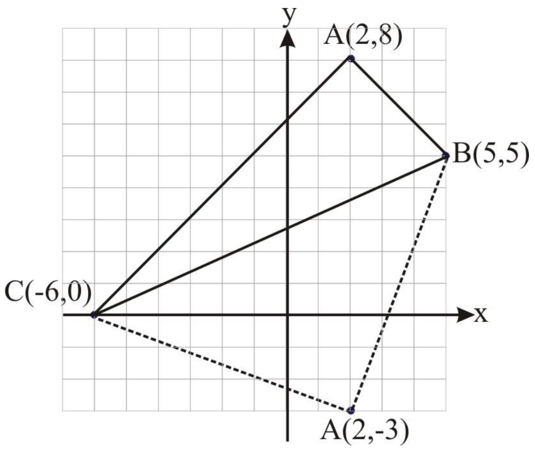
$\sqrt{40}=\sqrt{10}+\sqrt{10}$

$2\sqrt{10}=\sqrt{10}+\sqrt{10}$

$|AB|+|BC|=|AC|$

په نتیجه کې د A,B او C نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

3- که $A(2,p)$, $B(5,5)$ او $C(-6,0)$ د یوه قایمه زاویه مثلث راسونه وي، په هغه صورت کې چې د A نقطه د قایمې زاویې راس وي، نو د p قیمت مساوي دی په:



$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$

$(5-2)^2+(5-p)^2+(-6-2)^2+(0-p)^2$

$=(-6-5)^2+(0-5)^2$

$=9+25+p^2-10p+64+p^2=121+25$

$=2p^2-10p-146+64+25+9=0$

$=p^2-5p-24=0$

$(p-8)(p+3)=0$

$p=8$

$p=-3\Rightarrow A(2,8)$

د پوښتنو ځوابونه:

1- په لاندې راکړل شوو نقطو کې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

$a:(\sqrt{176},7)$ $b:(10,-10)$ $C:(1,15)$ $d:(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(\sqrt{176}-0)^2+(7-0)^2}$

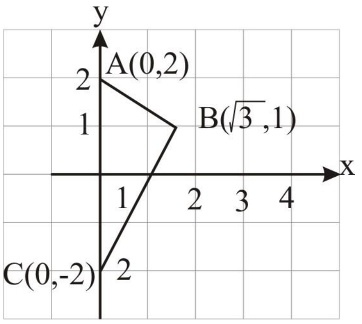
حل:

$d=\sqrt{(\sqrt{176})^2+7^2}=\sqrt{176+49}=\sqrt{225}=15$

د $(\sqrt{176},7)$ د نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده.

2- وښایاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ او $C(0,-2)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

حل:



$\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{3+1}=2$

$\overline{AC}=\sqrt{(0-0)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{16}=4$

$\overline{BC}=\sqrt{(0-\sqrt{3})^2+(-2-1)^2}=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}$

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=(2)^2+(\sqrt{12})^2=4+12=16=\overline{AC}^2$

نو د ABC مثلث قایمه الزاویه دی.

3- د $(0,5)$ او $(0,-3)$ دنقطو ترمنځ فاصله پیدا کړي.

حل: $d=\sqrt{(0-0)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{0+64}=8$

4- د $A(-\frac{1}{2},3)$ او $B(-1,\frac{-3}{4})$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړي.

حل:

$d=\sqrt{[-1-(\frac{-1}{2})]^2+(\frac{-3}{4}-3)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{225}{16}}=\sqrt{\frac{229}{16}}=\frac{\sqrt{229}}{4}$

یا $d=\sqrt{(-\frac{1}{2}+1)^2+(3+\frac{3}{4})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+(\frac{15}{4})^2}=\frac{\sqrt{229}}{4}$

5- د (7.11) او (1.3) نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(7-1)^2+(11-3)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

6- د $(3,6)$ او $(1,2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

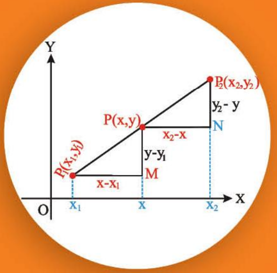
حل:

$d=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$

7- د $(3,7)$ او $(12,19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل:

$d=\sqrt{(12-3)^2+(19-7)^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=25$



د هغې نقطې وضعیه کمیاتو پیدا کول چې
یو قطعه خط په یوه نسبت باندې ویشي

در درسي کتاب (311)مخ   د لوست وخت(1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د یوې نقطې د وضعیه کماتو د پیدا کولو په طریقه وپوهیږي، چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې ویشي. • په دې وپوهیږي که چیرې دا نقطه خط داخلاَ په یوه نسبت وویشي نو r مثبت $(r>0)$ دی او که یې خارجاَ په یوه نسبت وویشي $(r<0)$ دی. • د هغه نقطې وضعیه کمیات پیدا کړای شي چې یو قطعه خط داخلاً او یا خارجاً پر یوه نسبت باندې ویشي او همدارنګه د یو قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړای شي. • د هندسي مسایلو په حلولو کې له دې فورمولونو څخه استفاده وکړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنو فعالیتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $x=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$ $\qquad y=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$

5- د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

په هغه صورت کې چې د ورودي برخې چارت موجود وي د $x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$ او $y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$ فورمول ثبوت کړئ لومړی او دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ د (313) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي او محترم ښوونکي دې لارښوونه او مرسته ورسره وکړي چې حل یې په لاندې ډول دی:

که $A(4,6)=(x_1y_1)$ او $B(-2,3)=(x_2y_2)$ وي:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{4+\frac{1}{2}(-2)}{1+\frac{1}{2}}=2 \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{6+\frac{1}{2}(3)}{1+\frac{1}{2}}=5 \quad \Rightarrow p(2,5)$$

همدارنګه دریم مثال هم د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ، تر څو زده کوونکي د یو قطعه خط د تنصیف د نقطې د وضعیه کمیاتو په پیدا کولو وپوهیږي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

لاندې پوښتنه حل کړئ.

دهغه مستقيمو خطونو د تنصيف د نقطو وضعيه کميات پيدا کړی چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تيريږي.

$a:\ (-1,3)\ ,(11,3)\qquad b:\ (3,-2)\ ,(-4,3)\qquad c:\ (100,-50),(-100,50)$

$d:\ (5,4)\ ,\ (-\frac{1}{2}),\frac{1}{2})\qquad e:\ (0,0)\ ,\ (8,-1)$

د لوست ارزونه: (5) دقيقې

د هغه قطعه خط د تنصيف دنقطې وضعيه کميات پيدا کړی، چې د $(-2,-5)$ او $(18,3)$ له نقطو څخه تيريږي.

ځواب $M(8,-1)$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د هغې نقطې د وضعيه کمياتو د پيداکولو دويمه طريقه چې يو قطعه خط په يوه معين نسبت باندې ويشي.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{EC}=\frac{1+r}{r}$$

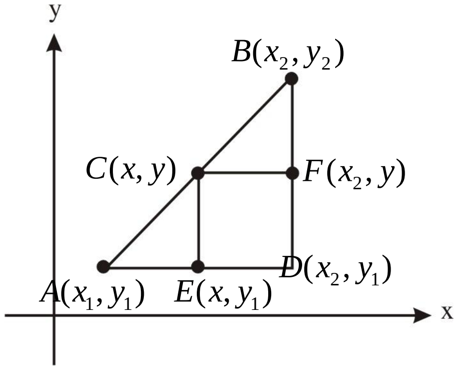
$$\frac{AD}{AE}=\frac{1+r}{r}\Rightarrow\frac{AD}{AE}-1=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{AD-AE}{AE}=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{ED}{AE}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{AE}{ED}=r.....................(I)$$

$$\frac{BD}{EC}=\frac{1+r}{r}\Rightarrow\frac{BD}{EC}-1=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{BD-EC}{EC}=\frac{1}{r}$$

$$EC=DF$$

$$\Rightarrow\frac{BD-DF}{DF}=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{BF}{DF}=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{DF}{BF}=r..............(II)$$



له (I)معادلې څخه لرو چې:

$$\frac{AE}{ED}=r\Rightarrow\frac{x-x_1}{x_2-x}=r\Rightarrow x-x_1=r(x_2-x)\Rightarrow x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

له(II) معادلې څخه لرو چې:

$$\frac{DF}{FB}=r\Rightarrow\frac{y-y_1}{y_2-y}=r\Rightarrow y-y_1=r(y_2-y)\Rightarrow y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د $\overline{AB}$ د قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات $(2,-1)$ دي که $A(-1,-3)$ وي، د B د نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$2=\frac{-1+x_2}{2}\Rightarrow 4=-1+x_2\Rightarrow x_2=5$$

$$-1=\frac{-3+y_2}{2}\Rightarrow -2=-3+y_2\Rightarrow y_2=1$$

د B د نقطې وضعيه کميات (5.1) دي.

2- د هغه قطعه خط د تنصيف نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$ له نقطو څخه تيريږي.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1-4}{2}=\frac{-3}{2}$$

د AB قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعیه کمیات $(\frac{1}{2},\frac{-3}{2})$ دي.

3- د هغه نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تیریږي.

a: داخلاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت وویشي. b: خارجاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت وویشي.

حل:

a)

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{4+(\frac{1}{2})(-2)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{6+(\frac{1}{2})(3)}{\frac{3}{2}}=\frac{15}{2}\cdot\frac{2}{3}=5$$

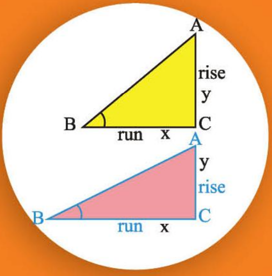
د (2,5) نقطه د AB قطعه خط داخلاً د $\frac{1}{2}$ په نسبت ویشي.

b) ځرنګه چې $r<0$ دی.

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{4+(-\frac{1}{2})(-2)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{5}{\frac{1}{2}}=5\cdot 2=10$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{6+(\frac{-1}{2})3}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{1}=9$$

د هغې نقطې وضعیه کمیات چې د AB قطعه خط خارجاً د $\frac{1}{2}$ په نسبت ویشي (10,9) دي.



د يو مستقيم خط ميل

(Slope of a Straight-line)

د درسي کتاب (315) مخ **د لوست وخت(1 درسي ساعت)**

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • د يو مستقيم خط د ميل زاويه وپيژني. • په دې وپوهيږي چې د يو مستقيم خط ميل څه وخت مثبت، منفي او صفر وي. • د يو مستقيم خط د ميل فورمول په لاس راوړلای شي . • په دې پوه شي چې د يو مستقيم خط په ټولو نقطو کې ميل مساوي دي. • زده کړي چې د موازي خطونو ميلونه سره مساوي او د عمود خطونو د ميلونو د ضرب حاصل (1-) دی. • د هغه مستقيم خط ميل پيدا کړای شي چې دوې نقطې يې معلومې وي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې د يو مستقيم خط د ميل له فورمول څخه استفاده وکړای شي او په اهميت يې پوه شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. د لومړني مايلې سطحې ميل نسبت دويمې مايلې سطحې ته زيات دی، ځکه چې د ميل زاويه يې د دويمې مايلې سطحې د ميل له زاويې څخه لويه ده.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې

د چارت له مخې او يا د تختې پر مخ دې وروښودل شي چې د X د محور او د ټولو هغو خطونو د ميل زاويه چې د X له محور سره موازي دي صفر ده او د y د محور او د ټولو هغو خطونو د ميل زاويه چې د y له محور سره موازي دي (90°) ده، په همدې ډول دې توضيح شي چې د يو مستقيم خط ميل څه وخت مثبت، منفي او صفر وي.

ددې لوست د لومړي فعاليت پوښتنه له زده کوونکو وکړئ چې ځواب يې دا دی (د x د محور ميل صفر او د y محور ميل تعريف شوی نه دی.)

د يو مستقيم خط د ميل فورمول دې په شکل کې يا د چارت له مخې او يا د تختې پر مخ ثبوت شي.

لومړی او دويم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي ددې لوست دويم فعاليت دې زدکوونکي په ګروپونو کې حل کړي چې ځواب يې په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{-2-5} = \frac{-3}{8}$$

که $A(4,-5)$, $B(7,5)$ او $C(10,15)$ وي:

$$m_{AB}=\frac{5+5}{7-4}=\frac{10}{3}\qquad m_{BC}=\frac{15-5}{10-7}=\frac{10}{3}$$

نو د B,A او C نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

د شکل له مخې دې د موازي او عمود خطونو میلونه توضیح شي او هم دا دې واضح شي چې د یو مستقیم خط میل څه وخت مثبت، منفي او صفر وي، او څه وخت تعریف شوی نه وي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- د هغو مستقیمو خطونو میل پیدا کړئ چې له لاندینیو نقطو څخه تیریږي .

$(3,-5)$ او $(-3,-2)$ ← ځواب $m=\frac{1}{2}$

$(\sqrt{2},8)$ او $(3,8)$ ← ځواب $m=0$

2- د k په کوم قیمت دوه متقاطع مستقیم خطونه چې د $(4,3),(-2,5)$ او $(6,k),(-3,7)$ له نقطو څخه یو پر بل عمود دي ؟ ځواب: $k=34$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(\frac{1}{3},\frac{1}{6})$ او $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ له نقطو څخه تیریږي. (ځواب $m=2$)

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د یو مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$m=\frac{\text{vertical Change}}{\text{Horizontal change}}=\frac{\text{change in y}}{\text{change in x}}$$

(عمودي تغیر / افقي تغیر = په y کې تغیر / په x کې تغیر)

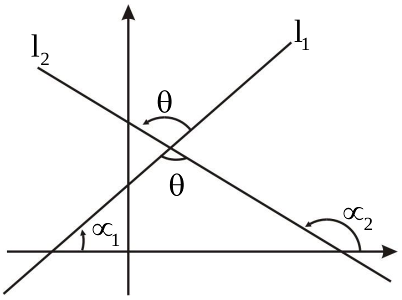
- د دوو متقاطع خطونو ترمنځ زاویه (Angle Between tow straight lines): که α_1 او α_2 د l_1 او l_2 د خطونو د میل زاویې وي او θ له l_1 څخه l_2 ته د دوارو متقاطع خطونو ترمنځ زاویه وي.

$\theta+\alpha_1=\alpha_2$

$\theta=\alpha_2-\alpha_1$

$\tan\theta=\tan(\alpha_2-\alpha_1)$

$$\tan\theta=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1-\tan\alpha_1\tan\alpha_2}=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$



او د حادې زاویې لپاره:

$$\tan\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|$$

1- که l_1 او l_2 خطونه سره موازي وي $\theta = 0^\circ$ ده.

$\tan 0^\circ = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 0 = m_2 = m_1$ یا $m_1 = m_2$ کیږي.

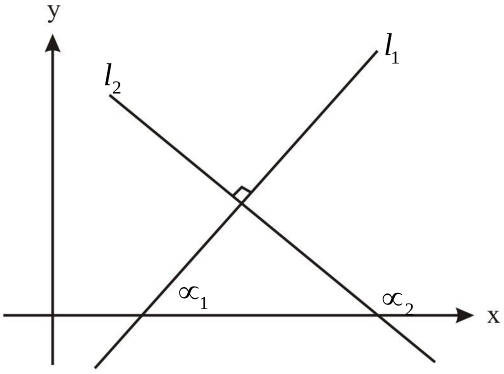
2- که l_1 او l_2 خطونه یو پر بل عمودي وي $\theta = 90^\circ$ ده.

$\tan 90^\circ = \infty$ تعریف شوی نه ده

$$\tan 90^\circ = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

- د l_1 او l_2 دوه خطونه څه وخت چې یو پر بل عمود وي د میلونو د ضرب حاصل یې (-1) دي.

ثبوت:



$$\propto_2 = 90^\circ + \propto_1$$

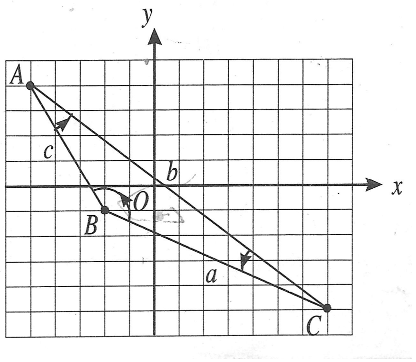
$$\tan \propto_2 = \tan(90^\circ + \propto_1) = -\cot \propto_1 = \frac{-1}{\tan \propto_1}$$

$$\tan \propto_1 \cdot \tan \propto_2 = -1 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

مثال: د هغه مثلث زاویې چې راسونه یې $A(-5,4)$, $B(-2,-1)$, $C(7,-5)$ وي عبارت دي له:

که د BC,AB او CA د ضلعو میل په ترتیب سره په m_b , m_a , m_c وي، نو.

$$m_a = \frac{-5+1}{7+2} = -\frac{4}{9} \qquad m_c = \frac{4+1}{-5+2} = -\frac{5}{3} \qquad m_b = \frac{-5-4}{7+5} = \frac{-3}{4}$$



د A زاویه له AB څخه AC ته عبارت ده له:

$$\tan A = \frac{m_b - m_c}{1 + m_b m_c} = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{5}{3}}{1 + (-\frac{3}{4})(-\frac{5}{3})} = \frac{11}{27} \Rightarrow A = 22.2^\circ$$

د B زاویه له BC څخه BA ته عبارت ده له:

$$\tan B = \frac{m_c - m_a}{1 + m_c m_a} = \frac{-\frac{5}{3} + \frac{4}{9}}{1 + (-\frac{5}{3})(-\frac{4}{9})} = \frac{-33}{7} \Rightarrow B = 144.9^\circ$$

د C زاویه له CA څخه CB ته عبارت ده له:

$$\tan C = \frac{m_a - m_b}{1 + m_a m_b} = \frac{-\frac{4}{9} + \frac{3}{4}}{1 + (-\frac{4}{9})(-\frac{3}{4})} = \frac{11}{48} \Rightarrow C = 12.9^\circ$$

مثال: زاویه په منځ له هغه خط څخه چې میل یې $-\frac{7}{3}$ دی و هغه خط ته چې میل یې $\frac{5}{2}$ دی عبارت ده له:

دلته $m_2=\frac{5}{2}$ او $m_1=\frac{-7}{3}$ دی که د θ زاویه له l_1 څخه l_2 ته وي نو؛

$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{\frac{5}{2}-(\frac{-7}{3})}{1+\frac{5}{2}(\frac{-7}{3})}=\frac{29}{-29}=-1$$

نو $\theta=135$ درجه ده.

مثال: که د دوو مستقیمو خطونو میلونه $\frac{1}{2}$ او 3 وي له l_1 څخه د l_2 ته د زاویې پراخوالی عبارت دی له:

حل:

$$\tan\propto=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}=1\Rightarrow\theta=45^\circ=(\frac{\pi}{4})^R$$

مثال: که د l_1 مستقیم خط د $(1,2)$ او $(7,-1)$ له نقطو او د l_2 خط د $(3,2)$ او $(5,6)$ له نقطو څخه تیر شي د l_1 او l_2 دوو متقاطو خطونو زاویه له l_1 څخه l_2 ته عبارت ده له:

$$m_1=\frac{-1-2}{7-1}=-\frac{1}{2}\qquad\qquad m_2=\frac{6-2}{5-3}=2$$

$$\tan\propto=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{2+\frac{1}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{5}{2}}{0}=\infty\Rightarrow\theta=90^\circ=(\frac{\pi}{2})^R$$

دوه یا درې مستقیم خطونه:

- که د l_1,l_2 دوه یو له بل جلا (distinct lines) خطونه ولرو یو له دریو حالتونو څخه موجود کیدای شي.

1- موازي دي. 2- یو بر بل عمود دي. 3- نه موازي او نه عمود دي.

که l_1 د مستقیم خط معادله $a_1x+b_1y+c_1=0$ او د l_2 د مستقیم خط معادله $a_2x+b_2y+c_2=0$ وي نو د l_1 د خط میل $m_1=-\frac{a_1}{b_1}$ او د l_2 خط میل $m_2=-\frac{a_2}{b_2}$ دی.

1- که $l_1 \parallel l_2$ وي: (د دوو مستقیمو خطونو د موازیتوب شرط) $-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\Rightarrow a_1b_2-b_1a_2=0$

2- که $l_1\perp l_2$ وي: (د دوو خطونو د عمودوالي شرط) $m_1m_2=-1\quad(-\frac{a_1}{b_1})(-\frac{a_2}{b_2})=-1\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$

3- که دوه مستقیم خطونه، نه موازي او نه عمود وي، نو متقاطع دي.

د دوو مستقمیو خطونو د تقاطع د نقطې وضعیه کمیات:

په هغه صورت کې چې د l_1 او l_2 مستقیم خطونه سره موازي نه وي $(a_1b_2-b_1a_2\neq0)$ ؛ نو:

د l_1 دخط معادله $a_1x+b_1y+c_1=0$.............I

د l_2د خط معادله $a_2x+b_2y+c_2=0$.............II

که $P(x_1, y_1)$ نقطه د l_1 او l_2 د مستقیمو خطونو د تقاطع نقطه وي، ددې معادلو له حل څخه لرو چې:

$$\frac{x_1}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y_1}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$x_1 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y_1 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \Rightarrow p(x_1y_1) = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

مثال: د 5x+7y=35 او 3x-7y=21 مستقمیو خطونو د تقاطع د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

ددې معادلو له حل څخه لرو چې x=7 او y=0 ده یا دا دواړه مستقیم خطونه د (7,0) په نقطه کې متقاطع دي.

مثال: د 2x+4y-10=0 او 5x-3y+1=0 مستقیمو خطونو د تقاطع د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$(x, y) = \left(\frac{(4)(1) - (-3)(-10)}{(2)(-3) - (5)(4)}, \frac{(5)(-10) - (2)(1)}{(2)(-3) - (5)(4)}\right) = (1,2)$$

نوټ: که دوه خطونه سره موازي وي دا سیستم حل نه لري یا $(a_1b_2 - a_2b_1 = 0)$

د درېو مستقیمو خطونو د تقاطع شرط:

که:

$$l_1 : \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$l_2 : \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$l_3 : \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

دا درې مستقیم خطونه په هغه صورت کې سره متقاطع دي چې:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

که l_1 او l_2 خطونه موازي نه وي، نو د (x_1, y_1) په نقطه کې قطع کوي.

$$x_1 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y_1 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

څرنګه چې درې واړه خطونه سره متقاطع دي، نو د تقاطع نقطه پر l_3 هم واقع ده.

که دا قیمتونه د l_3 د مستقیم خط په معادله کې وضع شي، نو لرو چې:

$$a_3\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + b_3\left(\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + c_3 = 0$$

یا:

$$a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(a_2c_1 - a_1c_2) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

د کار د اسانتیا لپاره د پورتني معادلې ضریبونه د یترمنانټ په شکل لیکو.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

چې دا د درېو مستقیمو خطونو د تقاطع شرط دی که دې دیترمنانت ته د دریم سطر په واسطه انکشاف ورکړل شي، نو

$a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(a_2c_1-a_1c_2)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$ په لاس راځي.

مثال: ښودلای شو لاندې مستقيم خطونه چې معادلې يې راکړل شوي دي متقاطع دي که نه؟ او که متقاطع وي د تقاطع دنقطې وضعيه کميات يې عبارت دي له.

$x+4y+3=0$……………I

$5x-4y-5=0$……………II

$2x+2y+1=0$……………III

د پورتنيو معادلو ضريبونو ديترمينانت عبارت دی له:

$$\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 5 & -4 & -5\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & -24 & -20\\ 0 & -6 & -5\end{vmatrix} \qquad R_2-5R_1 \qquad R_3-2R_1$$

$$=1\begin{vmatrix}-24 & -20\\ -6 & -5\end{vmatrix}=1(120-120)=0$$

په پايله کې پورتني مستقيم خطونه سره متقاطع دي او د تقاطع د نقطې وضعيه کميات يې عبارت دي له:

$$(x_1y_1)=\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}\right)=\left(\frac{(4)(-5)-(-4)(3)}{(1)(-4)-(5)(4)},\frac{(3)(5)-(-5)(1)}{(1)(-4)-(5)(4)}\right)=(\frac{1}{3},-\frac{5}{6})$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د هغه مستقيم خط ميل پيدا کړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څه تيريږي.

حل:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7-(-2)}{2-3}=\frac{9}{-1}=-9$$

2- که $A(8,6)$ ، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ د يو مثلث راسونه وي د مثلث د هرې ضلعې ميل پيدا کړې.

حل:

$$m_{AB}=\frac{2-6}{-4-8}=\frac{-4}{-12}=\frac{1}{3}$$

$$m_{BC}=\frac{-6-2}{-2-(-4)}=\frac{-8}{2}=-4 \qquad m_{AC}=\frac{-6-6}{-2-8}=\frac{-12}{-10}=\frac{6}{5}$$

3- د مستقيم خط د ميل په مرسته وښاياست چې $(a,2b)$ ، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر يو مستقيم خط باندې واقع دي.

حل: که $(a,2b)$ A او $(c,a+b)$ B او $(2c-a,2a)$ C وي، نو دا نقطې هغه وخت په يوه مستقيم خط باندې واقع دي چې د AB ميل د BC له ميل سره مساوي وي.

$$m_{AB}=\frac{a+b-2b}{c-a}=\frac{a-b}{c-a} \qquad m_{BC}=\frac{2a-(a+b)}{2c-a-c}=\frac{a-b}{c-a}$$

او يا د AB=AC+BC په واسطه هم ښودلای شو چې دا درې نقطې پر يوه مستقيم خط باندې واقع دي، خو څرنګه چې د لوست موضوع د مستقيم خط ميل دی، نو له دې سببه د ميل په واسطه وښودل شوه.

4- د $\overline{AB}$ مستقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو څخه او د $\overline{CD}$ مستقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تیریږي، دا دواړه خطونه سره:

a) موازي دي. b) عمود دي. c) هیڅ یو

حل:

$$m_{AB} = \frac{4-(-2)}{2-1} = \frac{6}{1} \qquad m_{CD} = \frac{2-1}{-8-4} = \frac{1}{-12} = -\frac{1}{12}$$

د c جز سم دی.

5- د $y = 3$ خط او د $x = 3$ مستقیم خطونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a) موازي دي. b) عمود دي. c) هیڅ یو

حل: د b جز سم دی.

6- د $x = -1$ او $x = 3$ مستقیم خطونه سره:

a) موازي دي. b) عمود دي. c) هیڅ یو

حل: د a جز سم دی.

7- د $y = -\sqrt{3}$ د مستقیم خط میل مساوي دی په:

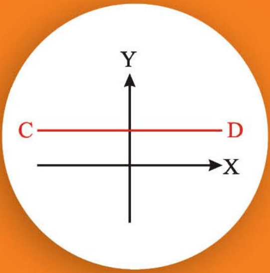
a) 1 b) صفر c) -1 d) تعریف شوی نه ده.

حل: څرنگه چې دا خط د x له محور سره موازي دي، نو میل یې صفر دي (د b جز سم دی).

8- د $x = 0.03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a) 1 b) صفر c) -1 d) تعریف شوی نه دی.

حل: څرنگه چې مستقیم خط د x پر محور عمود دی، نو میل یې تعریف شوي نه دی (د d جز سم دی).



د یو مستقیم خط معادله

د درسي کتاب (319)**مخ** **د لوست وخت** (2 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پاى کې زده کوونکي بايد: • د يومستقيم خط د معادلې د پيداکولو طريقه زده کړي. • له راکړل شوو شرطونو سره سم د مستقيمو خطونو معادلې پيداکړای شي • د هندسي مسايلو په حلولو کې ترې استفاده وکړای شي او اهميت يې درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيداکولوپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ چې ځواب يې په لاندې ډول دی:(د ټولو هغو مستقيمو خطونو معادلې چې د x له محور سره موازي وي $y=b$ چې b يو ثابت عدد دی.)

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**

زده کوونکو ته دې توضيح شي چې د (X) له محور سره د (l) موازي خط کيدای شي چې د (X) له محور څخه پورته يا د (X) له محور لاندې او يا د (X) پر محور پورت وي چې په ترتيب سره معادلې يې: $y=b$, $y=-b$ او $y=0$ دي.

لومړی مثال دې حل شي، په چارت او يا د تختې پر مخ دې وروښودل شي.

ددې مخ د فعاليت پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ چې ځواب يې y=0 دی. د هغه مستقيمو خطونو معادلې دې چې د y له محور سره موازي وي، توضيح شي چې مستقيم خط کيدای شي د y د محور ښې خواته يا کيڼې خواته او يا د y پر محور منطبق وي. چې معادلې يې په ترتيب سره $x=a$ ، $x=-a$ او $x=0$ دي. دويم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي. ددې مخ فعاليت دې زده کوونکي حل کړي چې ځواب يې x=0 ده. د هغه مستقيم خط د معادلې له توضيح کولو وروسته چې ميل او د y له محور سره يې د تقاطع نقطه معلومه وي، دريم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي. وروسته له دې چې د هغه مستقيم خط معادلې چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي او يا دوې نقطې يې معلومې وي، توضيح شي. (4) او(5) مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ. د هغه مستقيم خط د معادلې له توضيح کولو وروسته چې د X او Y له محورنو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي، شپږم او اووم مثال هم د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**

لاندې پوښتنه دې حل شي:

د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې د $p(0,0)$ له نقطې تيريږي او د $3x-2y+2=0$ پر مستقيم خط عمود وي.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې

لاندې پوښتنه دې له زده کوونکو څخه وپوښتل شي.

1- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $p(0,0)$ له نقطې څخه تیریږي او د $x+y+1=0$ له خط سره موازي وي.

2- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (X) محور په 5 او د y محور په $\frac{1}{5}$ کې قطع کوي. $y=\frac{1}{25}x-\frac{1}{5}$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې $\frac{2}{3}$ او د y محور په $b=3$ کې قطع کړي، عبارت ده له:

$$y=\frac{2}{3}x+3$$

2-

- د هغه مستقیم خط معادله چې د $(4,5)$ له نقطې څخه تیریږي او د x له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $y=5$

- د هغه مستقیم خط معادله چې د $(-6,7)$ له نقطې څخه تیریږي او د y موازي باشد عبارت از $x=-6$ می باشد.

- د هغه مستقیم خط معادله چې د $(-2,3)$ له نقطې څخه تیریږي او میل یې 2 وي، عبارت ده له $2x+y+7=0$

- د هغه مستقیم خط معادله چې د $(1,4)$ له نقطې څخه تیریږي او میل یې تعریف شوی نه وي، عبارت ده له $x=1$

- د هغه مستقیم خط معادله چې د $(3,0)$ او $(0,-2)$ له نقطو څخه تیریږي عبارت ده له: $2x-3y-6$.

3- د هغه مستقیم خط معادله چې له $p(-1,4)$ نقطې څخه تیر شي او د $x-2y-7=0$ پر مستقیم خط عمود وي عبارت ده له: $y=-2x+2$

4- د هغه مستقیم خط معادله چې د (X) محور په 4 کې او د y محور په $-\frac{1}{2}$ کې قطع کوي، عبارت ده له:

$$(x-8y-4=0)$$

5- د هغه مستقیم خط معادله چې د (X) محور په $(a,0)$ او د y محور د $(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي، عبارت ده له:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$bx+ay=ab$$

$$ay=-bx+ab$$

$$y=-\frac{b}{a}x+b\Rightarrow m=-\frac{b}{a}$$

6- د هغه مستقیمو خطونو د عمودي ناصفونو معادلې چې له لاندینیو نقطو څخه تیریږي، عبارت دي له:

$$(2,1),(1,2)\longrightarrow y=x \qquad (3,3),(0,-1)\longrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{17}{8}$$

7- د هغه مستقیم خط معادله چې د $P(0,0)$ له نقطې څخه تیریږي او د $x+y+1=0$ د مستقیم خط سره موازي وي، عبارت ده له: $y=-x$

د هغه مستقیم خط معادله چې د $P(2,-3)$ له نقطې څخه تیریږي ا و د $3x-7y+3=0$ له مستقیم خط سره موازي وي، عبارت ده له: $y=\frac{3}{7}x-\frac{27}{7}$

د هغه مستقیم خط معادله چې د P(1,2) له نقطې څخه تیریږي ا و د x+9y-11=0 له مستقیم خط سره موازي وي عبارت ده له: $y=-\frac{1}{9}x+\frac{19}{9}$ د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې -4 او د x محور په -9 کې قطع کړي، عبارت ده له: $4x+y-36=0$ د هغه مستقیم خط د عمودي ناصف معادله چې د $(-3,2)$ او $(4,5)$ له نقطو څخه تیریږي، عبارت ده له: $x+4y-7=0$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې:

a: د x له محور سره موازي او د $(7,-9)$ له نقطې څخه تیریږي.

b: د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د X پر محور عمود او د $(-5,3)$ له نقطې څخه تیریږي.

حل:

a) $y-y_1=m(x-x_1)$ $\quad y+9=0 \Rightarrow y=-9 \quad m=0$

b) $x=-5$

2- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: میل یې 7 او د $(-6,5)$ له نقطې څخه تیریږي.

b: میل یې صفر او د $(8,-3)$ له نقطې څخه تیریږي.

c: د $(-8,5)$ له نقطې څخه تیریږي او میل یې تعریف شوی نه وي.

d: چې د $(-5,-3)$ او $(9,-1)$ له نقطو څخه تیریږي.

e: چې میل یې -4 او د *Y* محور په -9 کې قطع کوي.

حل:

$y-y_1=m(x-x_1)$

a) $y-5=7(x+6) \Rightarrow y-5=7x+42 \Rightarrow 7x+47=7x-y+47=0$

b) $y+3=0(x-8) \Rightarrow y=-3 \Rightarrow y+3=0$

c) $x=-8 \Rightarrow x+8=0$

d) $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \Rightarrow y+3=\frac{-1+3}{9+5}(x+5)$

$y+3=\frac{2}{14}(x+5) \Rightarrow 14y+42=2(x+5)$

$14y+42=2x+10=-2x+14y+32=0$

$x-7y-16=0$

e) $y=mx+b$

$y=-4x+9$

$y+4x-9=0$

3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پیداکړئ چې راسونه یې $A(-3,2)$ ، $B(5,4)$ او $c(3,-8)$ وي.

$$AB: y-2=\frac{4-2}{5+3}(x+3) \Rightarrow y-2=\frac{2}{8}(x+3)$$

$$y-2=\frac{1}{4}(x+3) \qquad 4y-8=x+3 \Rightarrow 4y-x-11=0$$

دویمه طریقه:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

$$\frac{x+3}{5+3}=\frac{y-2}{4-2} \Rightarrow \frac{x+3}{8}=\frac{y-2}{2} \Rightarrow \frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{1} \Rightarrow x-4y+11=0$$

$$BC: y-4=\frac{-8-4}{3-5}(x-5)=6(x-5)=6x-30$$

$$y-4=6x-30$$

$$6x-y-26=0$$

یا: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y}$

$$\frac{x-5}{3-5}=\frac{y-4}{-8-4} \Rightarrow \frac{x-5}{-2}=\frac{y-4}{-12} \Rightarrow 6x-y-26=0$$

$$AC: A(-3,2)=(x_1 y_1) \qquad C(3,-8)=(x_2,y_2)$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y} \Rightarrow \frac{x+3}{3+3}=\frac{y-2}{-8-2} \Rightarrow \frac{x+3}{6}=\frac{y-2}{-10} \Rightarrow 5x+3y+9=0$$

4- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تیریږي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې $\frac{-3}{2}$ وي.

حل:

$$y+6=m_1(x+4)$$

$$m_2=\frac{-3}{2}\ ,\ m_1 \cdot m_2=-1 \Rightarrow m_1(\frac{-3}{2})=-1-3m_1=-2 \Rightarrow m_1=\frac{2}{3}$$

$$y+6=\frac{2}{3}(x+4) \Rightarrow 3y+18=2x+8$$

$$3y-2x+10=0 \Rightarrow 2x-3y-10=0$$

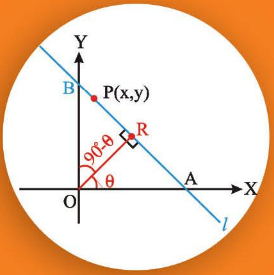
5- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(11,-5)$ له نقطې څخه تیریږي او له هغه خط سره موازي چې میل یې -24 وي.

حل: $y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y+5=m_1(x-11)$

$m_1=m_2=-24$ شرط موازی بودن است.

$$y+5=-24(x-11)$$

$$y+24x-259=0$$



د یوه مستقیم خط نورمال معادله

د درسي کتاب (325)مخ　　　د لوست وخت(2 درسي ساعتونه)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکو باید: ● په نورمال شکل د یو مستقیم خط د معادلې د پیداکولو په طریقه وپوهیږي. ● د یو مستقیم خط عمومي معادله وپیژني. ● د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د مستقیم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې زده کړي. ● د مستقیم خط عمومي معادله د مستقیم خط د نورو معادلو په شکلونوتبدیل کړای شي. ● د هندسي مسایلو په حلولو کې له دې معادلو څخه استفاده وکړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته په داسې حال کې چې د ورودي برخې د شکل چارت د ټولګي مخامخ موجود وي او یا د تختې پر مخ شکل رسم شوی وي د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ او په دې برخه کې دې محترم ښوونکي مرسته وکړي. د یو مستقیم خط نورمال خط هغه خط دی چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه پر راکړل شوي مستقیم خط باندې عمود وي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

د یو مستقیم خط د نورمال معادلې لاس ته راوړل زده کوونکو ته توضیح کړې او لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ. بیا دې زده کوونکي ددې لوست لومړی فعالیت په ګروپونو کې سرته ورسوي چې حل یې په لاندې ډول دی

$$x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ = 10$$

$$x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ - 10 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 10 \Rightarrow \sqrt{3}x + y = 20$$

د مستقیم خط عمومی معادله او خاص حالتونه یې زده کوونکو ته توضیح کړئ.د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په معیاري شکل زده کوونکو ته توضیح کړئ او د زده کوونکو په فعاله ونډه اخیستنه دویم مثال د زده کوونکو په فعاله ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

په همدې ډول کله چې د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه معادلې په شکل چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي، واضح شي، دریم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ. ددې لپاره چې د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په داسې یوه معادله چې د مستقیم خط دوې نقطې معلومې وي، توضیح شي. څلورم مثال حل کړئ. ددې لپاره چې د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په داسې معادله چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي، توضیح شي. پنځم مثال حل کړئ او د 330 مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي. چې ځواب یې دا دی: $3x - 2y = 6$

د y له محور سره د تقاطع لپاره x=0 وضع کوو چې په نتیجه کې $y = -3$ کیږي، نو دا مستقیم خط د y محور د $(0,-3)$ په نقطه کې قطع کوي د x له محور سره د تقاطع لپاره y=0 وضع کوو، نو لرو چې x=2 دی، نو دامستقیم خط د x محور د $(2,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلون د نورمال په شکل توضیح او شپږم مثال حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

د (331) مخ فعالیت دې حل شي چې ځواب یې په لاندې ډول دی:

$$k = \pm\sqrt{a^2 + b^2} = \pm\sqrt{2^2 + (-3)^2} = \pm\sqrt{13}$$

څرنګه چې $c > 0$ دی، نو: $k = -\sqrt{13}$

د معادلې دواړه خواوې په $-\sqrt{13}$ ویشو:

$$\frac{2x - 3y + 6}{-\sqrt{13}} = \frac{0}{-\sqrt{13}}$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{13}} + \frac{3y}{\sqrt{13}} - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

یا

$$\frac{-2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

چې $\sin\theta = \frac{13}{\sqrt{13}}$ او $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ او د نورمال اوږدوالی $\frac{6}{\sqrt{13}}$ دي.

نو θ په دویمه ناحیه کې واقع ده او د مثلثاتي جدول له مخې $\theta = 123^\circ\ 40'$ دي، نو ددې خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos 123^\circ\ 40' + y\sin 123^\circ\ 40' - \frac{6}{\sqrt{13} = 0}$$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د لوست د ارزونې لپاره لاندې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 7 واحده او د نورمال د میل زاویه یې 150° وي.

ځواب: $(\sqrt{3}x - y + 14 = 0)$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د یو مستقیم خط د معادلو شکلونه:

که A, B او C ثابت عددونه او A او B دواړه په عین وخت کې صفر نه وي.

1 $Ax + By = C$ (standard from)

2 $y = mx + b$ (slop – intercept form)

3 $y - y_1 = m(x - x_1)$ (point – slope form)

4 $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ (Tow points form)

5 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (Tow – intercepts form)

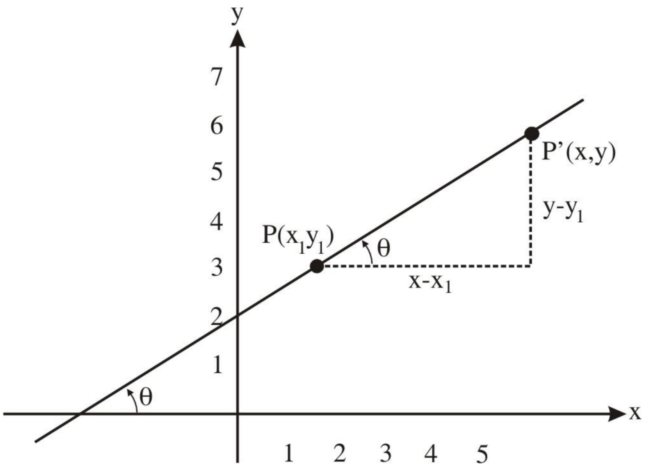
6 $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ (Normal form) (PerpendicularForm)

7 $\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$ (symmetric form)

د 7 شمارې ثبوت: که l يو داسې مستقيم خط وي چې عمود نه وي او د ميل زاويه يې θ او ميل يې m وي او د $p(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تير شي.

$$\tan\theta = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow \frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$

چې د معادلې دې شکل ته د هغه مستقيم خط د متناظر شکل معادله وايي چې د $p(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تيرېږي او د x له محور سره د θ زاويه جوړوي.



$pp' = r$ ده. لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{x - x_1}{r} \qquad \sin\theta = \frac{y - y_1}{r}$$

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$

$$x = x_1 + r\cos\theta$$

$$y = y_1 + r\sin\theta$$

ځکه چې:

$$m = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(y - y_1)^2}{(x - x_1)^2}$$

$$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2}{(x-x_1)^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{r^2}{(x-x_1)^2}$$

$$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{r}{x-x_1}$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=r\Rightarrow x=x_1+r\cos\theta$$

مثال: د 2x-3y+4=0 د معادلې بدلول په نورو شکلونو باندې:

a- چې میل او د y له محور سره یې تقاطع معلومه وي.

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$$

چې میل یې $\frac{2}{3}$ او د y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کوي.

b- میل او یوه نقطه یې معلومه وي:

یوه نقطه یې $(-\frac{c}{a},0)=(-2,0)$ ده:

$$m=-\frac{a}{b}=\frac{2}{3} \qquad y-0=\frac{2}{3}(x+2) \qquad y=\frac{2}{3}(x+2)$$

c- دوې نقطې یې معلومې وي:

دوې نقطې یې عبارت دي له: $(0,-\frac{c}{b})=(0,\frac{4}{3})$ او $(-\frac{c}{a},0)=(-2,0)$

$$(0,-\frac{c}{b})=(0,\frac{4}{3})$$

$$y-0=\frac{\frac{4}{3}-0}{0-(-2)}\quad(x+2)$$

d- له محورنو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي:

$$2x-3y=-4\Rightarrow\frac{2x}{-4}-\frac{3y}{-4}=1$$

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{\frac{4}{3}}=1$$

e: د 2x-3y+4=0 معادلې نورمال شکل عبارت دی له:

2x-3y=-4

دواړه خواوې په $\pm\sqrt{13}$ = $\pm\sqrt{(2)^2+(-3)^2}$ باندې ویشو څرنګه چې C>0 ده، نو پر $-\sqrt{13}$ یې ویشو.

$$\frac{-2x}{\sqrt{13}}+\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$$

$\cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{13}}$, $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$ او $p=\frac{4}{\sqrt{13}}$ دي.

f- د $2x-3y+4=0$ معادله د متناظري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$\tan\theta = m = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{13}} \qquad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

د مستقیم خط یوه نقطه $(-2,0)$ ده. نو معادله یې $\dfrac{x+2}{\frac{-2}{\sqrt{13}}} = \dfrac{y+0}{\frac{3}{\sqrt{13}}} = r$ ده.

- که د نور مال خط اوږدوالی 3 واحده او د میل زاویه یې 120 درجې وي، ددې خط معادله او د y له محور سره یې تقاطع عبارت ده له:

$$x\cos120^\circ + y\sin120^\circ = 3$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \Rightarrow x - \sqrt{3}y + 6 = 0$$

- لاندې معادلې په نارمل شکل عبارت دي له:

a) $5x-12y+39=0$ b) $8x+6y-1=0$

c) $4x+7y-2=0$ d) $4x-3y+14=0$

حل:

a) $5x-12y=-39$

$-5x+12y=39$

دواړه خواوې په $\sqrt{(-5)^2+(12)^2}$ ویشو او یا پر $13=\sqrt{169}$ یې وویشئ:

$$\frac{-5x}{13} + \frac{12}{13}y = 3$$

b) $8x+6y=1$

دواړه خواوې په $\sqrt{(8)^2+(6)^2}$ ویشو او یا پر $10=\sqrt{100}$ یې وویشئ:

$$\frac{8x}{10} + \frac{6y}{10} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{x}{(\frac{5}{4})} + \frac{y}{(\frac{5}{3})} = \frac{1}{10}$$

c) $4x+7y=2$

دواړه خواوې په $\sqrt{(4)^2+(7)^2} = \sqrt{65}$ ویشو:

$$\frac{4x}{\sqrt{65}} + \frac{7y}{\sqrt{65}} = \frac{2}{\sqrt{65}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{65}}{4}} + \frac{y}{\frac{\sqrt{65}}{7}} = \frac{2}{\sqrt{65}}$$

d) $4x-3y=-14$

$-4x+3y=14$

دواړه خواوې په $\sqrt{(-4)^2+(3)^2} = 5$ ویشو:

$$-\frac{4x}{5} + \frac{3}{5}y = \frac{14}{5}$$

- د مستقیم خط عمومي معادله ax+by+c=0 په متناظر شکل عبارت ده له:

$$\sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د ax+by+c=0 مستقیم خط یوه نقطه $(-\frac{c}{a},0)$ ده. نو په متناظر شکل د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x-(-\frac{c}{a})}{\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{y-0}{\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}} = r$$

- د هغه مستقیم خط نور مال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 7 واحده او د نورمال د میل زاویه 150 درجې وي عبارت ده له:

$$x(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + y(\frac{1}{2}) = 7 \Rightarrow \sqrt{3}x - y + 14 = 0$$

- د هغه مستقیم خط نورمال معادله چې د نورمال اوږدوالی یې 5 واحده او د نارمل د میل زاویه 135 درجې وي عبارت ده له:

$$x\cos 135^\circ + y\sin 135^\circ = 5 \qquad x(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + y(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 5 \Rightarrow x - y = 5\sqrt{2}$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د $x\cos 60° + y\sin 60° - 7 = 0$ د مستقیم خط نورمال معادله د مستقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

حل:

$$x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ - 7 = 0 \qquad x\cdot\frac{1}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} - 7 = 0$$

$$x + \sqrt{3}y - 14 = 0$$

2- د $x\cos 225° + y\sin 225° - 6 = 0$ د مستقیم خط نورمال معادله د مستقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + y(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - 6 = 0$$

$$-\sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 12 = 0$$

3- د مستقیم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$a: \quad 15y - 8x + 3 = 0 \qquad b: \quad 2x + 5y - 2 = 0 \qquad c: \quad 2x + 4y + 7 = 0$

د a جز حل:

$$k = \pm\sqrt{A^2+B^2} = \pm\sqrt{(-8)^2+(15)^2} = \pm\sqrt{64+225} = \pm\sqrt{289} = 17$$

څرنگه چې $C > 0$ دی، نو $k = -17$ په نظر کې نیول کیږي دواړه خواوې په 17- وېشو: $\frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y - \frac{3}{17} = 0$

څرنگه چې $\cos\theta = \frac{8}{17} > 0$, $\sin\theta = \frac{-15}{17} < 0$ دي، نو θ په څلورمه ربعه کې واقع ده.

د b جز حل: $k=\pm\sqrt{A^2+B^2}=\pm\sqrt{(2^2)+(5)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

څرنګه چې $C<0$ دی، نو $k=\sqrt{29}$ کيږي لرو چې:

$$\frac{2x}{\sqrt{29}}+\frac{5y}{\sqrt{29}}-\frac{2}{\sqrt{29}}=0$$

نو θ په لومړی ربع کې واقع ده او د مثلثاتي جدول له مخې $\theta=68^\circ\ 10'$ ده.

$$x\cos 68^\circ\,10'+y\sin 68^\circ\,10'-\frac{2}{\sqrt{29}}=0$$

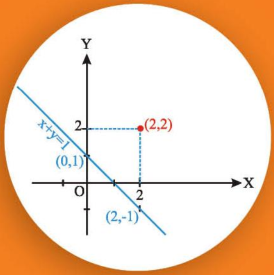
د c جز حل: $k=\pm\sqrt{2^2+4^2}=\pm\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=-2\sqrt{5}$

څرنګه چې $C>0$ دی؛ نو:

$$-\frac{2x}{2\sqrt{5}}-\frac{4y}{2\sqrt{5}}-\frac{7}{2\sqrt{5}}=0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{7}{2\sqrt{5}}=0\Rightarrow -2x-4y-7=0$$

څرنګه چې $\sin\theta$ او $\cos\theta$ دواړه منفي دي؛ نو θ په دريمه ناحيه کې واقع ده.



د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه

(Distance of a point from a line)

د درسي کتاب (333)مخ　　د لوست وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • له یوه مستقیم خط څخه د يوې نقطې د فاصلې د فورمول پیداکول زده کړي. • د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه چې د مستقيم خط معادله په نورمال او يا عمومي شکل راکړل شوي وي، پيدا کړای شي. • د دوو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيداکړای شي. • د هندسي مسايلو په حلولو کې له دې فورمول څخه استفاده وکړای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د زده کړې لپاره د انګيزې د پيداکولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ چې ځواب يې $\frac{3}{\sqrt{2}}$ دی.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې

دشکل له مخې د فاصلې فورمول په لاس راوړئ که د مستقيم خط معادله د نورمال په شکل او يا د عمومي معادلې په شکل راکړل شوي وي، بيا د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره لومړی مثال حل کړئ.

د (334) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې حل يې په دې ډول دی:

$$d=\frac{|3(5)-2(8)+7|}{\sqrt{(3)^2+(-2)^2}}=\frac{|15-16+7|}{\sqrt{9+4}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

بيا د دويم مثال په حلولو کې د دوو موازي خطونو ترمنځ د فاصلې پيداکول توضيح کړئ.

زده کوونکي دې د (335) مخ فعاليت سرته ورسوي چې حل يې په لاندې ډول دی:

د $(0,7)$ د نقطې فاصله د $3x+2y=10$ له مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3(0)+2(7)-10|}{\sqrt{9+4}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$$

محترم ښوونکي دې لارښوونه او ددوی له کارکولو څخه څارنه وکړي او دريم مثال دې حل کړي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې

لاندې پوښتنه د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي.

د $(-54,71)$ د نقطې فاصلې د $4x+3y=17$ له مستقيم خط څخه پيداکړئ.

ځواب $(d=4)$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

لاندې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د $(-60,25)$ د نقطې فاصله د $3x+7y+5=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

ځواب$(d=0)$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د فاصلې په فورمول $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ کې لرو چې:

1 نتیجه: که خط افقي وي، نو:

$$d=\left|\frac{by_1+c}{b}\right|$$

ثبوت: که د l خط افقي وي، نو معادله یې $y=-\dfrac{c}{b}$ ده او د $p(x_1,y_1)$ له نقطې څخه یې فاصله $d=|y_1-y|$ ده.

$$d=\left|y_1-\frac{-c}{b}\right|=\left|\frac{by_1+c}{b}\right|$$

2- که l یو عمودي خط وي معادله یې $x=-\dfrac{c}{a}$ ده.

نو د $p(x_1,y_1)$ د نقطې فاصله د l له مستقیم خط څخه $d=|x_1-x|$ ده.

$$d=\left|x_1-\frac{-c}{a}\right|=\left|\frac{ax_1+c}{a}\right|$$

نوټ: که د $p(x_1,y_1)$ نقطه د l پر مستقیم خط پرته وي، د p د نقطې فاصله $ax_1+by_1+c=0$ له مستقیم خط څخه $d=0$ ده.

فاصله نقطه $p(3,-4)$ از خط مستقیم $4x-3y+6=0$ مساوي است به:

$$d=\frac{|4(3)-3(-4)+6|}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}}=\frac{|12+12+6|}{\sqrt{16+9}}=\frac{30}{\sqrt{25}}=\frac{30}{5}=6$$

- لومړی باید وښودل شي چې د $6x+8y+16=0$ او $3x+4y-12=0$ مستقیم خطونه سره موازي دي او بیا ددې خطونو ترمنځ فاصله عبارت ده له.

$$m_2=\frac{-3}{4} \text{ و } m_1=\frac{-6}{8}=\frac{-3}{4}$$

په نتیجه کې دا مستقیم خطونه سره موازي دي او د دوی تر منځ فاصله عبارت ده له:

څرنګه چې د $(0,3)$ په دویم مستقیم خط باندې واقع ده، نو:

$$d=\frac{|6(0)+8(3)+16|}{\sqrt{(6)^2+(8)^2}}=\frac{|24+16|}{\sqrt{100}}=\frac{40}{10}=4$$

- د $p(0,3)$ د نقطې فاصله د $5x-12y-29=0$ له مستقیم خط څخه $d=\dfrac{65}{13}$ ده.
- د $p(1,-2)$ د نقطې فاصله د $x-2y-5=0$ له مستقیم خط څخه $d=0$ ده.

1- د يوې نقطې موقعيت نظر يو مستقيم خط ته:

که د $p(x_1, y_1)$ نقطه د xy په مستوي کې د l پر مستقيم خط $(ax + by + c = 0)$ واقع نه وي.

a) که $(ax_1 + by_1 + c > 0)$ وي، نو د P نقطه له l مستقيم څخه پورته واقع ده.

b) که $(ax_1 + by_1 + c < 0)$ وي، نو د P نقطه له l مستقيم څخه لاندې واقع ده.

د مثال په ډول: ايا د $p(-2,4)$ نقطه د $4x + 5y = 3$ له خط پورته خواته يا ترې لاندې واقع ده $4(-2) + 5(4) - 3 = 9 > 0$

نو د $p(-2,4)$ نقطه د مستقيم خط پورته خواته واقع ده

2- د وضعيه کمياتو مبدا او د $p(x_1, y_1)$ نقطه:

a) که $(ax_1 + by_1 + c)$ او c هم علامه وي، نو د $p(x_1, y_1)$ نقطه او د وضعيه کمياتو مبدا د l له مستقيم خط يوې خواته واقع وي.

b) که $(ax_1 + by_1 + c)$ او c مختلف العلامه وي، نو د $p(x_1, y_1)$ نقطه او د وضعيه کمياتو مبدا د l د مستقيم خط دواړو خواو ته واقع دي.

د مثال په ډول: د $p(5,-8)$ نقطه او د وضعيه کمياتو مبدا د $3x + 7y + 15 = 0$ مستقيم خط دواړو خواو ته واقع ده $c = 15$ او $3(5) + 7(-8) + 15 = -26 < 0$ څرنګه چې علامې يې مختلفې دي، نو دا نقطه او د وضعيه کمياتو مبدا د $3x + 7y + 15 = 0$ مستقيم خط دواړو خواوو ته واقع دي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- هر دوو جوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيدا کړئ چې معادلې يې په لاندې ډول دي:

$3x - 4y + 3 = 0$ او $3x - 4y + 7 = 0$

$12x + 5y - 6 = 0$ او $12x + 5y + 13 = 0$

$x + 2y - 5 = 0$ او $2x + 4y = 1$

1- د a حل: د راکړل شوو مستقيمو خطونو څخه د يوه خط يوه اختياري نقطه پيدا کوو او ددې نقطې فاصله له دويم مستقيم څخه پيدا کوو، د مثا ل په ډول:

$3x - 4y + 7 = 0\ ,\ \ x = -1 \Rightarrow y = 1$

د $(-1,1)$ نقطې فاصله $3x - 4y + 3 = 0$ له مستقيم خط څخه پيدا کوو:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad d = \frac{|3(-1) - 4(1) + 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-3 - 4 + 3|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

دb حل:

$x = 1 \qquad y = -5$

د $(1,-5)$ نقطې فاصله د $12x + 5y - 6 = 0$ له مستقيم خط څخه پيدا کوو:

$$d = \frac{|12(1) + 5(-5) - 6|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{12 - 25 - 6}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{|-19|}{13} = \frac{19}{13}$$

دc حل: د $x + 2y - 5 = 0$ په مستقيم خط کې که $y = 0$ شي نو $x = 5$ کيږي.

$d=\frac{|5(2)+(0)4-1|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{10-1}{\sqrt{4+16}}=\frac{9}{\sqrt{20}}=\frac{9}{2\sqrt{5}}$

2- د $P(6,-1)$ د نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

$d=\frac{|6(6)-4(-1)+9|}{\pm\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\frac{36+4+9}{\sqrt{36+16}}=\frac{49}{\sqrt{52}}$

3- د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ موازي خطونو ترمنځ فاصله:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) درې واړه سم دي

حل:

په لومړي مستقیم خط کې: $x=0\Rightarrow 6y=8\Rightarrow y=\frac{4}{3}$

د $(0,\frac{4}{3})$ نقطې فاصله د 2x+4y+5=0 له مستقیم خط څخه په لاس راوړو:

$d=\frac{\left|2(0)+4(\frac{4}{3})+5\right|}{\sqrt{4+16}}=\frac{\frac{16}{3}+5}{\sqrt{20}}=\frac{31}{3\sqrt{20}}=\frac{31}{6\sqrt{5}}$

(د b جز سم دی).

4- د (1.2) د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ له مستقیم خط څخه عبارت ده له:

a : 2 b : 1 c : 3 d : $\frac{1}{2}$

حل:

$d=\frac{\left|\frac{3}{5}(1)-\frac{4}{5}(2)+2\right|}{\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}}=\frac{\left|\frac{3}{5}-\frac{8}{5}+2\right|}{1}=\frac{3-8+10}{5}=\frac{13-8}{5}=\frac{5}{5}=1$

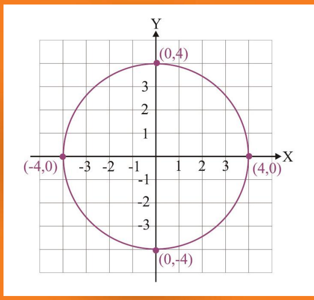
(د b جز سم دی).

5- د $(-2,7)$ نقطې او د $24x+7y-2=0$ مستقیم خط ترمنځ فاصله مساوي ده په:

a : 0.04 b : $\frac{1}{25}$ c : $4\cdot10^{-2}$ d : درې واړه سم دي

حل: $d=\frac{|24(-2)+7(7)-2|}{\sqrt{(24)^2+(7)^2}}=\frac{|-48+49-2|}{\sqrt{576+49}}=\left|-\frac{1}{\sqrt{625}}\right|=\frac{1}{25}$

(د d جز سم دی).



دایره (*Circle*)

د درسی کتاب (337) مخ   د لوست وخت(1 درسی ساعت)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • د دایرې د معیاري او عمومي معادلې پیداکول زده کړي. • د دایرې د معادلې خاص حالتونه وپیژني. • د دایرې عمومي او معیاري معادلې یو پر بل بانديې تبدیل کړای شي. • د دایرې د شعاع د اوږدوالی او د دایرې د مرکز د وضعیه کمیاتو له مخې د دایرې معادله پیدا او دایره رسم کړای شي. • د دایرې د معادلې له مخې، حقیقي، نقطوي او مجازي دایرې تشخیص کړای شي. • د دایرې د معادلې له مخې د دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړای شي. • د هندسي مسایلو په حلولو کې د دایرې له فورمولونو څخه استفاده وکړای شي ا و اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنيو فعالیتونو څخه وروسته د انګیزې د پیداکولو د ورودي برخې د شکل د چارت له مخې د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړې او ځواب یې دا دی: $x^2 + y^2 = 16$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

د دایرې له تعریفولو وروسته د چارت او یا د تختې له مخې د دایرې معیاري معادله دې په لاس راوړل شي.

د (338) مخ لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ، بیا دې ددې مخ فعالیت زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب یې $x^2 + y^2 = 9$ دی.

د دایرې د عمومي معادلې په لاس راوړل دې توضیح شي او همدارنګه حقیقي، مجازي او نقطوي دایره او د دایرې د معادلې په خاصو حالتونو زده کوونکي وپوهول شي. دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د 339 مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب یې په دې ډول دی:

څرنګه چې د $x^2 + (y-5)^2 = 10$ معادلې عمومي شکل $(x-0)^2 + (y-k)^2 = r^2$ دی او یا $h=0$ ، نو ددې دایرې مرکز د x پر محور واقع دی. او د $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$ په معادله کې $k=r$ ده نو، دایره د y پر محور مماس ده او په

دریمه دایره کې $h^2+k^2=r^2$ نو $9=(0)^2+(-3)^2$ ، نو دایره د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیریږي

دریم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ. ددې لپاره چې زده کوونکي وکولای شي چې ددایرې د معادلې له مخې د دایرې د شعاع اوږدوالی او د مرکز وضعیه کمیات پیداکړای شي څلورم مثال حل کړئ

5 او 6 مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د (341) فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب یې داسې دی:

$A(0,0) \qquad B(2,0)$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$|AC|=|BC|$

$(h-0)^2+(k-0)^2=(h-2)^2+(k-0)^2$

$h^2+k^2=h^2-4h+k^2 \Rightarrow 4h=4 \Rightarrow h=1$

د دایرې مرکز $(1,k)$ دی. څرنګه چې $0\cdot x+y-1=0$ د مماس او دایرې د مرکز $(1,k)$ ترمنځ فاصله د شعاع له اوږدوالي څخه عبارت ده.

$\frac{|0(1)+k-1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=r \Rightarrow r^2=|k-1|^2$

$|AC|^2=(k-1)^2$

$h^2+k^2=k^2-2k+1 \Rightarrow 1=2k+1 \Rightarrow k=0$

$r^2=|0-1|^2 \Rightarrow r^2=1$

$(x-1)^2+(y-0)^2=1$

$x^2+y^2-2x=0$

اووم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

لاندې پوښتنه حل کړئ.

د هغه دایرې معادله پیداکړئ چې مرکز یې $(-3,5)$ او د $4x-3y-18=0$ مستقیم خط سره مماس وي.

جواب $x^2+y^2+6x-10y-47=0$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د هغه دایرې د شعاع اوږدوالی او د مرکز وضعیه کمیات پیداکړئ چې معادله یې $(x+2)^2+y^2=64$ وي.

ځواب: $r=8$ و $c(-2,0)$.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- د هغه دایرې معادله چې له درېو نقطو څخه تیریږي: لومړی د g,f او c قیمتونه پیداکوو او د دایرې په عمومي معادله کې یې وضع کوو.

مثال: د هغه دایرې معادله چې $A(5,10)$, $B(6,9)$ او $C(-2,3)$ له نقطو څخه تیریږي عبارت ده له:

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$..............I

$\Rightarrow 10g+20f+c+125=0$..............II

$36+81+12g+18f+c=0 \Rightarrow 12g+18f+c+117=0$..................III

$4+9-4g+6f+c+13=0 \Rightarrow -4g+6f+c+13=0$....................IV

اوس III,II او IV معادلې حلوو III معادله له II څخه تفریق کړئ:

$-2g+2f+8=0$

$g-f-4=0$..................................V

که IV معادله له II معادلې څخه تفریق شي لرو چې:

$g+f+8=0$..................................VI

د V او VI معادلې څخه لرو چې $g=-2$ او $f=-6$ کیږي.

که د f او g قیمتونه په II معادله کې وضع شي په نتیجه کې c=15 کیږي، نو غوښتل شوي معادله عبارت ده له:

$x^2+y^2-4x-12y+15=0$

2- د هغه دایرې معادله چې د $(0,1),(1,0)$ او $(2,1)$ له نقطو څخه تیریږي عبارت ده له:

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$0+1+2g(0)+2f+c=0 \Rightarrow 2f+c+1=0$....................................(i)

$1+0+2g(1)+2f(0)+c \Rightarrow 2g+c+1=0$..$(ii)$

$4+1+2g(2)+2f(1)+c=0 \Rightarrow 4g+2f+c+5=0$..........................(iii)

له (i) معادلې څخه (ii) معادله تفریقوو:

$$\begin{array}{l} 2f+c+1=0 \\ \underline{{}_-2g \pm c \pm 1=0} \\ 2f-2g=0 \Rightarrow g=f \end{array}$$ ....(iv)

له (iv) معادلې څخه (iii) معادله تفریقوو، نو لرو چې:

$$\begin{array}{l} 2f-2g=0 \\ \underline{{}_-2f \pm 4g \pm c \pm 5=0} \\ \quad -6g-c-5=0 \end{array}$$ ....(V)

$$\begin{array}{l} 2g+c+1=0 \\ \underline{-6g-c-5=0} \\ -4g-4=0 \Rightarrow g=-1 \end{array}$$

د g قیمت په (ii) معادله کې وضع کوو: $2(-1)+c+1=0 \Rightarrow c=1$

د c قیمت په (i) معادله کې وضع کوو: $2f+1+1=0 \Rightarrow f=-1$

د دایرې د مرکز وضعیه کمیات $(-g,-f)=(1,1)$

$r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{1+1-1}=1$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$x^2-2x+1+y^2-2y+1-1=0$

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$

3- د هغه دایرې معادله چې د $(3,5)$ او $(-3,7)$ له نقطو څخه تیریږي او:

a: مرکزیې د x پر محور باندې واقع وي.   b: مرکز یې د y پر محور باندې واقع وي.

که (a,b) د هغه دایرې مرکز وي چې د $(3,5)$ او $(-3,7)$ له نقطو څخه تیریږي.

$$\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2}=\sqrt{(a+3)^2+(b-7)^2}$$
$$a^2-6a+9+b^2-10b+25=a^2+6a+9+b^2-14b+49$$
$$-12a+4b-24=0$$
$$-3a+b-6=0$$

a: هغه دایره چې مرکز یې د x پر محور واقع دی b=0 دی.

$$-3a-6=0\Rightarrow a=-2$$

نو مرکز یې $(-2,0)$ دی او د $(3,5)$ او $(-3,7)$ نقطو فاصله له مرکز $(-2,0)$ څخه د دایرې له شعاع څخه عبارت ده:

$$r=\sqrt{(3+2)^2+5^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$$
$$(x+2)^2+(y-0)^2=(5\sqrt{2})^2\Rightarrow x^2+y^2+4x-46=0$$

b: هغه دایره چې مرکز یې د y پر محور واقع وي a=0 دی.

$$b-6=0\Rightarrow b=6$$
$$r=\sqrt{(3-0)^2+(5-6)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$
$$(x-0)^2+(y-6)^2-\sqrt{10}=0$$

د دایرې معادله عبارت ده له: $x^2+y^2-12y+26=0$

4- د هغو دایرو د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی چې معادلې یې په لاندې ډول دي عبارت دي له:

د دایرې معادله	د شعاع اوږدوالی	د مرکز وضعیه کمیات
$(x+2)^2+y^2=64$	$r=8$	$C(-2,0)$
$(x-4)^2+(y+3)^2=36$	$r=6$	$C(4,-3)$
$(x+5)^2+(y-2)^2=0$	$r=0$	$C(-5,2)$
$x^2+(y-5)^2=5$	$r=\sqrt{5}$	$C(0,5)$
$x^2+y^2+4x-2y+5=0$	$r=5$	$C(1,-2)$
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$	$r=\sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C}$	$C(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$

5- د $(1,-2)$ نقطه د دایرې دننه، د باندې او یا د دایرې پر محیط واقع وي.

$x^2+y^2=1$	$1^2+(-2)^2=5>1$	د دایرې د باندې
$x^2+y^2=5$	$1^2+(-2)^2=5=5$	د دایرې پر محیط
$x^2+y^2=9$	$1^2+(-2)^2=5<9$	د دایرې دننه
$x^2+y^2-10x+8y=0$	$-21<0$	د دایرې دننه

6- د دایرې دمعادلې مهم خاصیتونه (Important Properties of the equation of a circle)

د یوې دایرې معیاري معادله چې شعاع یې r او مرکز یې $C(h,k)$ وي، $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده او د دایرې عمومي معادله $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ده.

a: د دایرې شعاع (radius) مساوي ده په: $R=\sqrt{g^2+f^2-c}$ چې د دایرې مرکز $c(-g,-f)$ دی.

b: د x^2 او y^2 ضریبونه سره مساوي وي.

c: په معادله کې د xy هېڅ حد موجود نه وي.

d: د د ایرې معادله د x او y له جنسه یوه دویمه درجه معادله ده.

7- د دایرې د عمومي معادلې بدلول د دایرې د معیاري معادلې په شکل:

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0..........................I$

$(x^2+2gx)+(y^2+2fy)=-c......................II$

$x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c$

$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$

چې د دایرې مرکز $c(-g,-f)$ او شعاع یې $R=\sqrt{g^2+f^2-c}$ ده.

یا په مستقیم ډول $-\frac{1}{2}$ د x او $-\frac{1}{2}$ د y د ضریب یا $(-g-f)$ د دایرې مرکز او

$R=\sqrt{(-g)^2+(-f)^2-Constanterm}$ (ثابت حد)

8- د هغه دایرې معادله چې د قطر د انجانونو وضعیه کمیات یې (x_1,y_1) او (x_2,y_2) وي عبارت ده له:

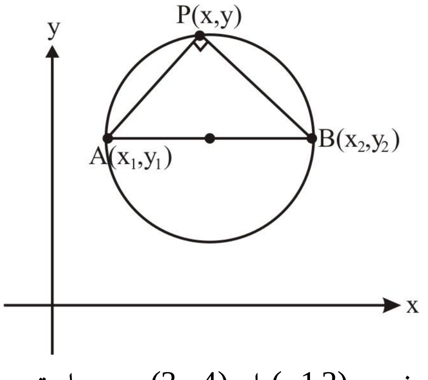
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

ځکه چې که $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ د دایرې د قطر انجامونه وي یا AB د دایرې قطر وي او $P(x,y)$ د دایرې د محیط یوه کیفي نقطه وي، پوهیږو چې $B\hat{P}A=90^\circ$ ده.

د PA د خط میل عبارت د ی له $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ او د PB د خط میل $\frac{y-y_2}{x-x_2}$ دی چې د میلونو د ضرب حاصل یې (-1) دی.

$(\frac{y-y_1}{x-x_1})(\frac{y-y_2}{x-x_2})=-1$

$\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$



مثال: د هغه دایرې معادله چې د قطر انجامونه یې $(-1,2)$ او $(3,-4)$ وي عبارت ده له:

$(x+1)(x-3)+(y-2)(y+4)=0$

$x^2+y^2-2x+2y-11=0$

چې مرکز یې $(1,-1)$ او د شعاع اوږدوالی یې $r=\sqrt{1^2+(-1)^2-(-11)}=\sqrt{13}$

د هغه دایرې معادله چې مرکز یې $(-2,-2)$ او د شعاع اوږدوالی یې $r=2$ وي عبارت ده له:

$$x^2+y^2+4x+4y+4=0$$

9- د هغه دایرې معادله چې مرکز یې $(-3,5)$ وي او د $4x-3y-18=0$ له مستقیم خط سره مماس وي عبارت ده له:

خرنګه چې شعاع د تماس په نقطه کې په مماس عمودي وي، نو د $(-3,5)$ د نقطې عمودي فاصله د 4x-3y-18=0 له مستقیم خط څخه د دایرې شعاع ده.

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4(-3)-3(5)-18|}{\sqrt{16+9}}=|-9|=9$$

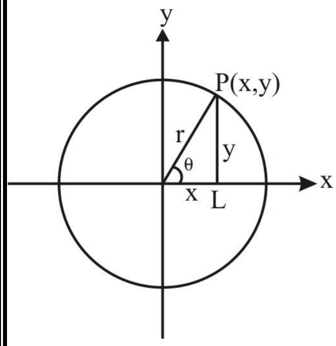
$$(x+3)^2+(y-5)^2=9^2$$

یا:

$$x^2+y^2+6x-10y-47=0$$

10- د دایرې پارامتریک معادله: $x^2+y^2=r^2$:

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$



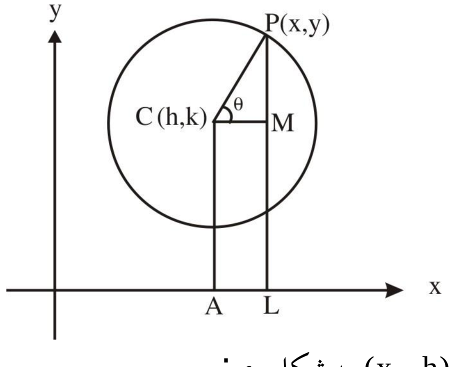
که $P(x,y)$ د دایرې د محیط یوه کیفي نقطه وي، د $\overline{OP}$ خط د x له محور سره د θ زاویه جوړوي.

$x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$

چې د $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ نقطه هر وخت د دایرې پر محیط واقع ده، دواړه خواوې مربع کوو او بیا یې سره جمع کوو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

که $y=r\sin\theta$ او $x=r\cos\theta$ ته د دایرې پارامتریک معادله وایي.



که د دایرې معادله د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په شکل وي:

$$\cos\theta=\frac{x-h}{r} \qquad , \qquad \sin\theta=\frac{y-k}{r}$$

$$\Rightarrow x=r\cos\theta+h \ldots\ldots\ldots\ldots\text{I} \qquad y=r\sin\theta+k\ldots\ldots\ldots\ldots\text{II}$$

چې $(r\cos\theta+h, r\sin\theta+k)$ د دایرې د محیط د یوې نقطې پارامتریک مختصات او I او II د دایرې پارامتریک معادلې دي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- د هغه دایرې معادله پیدا کړئ چې:

a : د مرکز مختصات یې $(5,-2)$ او $r = 4$ وي.

حل: (معیاري معادله) $(x-5)^2+(y+2)^2=16$ یا $x^2+y^2-10x+4y+13=0$

b : د مرکز مختصات یې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ او شعاع یې $r=2\sqrt{2}$ وي.

حل: $(x-\sqrt{2})^2+(y+3\sqrt{3})^2=8$ یا $x^2+y^2-2\sqrt{2}+6\sqrt{3}y+21=0$

c : د مرکز مختصات یې $(0,0)$ او د $(1,2)$ له نقطې څخه تیریږي.

$$r^2=1+2^2 \qquad (x-0)^2+(y-0)^2=5$$
$$r^2=1+4=5 \qquad x^2+y^2=5$$

d : د مرکز مختصات یې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تیریږي.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad C(0,0)=(h,k)$$
$$\begin{cases} r^2=(-3)^2+(-4)^2 \\ r^2=9+16=25 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=25$$

e : د مرکز مختصات یې $(8,-6)$ او د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیریږي.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-8)^2+(y+6)^2=100 \qquad \begin{cases} 8^2+(-6)^2=r^2 \\ 64+36=r^2 \\ 100=r^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-16x+12y=0$$

2- لومړی وښایاست چې لاندې راکړل شوي معادلې د دایرو معادلې دي او بیا د هرې دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

a) $x^2+y^2+12x-10y=0$ b) $5x^2+5y^2+14x+12y=0$

c) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$ d) $3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$

e) $a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

د a حل: د دایرې په عمومي معادله $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ کې $A=B$ دی؛ نو دا معادله د دایرې معادله ده.

$-2h=12 \Rightarrow h=-6$

$-2k=-10 \Rightarrow k=5$

نو مرکز یې د $(-6,5)$ نقطه او د شعاع اوږدوالی یې:

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{36+25-0}=\sqrt{61}$$

د b حل:

$$5x^2+5y^2+14x+12y=0$$

څرنګه چې A=B دی، نو دا معادله د دایرې معادله ده.

دواړو خواوې په 5 وېشو:

$$x^2+y^2+\frac{14}{5}x+\frac{12}{5}y=0$$

$$x^2+\frac{14}{5}x+y^2+\frac{12}{5}y=0$$

$$x^2+\frac{14}{5}x+(\frac{7}{5})^2+y^2+\frac{12}{5}y+(\frac{6}{5})^2=(\frac{7}{5})^2+(\frac{6}{5})^2$$

$$(x+\frac{7}{5})^2+(y+\frac{6}{5})^2=\frac{17}{5}$$

نو: $C(-\frac{7}{5},-\frac{6}{5})$ او $r=\sqrt{\frac{17}{5}}$

د c حل: څرنګه چې $A=B$ دی؛ نو دا معادله هم د دایرې معادله ده.

$$-2h=-6\Rightarrow h=3$$

$$-2k=4\Rightarrow k=-2$$

نو مرکز یې د $(3,2)$ نقطه او د شعاع اوږدوالی یې:

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{9+4-13}=0$$

د d حل: $A=B=3$ دی؛ نو دا معادله د دایرې معادله ده او دواړه خواوې پر 3 وېشو:

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{1}{3}=0$$

$$-2h=-\frac{2}{3}\Rightarrow h=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \qquad -2k=\frac{4}{3}\Rightarrow k=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

نو مرکز یې د $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ نقطه او د شعاع اوږدوالی یې:

$$r=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{3})^2-(-\frac{1}{3})}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4+1+3}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

نو د دایرې معادله $(x-\frac{1}{3})^2+[y-(-\frac{2}{3})]^2=(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2$ دي.

د e حل: څرنګه چې $A=B=a$ دی؛ نو دا هم د دایرې معادله ده او دواړو خواوې پر a باندې وېشو:

$$x^2+y^2+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a}=0$$

$$-2h=\frac{2g}{a}\Rightarrow h=-\frac{g}{a} \qquad -2k=\frac{2f}{a}\Rightarrow k=-\frac{f}{a}$$

نو مرکزې یې د $(-\frac{g}{a},-\frac{f}{a})$ نقطه او د شعاع اوږدوالی یې:

$$r=\sqrt{(-\frac{g}{a})^2+(-\frac{f}{a})^2-\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}}=\frac{\sqrt{g^2+f^2-ac}}{a}$$

یا:

$$x^2+2(x)(\frac{g}{a})+y^2+2(y)(\frac{f}{g})=\frac{-c}{a}$$

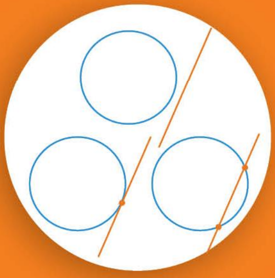
دواړو خواو سره $\frac{f^2}{a^2}$ او $\frac{g^2}{a^2}$ جمع کوو:

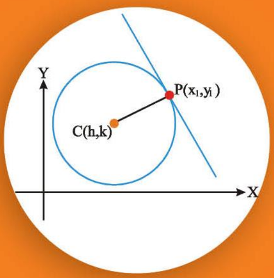
$$x^2+\frac{2gx}{a}+\frac{g^2}{a^2}+y^2+\frac{f^2}{a^4}+\frac{2fy}{a}=\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}$$

$$(x+\frac{g}{a})^2+(y+\frac{f}{a})^2=\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}$$

$$\left[x-(\frac{-g}{a})^2\right]+\left[y-(\frac{-f}{a})\right]^2=\frac{\sqrt{g^2+f^2-ac}}{a}$$

$$\begin{cases} C(-\frac{g}{a},-\frac{f}{a}) \\ r=\frac{\sqrt{g^2+f^2-ac}}{a} \end{cases}$$





د یوه مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره
د درسي کتاب (343)مخ
د لوست وخت(2 درسي ساعتونه)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • په دې وپوهېږي چې څه وخت يو مستقيم خط يوه دايره په دوو نقطو يا يوه نقطه کې قطع کوي او يا يې هېڅ نه قطع کوي. • د مماس د معادلې او د مماس د اوږدوالي پيدا کول زده کړي. • له دايرې سره د مستقيم خط د تقاطع د نقطو وضعيه کميات پيدا کړای شي. • له دايرې سره د مستقيم خط د تماس د نقطې وضعيه کميات پيدا کړای شي. • د مماس معادله او د مماس اوږدوالی پيدا کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې تر يو ګټه واخيستلای شي ا و اهميت يې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته له زده کوونکو د ورودي برخې پوښتنه وکړئ چې ځواب يې دا دی: دا مستقيم خط دايره د $(0,5)$ او $(-\frac{24}{5},\frac{7}{5})$ په نقطو کې قطع کوي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

له دې وروسته چې څه وخت يو مستقيم خط يوه دايره په دوو نقطو يا يوه نقطه او يا په هيڅ نقطه کې نه قطع کوي، توضيح شي، لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ. د (344) مخ فعاليت دې زده کوونکي حل کړي چې ځواب يې دا دی:

د $x-y+1=0$ مستقيم خط د $x^2+y^2-5=0$ دايره د $(-1,0)$ او $(2,3)$ په نقطو کې قطع کوي.

له دې وروسته چې د مماس د معادلې پيداکول، توضيح شي د (346) مخ لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ. په داسې حال کې چې د (347) مخ د شکل چارت موجود وي او يا د شکل له مخې چې پر تخته رسم شوي وي، د مماس د اوږدوالی پيداکول، توضيح کړئ او د دريم مثال حل کړئ او ددې مخ فعاليت دې زده کوونکي حل کړي چې ځواب يې په لاندې ډول دی:

$$PT=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}=\sqrt{(-2-3)^2+(2+4)^2-25}=\sqrt{36}=6$$

يا:
$$PT=\sqrt{x^2+y^2-6x+8y}=\sqrt{(-2)^2+2^2-6(-2)+8(2)}=\sqrt{4+4+12+16}=\sqrt{36}=6$$

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

د لومړۍ پوښتنې يوه برخه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د ارزونې لپاره درېمه پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- د یومستقیم خط د تقاطع نقطې له یوې دایرې سره:

د $y = mx + c$ د مستقیم خط د تقاطع د نقطو پیداکولو لپاره د $x^2 + y^2 = a^2$ له دایرې سره لرو چې:

$y = mx + c$……………….I $\qquad$ $x^2 + y^2 = a^2$…………….II

د I معادلې څخه د y په II معادله کې وضع کوو:

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$$
$$x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0 \ldots\ldots III$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (2mc)^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - a^2) = a^2(1 + m^2) - c^2$$

a) که $a^2(1 + m^2) - c^2 > 0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي.

b) که $a^2(1 + m^2) - c^2 = 0$ وي، مستقیم خط دایره په یوه نقطو کې قطع کوي.

c) که $a^2(1 + m^2) - c^2 < 0$ وي، مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

2- په یوه دایره باندې د مستقیم خط د مماس کیدو شرط عبارت دی له:

$a^2(1 + m^2) - c^2 = 0 \qquad c = \pm a\sqrt{1 + m^2}$

څرنگه چې $y = mx + c$ ده، نو د $y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$ مستقیم خط د m په ټولو قیمتونو د $x^2 + y^2 = a^2$ له دایرې سره مماس دی که د $A(x_1, y_1)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 = a^2$ پر دایره دوه مماسونه رسم شي، څرنگه چې د یو مماس معادله $y_1 = mx_1 + a\sqrt{1 + m^2}$ ده، نو:

$$(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1 + m^2)$$
$$m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + y_1^2 - a^2 = 0$$

څرنگه چې دا معادله د m له جنسه دویمه درجه معادله ده چې د m د دوو قیمتونو لپاره د $A(x_1, y_1)$ له نقطې څخه د دوو مماسونو معادلې په لاس راځي، حقیقي والې او موهومي والې یې په پورتنۍ معادلې پورې اړه لري.

مثال: د (2,3) له نقطې څخه د $x^2 + y^2 = 9$ پر دایره د دوو مماسونو معادلې دي له:

$$y = mx + 3\sqrt{1 + m^2}$$

څرنگه چې د (2,3) له نقطې څخه تیریږي $3 = 2m + 3\sqrt{1 + m^2}$

$$\Rightarrow (3 - 2m)^2 = 9(1 + m^2) \Rightarrow m = 0, \frac{-12}{5}$$

که m=0 وي لرو چې:

$$y = 0 \cdot x + 3\sqrt{1 + 0} \Rightarrow y = 3$$

او که $m = \frac{-12}{5}$ وي لرو چې:

$$y=\frac{-12}{5}x+3\sqrt{1+\frac{144}{25}}\Rightarrow 5y+12x-39=0$$

مثال: د $x^2+y^2=9$ پر دایره د دوو مماسونو معادلې په داسې حالت کې چې مماسونه د $3x+4y=7$ له مستقیم خط سره موازي وي، عبارت دي له:

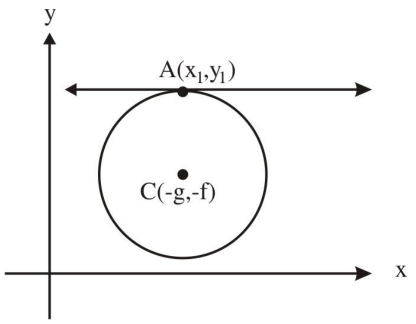
کوم مستقیم خط چې د $3x+4y=7$ خط سره موازي وي، نو $3x+4y+k=0$ به يې معادله وي که د $3x+4y+k=0$ مستقیم خط له دایرې سره مماس وي، نو د دایرې له مرکز څخه ددې مستقیم خط عمودي فاصله د دایرې د شعاع اوږدوالی دی نو:

$$r=\frac{0+0+k}{\pm\sqrt{9+16}}=\pm\frac{k}{5}$$

نو $3=\pm\frac{k}{5}$ دی او په نتیجه کې $k=\pm15$ دی، نو د دواړو مماسونو معادلې عبارت دي له:

$$3x+4y+15=0$$
$$3x+4y=15$$

3- د هغه مماس د معادلې پیداکول چې په یوه راکړل شوي نقطه کې پر دایره باندې مماس وي:



که د تماس نقطه $A(x_1,y_1)$ وي او د دایرې معادله چې مستقیم خط ورسره مماس دی عبارت له:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

وي او د دایرې شعاع

$$\overline{CA}=\sqrt{g^2+f^2-c}$$

وي چې $\overline{CA}$ د A په نقطه کې پر مماس عمود ده.

د $\overline{CA}$ د خط میل عبارت دی له:

$$m=\frac{y_1+f}{x_1+g}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots I$$

نو د مماس میل عبارت دی له $(-\frac{1}{m}=-\frac{x_1+g}{y_1+f})$ ، نو دا قیمت د مستقیم خط په معادله $y-y_1=m(x-x_1)$ کې وضع کوو، نو د مماس معادله عبارت ده له:

$$y-y_1=-\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots II$$

د II معادلې له ساده کولو څخه لرو چې:

$(y-y_1)(y_1+f)+(x-x_1)(x_1+g)=0$

$yy_1+fy-y_1^2-fy_1+xx_1+gx-x_1^2-gx_1=0$

داوړو خواو ته $2gx_1$ او $2fy_1$ جمع کوو.

$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1$..........III

څرنگه چې دایره د $A(x_1,y_1)$ له نقطې څخه تیریږي، نو لرو چې:

$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$

$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1=-c$

له III معادلې څخه لرو چې: $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

په لنډ ډول: د $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ معادله په لاندې ډول لیکلای شو:

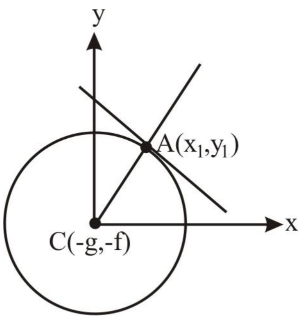
$x\cdot x+y\cdot y+g(x+x)+f(y+y)+c=0$

د x پر ځای x_1 او د y پر ځای y_1 ولیکئ. $x\cdot x_1+y\cdot y_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي $(g=f=0)$ نو د مماس معادله عبارت ده له:

$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

4- د هغه مستقیم خط د معادلې پیدا کول چې د $A(x_1,y_1)$ په نقطه کې د $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ پر دایره عمودي وي.



د CA د خط میل مساوي دی په:

$m_{CA}=\frac{y_1+f}{x_1+g}$

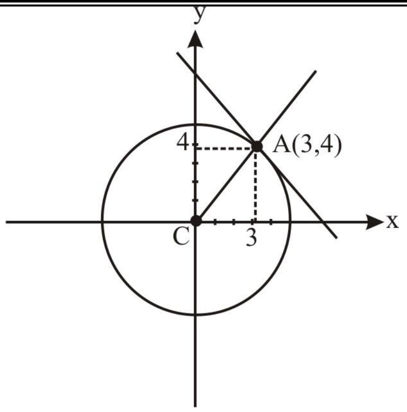
نو د $A(x_1,y_1)$ په نقطه باندې د عمود خط معادله عبارت ده له:

$y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1)$

او که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي. $(g=f=0)$

$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$

مثال: د (3,4) له نقطې څخه د $x^2+y^2=25$ پر دایرې باندې د عمود او مماس خطونو معادلې عبارت دي له:



د CA د خط میل $m=\frac{4}{3}$ دی نو $A(3,4)$ په نقطه کې د عمود خط معادله د عبارت ده له:

$y-4=\frac{4}{3}(x-3)\Rightarrow 4x-3y=0$

د $A(3,4)$ په نقطه کې د مماس خط میل $-\frac{1}{m}=-\frac{3}{4}$ دی. نو د مماس معادله $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$ او یا $3x+4y=25$ ده او یا د مماس د معادلې د پیداکولو لپاره د دایرې معادله $x^2+y^2=25$ د $x\cdot x+y\cdot y=25$ په شکل لیکو او 3 او 4 په کې وضع کوو، لرو چې:

$x\cdot x+y\cdot y=25\Rightarrow 3x+4y=25$

5- د $ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0$ د دایرې په عمومي معادله کې څلور ثابت (a,g,f,c) دي که دا معادله پر a وویشو نو درې ثابت $\frac{g}{a},\frac{f}{a},\frac{c}{a}$ په لاس راځي . ددې درېو ثابتو د محاسبه کولو او د دایرې د موقعیت د ټاکلو لپاره لږ تر لږه درېو اړیکو ته اړتیا شته دی، دا درې اړیکې د لاندې حالتونو څخه په یو حالت کې ښایې راکړل شوي وي:

a) درې نقطې چې د دایرې پر محیط واقع وي.

b) د دایرې د محیط دوه نقطې او پر راکړل شوي مستقیم خط باندې د دایرې مرکز واقع وي.

c) پر دایره باندې د مماس معادله او یوه نقطه چې دایره ترې تیرېږي او د دایرې مرکز په راکړل شوي مستقیم خط واقع وي.

d) د دایرې شعاع او له دایرې سره د مماس خط د تماس نقطه راکړل شوي وي.

6- د هغه دایرې معادله چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه تیرېږي او د $(4,3)$ په نقطه کې د $3x+4y-24=0$ پر مستقیم خط باندې مماس وي، عبارت ده له:

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$……………………I

څرنګه چې د $(-2,-5)$ او $(4,3)$ نقطې د دایرې پر محیط باندې پرتې دي، نو لرو چې:

$-4g-10f+c+29=0$……………………II

$8g+6f+c+25=0$……………………III

څرنګه چې د $3x+4y-24=0$ مستقیم خط د $(4,3)$ په نقطه کې له دایرې سره مماس دی، د هغه مستقیم خط معادله چې د $(4,3)$ له نقطې څخه تیرېږي او د $3x+4y-24=0$ پر مستقیم خط باندې عمود وي، عبارت ده له:

$y-3=\frac{4}{3}(x-4)$ یا $4x-3y-7=0$

دا مستقیم خط چې د (4,3) له نقطې تیریږي او پر دایره چې مرکزي یې $(-g,-f)$ او معادله یې $x^2+y^2+2gx+2fg+c=0$ ده، عمود دی، نو:

$$-4g+3f-7=0\text{..................}V$$

له II معادلې څخه III معادله تفریقوو، نو لرو چې:

$$-12g-16f+4=0$$
$$3g+4f-1=0\text{..................VI}$$

د (V) او (VI) معادلې له حلولو څخه لرو چې: $f=1$ او $g=-1$

که د f او g قیمتونه په III معادله کې وضع شي لرو چې: $(c=-23)$ نو، په نتیجه کې د غوښتل شوي دایرې معادله عبارت ده له: $x^2+y^2-2x+2y-23=0$

7- په لاندې ډول ښودل کیږي چې د

$$x^2+y^2-6x-6y+10=0\text{...............}I$$

او

$$x^2+y^2=2\text{.................II}$$

دایرې سره متقاطع دي او د تقاطع د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

که II معادله له I معادلې څخه تفریق شي، نو $-6x-6y+12=0$ کیږي.

$$x+y-2=0\Rightarrow x=2-y\text{.................III}$$

د x دا قیمت په II معادله کې وضع کوو:

$$(2-y)^2+y^2-2=0\Rightarrow 4-4y+y^2+y^2-2=0$$
$$2y^2-4y+2=0\Rightarrow y^2-2y+1=0$$
$$(y-1)^2=0\Rightarrow y=1$$

د y قیمت په III معادله کې وضع کوو په نتیجه کې $x=1$ کیږي د تماس د نقطې وضعیه کمیات $(1،1)$ دي.

8- د a قیمت په داسې حال کې چې د $x-2y=6$ مستقیم خط د $x^2+y^2-2ax-4=0$ له دایرې سره مماس وي عبارت دی له:

د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x=2y+6$

$$(2y+6)^2+y^2-2a(2y+6)-4=0\Rightarrow 4y^2+24y+36+y^2-4ay-12a-4=0$$
$$5y^2+(24-4a)y+(32-12a)=0$$

څرنګه چې مستقیم خط له دایرې سره مماس دي، نو $\Delta=0$ ده.

$$b^2-4ac=(24-4a)^2-4(5)(32-12a)=0$$
$$16a^2+48a-64=0$$
$$a^2+3a-4=0$$
$$(a+4)(a-1)=0\Rightarrow a=-4 \quad a=1$$

9- د O_1 او O_2 په مرکزونو دوې دایرې چې د A او B په نقطو کې سره متقاطع دي، که د O_1 د دایرې معادله:

$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+d_1=0$$

او د O_2 د دایرې معادله $x^2+y^2+a_2x+b_2y+d_2=0$ وي،څرنگه چې د A او B نقطې د دواړو دایرو پر محیط باندې واقع دي، نو د A او B د نقطو وضعیه کمیات د معادلو په لاندې سیستم کې باید صدق وکړي.

$x^2+y^2+a_1x+b_1y+d_1=0$

$x^2+y^2+a_2x+b_2y+d_2=0$

او په نتیجه کې د

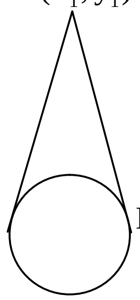
$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+d_1-d_2=0$

په معادله کې هم باید صدق وکړي، نو دا معادله د دواړو دایرو د مشترک وتر معادله ده او هم د A او B له نقطو څخه همدا یو مستقیم خط تیریږي.

د مثال په ډول: د $x^2+y^2-4x-6y-14=0$ او $x^2+y^2+6x+8y=0$ دایرو د مشترک وتر معادله عبارت ده له: $[6-(-4)]x+[8-(-6)]y+0-(-14)=0$

له ساده کولو څخه وروسته لرو چې: $5x+7y+7=0$ د دواړو دایرو د مشترک وتر معادله ده.

10- که د دایرې له کومې خارجي نقطې څخه پر دایره دوه مماسونه رسم شي د دواړو مماسونو اوږدوالی سره مساوي دی او له $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$ څخه عبارت دی.



11- د هغو دایرو معادلې پیداکړئ چې مرکز یې $c_1(4,-7)$ او د $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ دایره ورسره داخلاً او خارجاً مماس وي.

$c_1(4,-7)$

حل: د راکړل شوي دایرې مرکز $c_2(-2,1)$ دي.

$|C_1C_2|=r_1+r_2=\sqrt{(4+2)^2+(-7,-1)^2}=10$

څرنگه چې د راکړل شوي دایرې په معادله کې $f=1, g=-2$ او $c=1$ دي، نو د راکړل شوي دایرې شعاع مساوي ده په:

$r_2=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{(-2)^2+(1)^2-1}=2$

$r_1=10-r_2=10-2=8$

r_1 د هغه دایرې شعاع چې راکړل شوي دایره ورسره خارجاً مماس ده او معادله یې عبارت ده له:

$(x-4)^2+(y+7)^2=(8)^2$

$x^2+y^2-8x+14y+1=0$

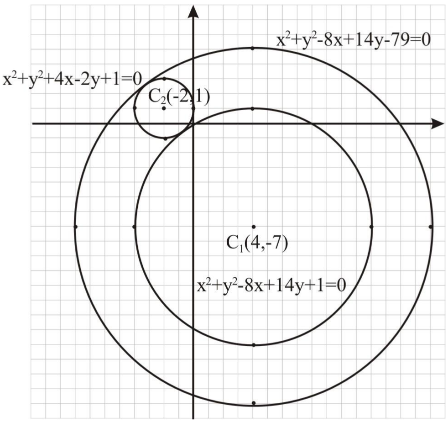
د هغه دایرې شعاع چې راکړل شوي دایره ورسره داخلاً مماس ده عبارت ده له:

شعاع $=r_1+2r_2=8+2(2)=12$

چې ددې دایرې معادله عبارت ده له:

$(x-4)^2+(y+7)^2=(12)^2$

$x^2+y^2-8x+14y-79=0$



د پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې مستقيمو خطونو حالتونه له دايرو سره چې معادلې يې په لاندې ډول راکړل شوي دي وڅيړئ.

	د دايرو معادلې	د مستقيمو خطونو معادلې
$a)$	$x^2+y^2-4x-y-3=0$	$3x-2y+3=0$
$b)$	$2(x^2+y^2)-3x+2y-6=0$	$x-y-1=0$
$c)$	$x^2+y^2+x-9y+14=0$	$5x-y=11$

د a حل: د y قيمت د مستقيم خط له معادلې څخه په لاس راوړو:

$$-2y=-3x-3 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$$

د y قيمت د دايرې په معادله کې وضع کوو:

$$x^2+(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2})^2-4x-(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2})-3=0 \qquad x^2+\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{9}{4}-4x-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}-3=0$$

$$13x^2-4x-9=0$$

$$x=\frac{4\pm 22}{26} \Rightarrow x_1=1 \quad , \quad x_2=-\frac{9}{13}$$

$$x_1=1 \Rightarrow y_1=3 \quad , \quad x_2=-\frac{9}{13} \Rightarrow y_2=\frac{6}{13}$$

نو دا مستقيم خط د $(1,3)$ او $(-\frac{9}{13},\frac{6}{13})$ په نقطوکې دا دايره قطع کوي.

د b جز حل: $x-y-1=0 \Rightarrow -y=-x+1 \Rightarrow y=x-1$

د y قيمت د دايرې په معادله کې وضع کوو:

$$2[x^2+(x-1)^2]-3x+2(x-1)-6=0$$

$$2x^2+2x^2-4x+2-3x+2x-2-6=0$$

$$4x^2-5x-6=0$$

$$\Delta=25-4\cdot4(-6)=25+96=121$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{121}}{8} = \frac{5+11}{8} = \frac{16}{8} = 2 \qquad x_2 = \frac{5-11}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$y = 1 \qquad y = \frac{-3}{9} - 1 = -\frac{7}{4}$$

نو د تقاطع نقطې $(2,1)$ او $(\frac{-3}{4}, \frac{-7}{4})$ دی.

د c حل: $y=5x-11$ کېږي که د y قیمت د دایرې په معادله کې وضع کړو لرو چې:

$$x^2 + (5x-11)^2 + x - 9(5x-11) + 14 = 0$$

$$x^2 + 25x^2 - 110x + 121 + x - 45x + 99 + 14 = 0$$

$$26x^2 - 156x + 243 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad , \quad y = 4$$

دا مستقیم خط د $(3,4)$ په نقطه کې له دایرې سره مماس دي.

2- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(2,-3)$ په نقطه کې د $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ له دایرې سره مماس وي.

حل:

$$-2h = -2 \Rightarrow h = 1$$

$$-2k = 4 \Rightarrow k = -2$$

څرنګه چې د دایرې مرکز د $(1,-2)$ نقطه ده او د $(2,-3)$ نقطه د دایرې پر محیط واقع ده، نو د $(1,-2)$ او $(2,-3)$ نقطې د شعاع د انجامونو نقطې دي چې معادله یې:

$$y + 2 = \frac{-3+2}{2-1}(x-1) \Rightarrow y + 1 = -(x-1) \qquad y = -x - 1$$

اوس د هغه مستقیم خط معادله په لاس راړوو چې د $(2,-3)$ له نقطې څخه تیرېږي او میل یې m_1 وي.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_1(-1) = -1 \Rightarrow m_1 = 1$$

نو د هغه مستقیم خط معادله چې د $(2,-3)$ په نقطه کې له دایرې سره مماس وي عبارت ده له:

$$y + 3 = 1(x-2)$$

$$y = x - 5$$

په دویمه طریقه:

$$-g = 1 \Rightarrow g = -1$$

$$-f = -2 \Rightarrow f = 2$$

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

څرنګه چې $x_1 = 2$ او $y_1 = -3$ دي.

$$2x - 3y - (x+2) + 2(y-3) + 3 = 0$$

$$x - y - 5 = 0 \qquad y = x - 5$$

3- د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دایره مماس رسم شوي وي.

حل: د معادلې دواړو خواوې په 5 وېشو لرو چې:

$$x^2+y^2-2x+3y-\frac{131}{5}=0$$

$$=\sqrt{(-5)^2+(4)^2-2(-5)+3(4)-\frac{131}{5}}=\sqrt{25+16-10+12-\frac{131}{5}}=\sqrt{43-\frac{131}{5}}$$

$$=\sqrt{\frac{215-131}{5}}=\sqrt{\frac{184}{5}}$$

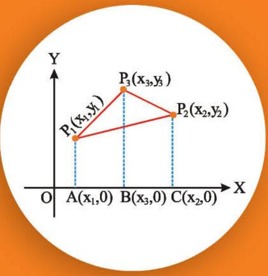
4- د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه د $x^2+y^2+8x-5y=7$ پر دایره مماس رسم شوي وي.

حل:

د مماس اوږدوالی $=\sqrt{(x^2+y^2)+8x-5y-7}$

$$=\sqrt{(-2^2)+(-5^2)+8(-2)-5(-5)-7}=\sqrt{4+25-16+25-7}$$

$$=\sqrt{54-23}=\sqrt{31}$$



د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي

د درسي کتاب (349) مخ   د تدریس وخت(1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • د هغه مثلث د مساحت د پیداکولو طریقه زده کړي چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي. • د مثلث د راسونو د وضعیه کمیاتو له مخې د مثلث مساحت پیداکړای شي. • د هندسي مسایلو په حلولو کې ورځخه ګټه واخیستلای شي او په اهمیت یې پوه شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ او محترم ښوونکي دې مرسته ورسره وکړي چې ځواب یې په لاندې ډول دی: $(-3,6)=(x_1y_1)$ $(3,2)=(x_2y_2)$ $(6,0)=(x_3y_3)$ $A=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ $=\frac{1}{2}[-3(2-0)+3(0-6)+6(6-2)]=0$ نو دا درې نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

له دې وروسته چې د مثلث راسونو د وضعیه کمیاتو له مخې د مثلث د مساحت فورمول توضیح شو. ددې مخ مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

ددې لوست لومړۍ پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

دویمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• ددې لوست مثال په دې ډول هم حلولای شو:

$$|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

$$|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & -5 & 1\\ 5 & -6 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$R_2 - R_1$ او $R_3 - R_1$

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 6 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[1(6-1)]=\frac{5}{2}=2,5$$

- که د يو مثلث راسونه $(a,b-c),(a,b+c)$ او $(-a,c)$ وي، ددې مثلث مساحت مساوي دی په:

$$|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & b+c & 1\\ a & b-c & 1\\ -a & c & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & b+c & 1\\ 0 & -2c & 0\\ -a & c & 1\end{vmatrix}\quad (R_2-R_1)$$

د دويم سطر له مخې انکشاف ورکړل شوي دی: $=\frac{1}{2}[-2c(a+a)]=-2ac \Rightarrow A=2ac$

1- د مثلث د درېو راسونو د وضعيه کمياتو له مخې لاندې فورمول د مثلث د مساحت د پيداکولو لپاره په لاس راوړل شوي دی؛ $A=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$

د محترم ښوونکي د اضافي معلوماتو لپاره د مثلث مساحت د ډيټرمينانت (determinant) په واسطه هم پيداکولای شو.

که $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ او (x_3,y_3) د مثلث درې راسونه وي:

$$|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

که د لومړی ستون په واسطه د A ډيټرمينانټ قيمت په لاس راوړو:

$$|A|=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

په لاس راځي.

په شکل کې P_3,P_2,P_1 د ساعت د عقربې مخالف (Counter clockwise) په نظر کې نيول شوي دي که نقطې د ساعت د عقربې په جهت (Clockwise) په نظر کې ونيول شي، امکان لري چې د مثلث د مساحت عددي قيمت منفي په لاس راشي، نو د منفي علامه په نظر کې نه نيول کيږي يا په بل عبارت مطلقه قيمت يې په نظر کې نيول کيږي.

2- که د ډيټرمينانټ قيمت صفر شي په دې معنا چې د P_3,P_2,P_1 نقطې د يو مستقيم خط پر مخ واقع دي.

3- د هغه مثلثونو مساحت چې د B,A او C راسونه يې په لاندې ډول راکړل شوي دي مساوي دی په:

$A(0,0)=(x_1,y_1)$ $B(2,4)=(x_2,y_2)$ $C(-2,2)=(x_3,y_3)$

$A(-1,-2)=(x_1,y_1)$ $B(2,5)=(x_2,y_2)$ $C(5,2)=(x_3,y_3)$

د لومړی مثلث مساحت:

$$|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[0-0+1(4+8)]=6$$ د لومړی سطر په واسطه:

د دویم مثلث مساحت:

د لومړی سطر په واسطه: $|A| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[-1(5-2) + 2(2-5) + 1(4-25)] = -15$

نو د مثلث مساحت د سطحې 15 واحده دی.

4- د هغه مثلث مساحت چې د راسونو وضعیه کمیات یې A(5,3) ، B(−2,2) او C(4,2) وي، د سطحې 3 واحده دي.

د هغه مثلث مساحت چې د راسونو وضعیه کمیات یې A(2,3) ، B(−1,1) او C(4,−5) وي، د سطحې 14 واحده دي.

د پوښتنو ځوابونه:

1. د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(\underset{}{\overset{x_1}{0}},\overset{y_1}{0})$, $B(\overset{x_2}{8},\overset{y_2}{6})$ او $C(\underset{x_3}{12},\underset{y_3}{4})$ وي:

حل:

مساحت $$\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0(6-4) + 8(4-0) + 12(0-6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[32 - 72\right] = 16 - 36 = |-20| = 20$$

2. که د یوه مثلث راسونه $A(4,0)$, $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړې.

حل:

د مثلث مساحت $$\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[4(0-3) + (-4)(3-0) + 0(0-0)] = \frac{1}{2}[-12 - 12] = |12| = 12$$

3. د هغه څلور ضلعي مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې A(1,0), B(6,2), C(8,6) او D(2,4) وي.

حل: که د څلور ضلعي یو قطر رسم کړو د ABC او ACD دوه مثلثونه په لاس راځي چې د څلور ضلعې مساحت ددې دواړو مثلثونو د مساحتونوله مجموعي سره مساوي دی.

لومړی طریقه:

مساحت $$\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}[1(2-6) + 6(6-0) + 8(0-2)] = \frac{1}{2}(-4 + 36 - 16) = 8$$

مساحت $$\overset{\Delta}{ACD} = \frac{1}{2}[1(4-6) + 2(6-0) + 8(0-4)] = \frac{1}{2}[-2 + 12 - 32] = 11$$

په نتیجه کې څلور ضلعې مساحت $8 + 11 = 19$ دی.

دویمه طریقه: د ABC او ACD د مثلثونو د مساحتونو مجموعه د څلور ضلعي له مساحت سره مساوي ده .

د لومړی سطر (R_1) د انکشاف په واسطه:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 6 & 2 & 1\\ 8 & 6 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 8 & 6 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[1(2-6)-0+1(36-16)]+\frac{1}{2}[1(6-4)-0+1(32-12)]$$

$$=\frac{1}{2}(-4+20)+\frac{1}{2}(2+20)=8+11=19$$

د پوښتنو حل:

1. د نقطو د لاندې هر جوړې ترمنځ فاصله پیداکړئ او همدارنګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تیریږي.

$a:\ A(3,1) \qquad B(-2,-4)$

$b:\ A(-8,3) \qquad B(2,-1)$

$c:\ A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3}) \qquad B(-3\sqrt{5},5)$

د a جز حل:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

د AB د مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+(-2)}{2}=\frac{1}{2}$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1+(-4)}{2}=-\frac{3}{2}$$

نو د AB د مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$

حل جز b:

$$\overline{AB}=\sqrt{[2-(-8)]^2+(-1-3)^2}=\sqrt{100+16}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$$

د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-8+2}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{3-1}{2}=1 \qquad \Rightarrow (-3,1)$$

د c جز حل:

$$AB=\sqrt{[-3\sqrt{5}-(-\sqrt{5})]^2+[5-(-\frac{1}{3})]^2}=(\sqrt{5}-3\sqrt{5})^2+(5+\frac{1}{3})^2=20+\frac{256}{9}=\sqrt{\frac{436}{9}}=\frac{2\sqrt{109}}{3}$$

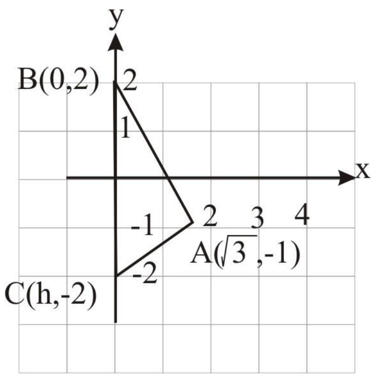
د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات:

$$x=\frac{-\sqrt{5}-3\sqrt{5}}{2}=-\frac{4\sqrt{5}}{2}=-2\sqrt{5}$$
$$y=\frac{-\frac{1}{3}+5}{2}=\frac{\frac{14}{3}}{2}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3} \qquad (-2\sqrt{5},\frac{7}{3})$$

2. که $A(\sqrt{3},-1)$، $B(0,2)$ و $C(h,-2)$ د یوه قایمه زاویه مثلث راسونه وي او د $\hat{A}=90^\circ$ وي د h قیمت پیداکړئ.

حل: څرنګه چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قایم الزاویه دی نو د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$
$$AC^2 = (h-\sqrt{3})^2 + (-2+1)^2$$
$$AC^2 = h^2 - 2\sqrt{3}\cdot h + 3 + 1$$
$$AC^2 = h^2 - 2\sqrt{3}h + 4$$
$$AB^2 = (\sqrt{3}-0)^2 + (-1-2)^2 = 3 + 9 = 12$$
$$BC^2 = (h-0)^2 + (-2-2)^2 = h^2 + 16$$
$$h^2 + 16 = h^2 - 2\sqrt{3}h + 4 + 12 \Rightarrow -2\sqrt{3}h = 0 \Rightarrow h = 0$$



3. د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ په داسې حال کې چې هغه مستقیم خط چې د $A(1,4)$ و $B(5,6)$ له نقطو څخه تیریږي د $\frac{AP}{PB} = 2$ په نسبت وویشي.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{r+1} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$
$$x = \frac{1 + 2\cdot 5}{2+1} = \frac{11}{3} \qquad y = \frac{4 + 2(6)}{2+1} = \frac{16}{3}$$

د P د نقطې وضعیه کمیات $P(\frac{11}{3},\frac{16}{3})$ دي.

4. د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د y محور په 3 کې قطع کړي.

حل:

$$y = mx + b$$
$$y = -2x + 3$$

5. د $x = \sqrt{7}$ او $y = -\sqrt{7}$ مستقیمو خطونو میل پیدا کړئ.

حل: د $x = \sqrt{7}$ د مستقیم خط میل تعریف شوې نه دي او د $y = -\sqrt{7}$ مستقیم خط میل صفر دی.

6. د y د محور میل مساوي دي په:

$a)\,-1 \quad b)\,1 \quad c)\,0 \quad d)$ تعریف شوي نه دی

حل: د d جز سم دی.

7. د یوه مستقیم خط میل $m = \frac{2}{3}$ دي، د هغه مستقیم خط میل چې پردې خط عمودي وي مساوي دی په:

$a)\,\frac{2}{3} \qquad b)\,-\frac{2}{3} \qquad c)\,\frac{3}{2} \qquad d)\,-\frac{3}{2}$

حل: څرنگه چې د عمودوالی شرط $m_1 \cdot m_2 = -1$ دی؛ نو:

$$\frac{2}{3}\cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -1\cdot\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

د d جز سم دی.

8. د هغو مستقیمو خطونو میل پیدا کړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تیریږي.

$a).(-2,4)\ ,\ (5,11) \qquad b).(3,-2)\ ,\ (2,7) \qquad c).(4,6)\ ,\ (4,8)$

د a جز حل:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{11-4}{5-(-2)}=\frac{7}{7}=1$$

د b جز حل:

$$m=\frac{7-(-2)}{2-3}=\frac{7+2}{-1}=\frac{9}{-1}=-9$$

د c جز حل:

$$m=\frac{8-6}{4-4}=\frac{2}{0}\ \text{(تعریف نشده)}$$

9. د $4x-y+2=0$ او $12x-3y+1=0$ مستقیم خطونه سره:

a) موازي دي　　b) عمود دي.　　c) نه عمود او نه موازي دي.

حل:

$$4x-y+2=0\Rightarrow -y=-4x-2\Rightarrow y=4x+2$$

$$12x-3y+1=0\Rightarrow -3y=-12x-1\Rightarrow y=4x+\frac{1}{3}$$

څرنګه چې $m_1=m_2$ ، نو دا مستقیم خطونه سره موازي دي.

د a جز سم دی.

10. د $3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې میلونه سره مساوي دي، نو سره موازي دي، اوس د یو مستقیم خط یوه نقطه پیدا کوو.

$$x=0\Rightarrow y=\frac{3}{4}$$

نو $(0,\frac{3}{4})$ د لومړی مستقیم خط یوه نقطه ده چې له دویم مستقیم خط څخه یې فاصله عبارت ده له:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|3(0)+(-4)(\frac{3}{4})+7\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{4}{\sqrt{9+16}}=\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}\ \text{(د اوږدولی واحد)}$$

11. د مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-4,7)$ له نقطې څخه تیر شي او $2x-7y+4=0$ له مستقیم خط سره موازي وي.

حل:

$$2x-7y+4=0$$
$$-7y=-2x-4$$
$$\Rightarrow 7y=2x+4$$
$$\Rightarrow y=\frac{2}{7}x+\frac{4}{7}$$
$$y-7=\frac{2}{7}(x+4)$$
$$7y-49=2x+8$$
$$-2x+7y-57=0$$
$$2x-7y+57=0$$

12. د $P(6,-1)$ د نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

حل:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d=\frac{|6(6)+(-4)(-1)+9|}{\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\frac{36+4+9}{\sqrt{36+16}}=\frac{49}{\sqrt{52}}$$

13. د P د نقطې وضعیه کمیاتو په داسې حال کې پیدا کړئ چې د $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1(2,-5)$ او $P_2(6,3)$ له نقطو څخه تیریږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت وویشي.

حل:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{2+\frac{3}{4}\cdot 6}{1+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{13}{2}}{\frac{7}{4}}=\frac{13}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{26}{7}$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{-5+\frac{3}{4}\cdot 3}{\frac{7}{4}}=\frac{\frac{-20+9}{4}}{\frac{7}{4}}=\frac{-11}{4}\cdot\frac{4}{7}=\frac{-11}{7}$$

$$P(x,y)=(\frac{26}{7},\frac{-11}{7})$$

14. د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$a).\ 2x+5y-2=0$ $\qquad$ $b).\ 2y-6x+4=0$ $\qquad$ $c).\ 2x-3y+6=0$

د a جز حل: د معادلې دواړه خوا وې پر $\pm\sqrt{29}=\sqrt{2^2+5^2}$ ویشو، ددې لپاره چې د مساوات د ښې خوا علامه مثبته وي، نو د $\sqrt{29}$ په پام کې نیسو لرو چې:

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x+\frac{5}{\sqrt{29}}y-\frac{2}{\sqrt{29}}=0 \quad \text{او یا} \quad \frac{2x+5y-2}{\sqrt{29}}=0$$

څرنګه چې $\sin\theta$ او $\cos\theta$ دواړه مثبت دي، نو θ په لومړۍ ناحیه کې واقع ده.

د مثلثاتي جدول له مخې هغه زاویه چې $\cos=\frac{2}{\sqrt{29}}$ او $\sin=\frac{5}{\sqrt{29}}$ وي پیدا کوو او په فورمول کې یې وضع کوو.

15. د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تیریږي مساوي دی په:

$a).\ 1$ $\qquad$ $b).\ -1$ $\qquad$ $c).\ 0$ $\qquad$ $d)$ تعریف شوی نه دی

حل:

$$m=\frac{0-0}{-4-4}=\frac{0}{-8}=0$$

د c جز سم دی.

16- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د x د محور له مثبت جهت سره 30° زاویه جوړوي.

حل:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$$

$$x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ - 10 = 0$$

$$x(\frac{\sqrt{3}}{2}) + y(\frac{1}{2}) - 10 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 10 = 0 \Rightarrow \sqrt{3x} + y - 20 = 0$$

17. د هغه مثلث مساحت پیداکړي چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

حل: څرنګه چې لرو:

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{28}{2} = 14 \text{ (د سطحې واحد)}$$

18. د هغه مثلث مساحت چې راسونه یې $A(1,4)$، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوي دی په:

$a).1$ $b).2$ $c).0$ $d).$ هيڅ يو

حل:
$$\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}[1(-3+10) + 2(-10-4) + 3(4+3)]$$

$$= \frac{1}{2}(7 - 28 + 21) = 0$$

د c جز سم دی په دې معنا چې دا درې واړه نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

19. د $x + 2y = 6$ د مستقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 39 = 0$ له دایرې سره پیداکړئ.

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x = -2y + 6$ دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$x = -2y + 6$$

$$(-2y+6)^2 + y^2 - 2(-2y+6) - 2y - 39 = 0$$

$$4y^2 - 24y + 36 + y^2 + 4y - 12 - 2y - 39 = 0$$

$$5y^2 - 22y - 15 = 0$$

$$\Rightarrow y = 5, -\frac{3}{5}$$

نو د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات عبارت دی له: $(\frac{36}{5}, -\frac{3}{5})$ و $(-4,5)$

20. د هغه دایرې معادله پیداکړئ چې د $A(1,1)$ ، $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تیریږي.

حل: څرنګه چې $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ د دایرې عمومي معادله ده، د x او y پر ځای د A ، B او C د نقطو وضعیه کمیات عوض کوو، ځکه چې دا نقطې د دایرې پر محیط واقع دي، درې درې مجهوله معادلې په لاس راځي او همزمان یې حلوو او د a، b او c قیمتونه پیداکوو او د دایرې په عمومي معادله کې یې وضع کوو:

$1+1+a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+2=0 .... (I) \end{cases}$

$4+1+2a-b+c=0 \Rightarrow 2a-b+c+5=0 .... (II)$

$9+4+3a-2b+c \Rightarrow 3a-2b+c+13=0 .... (III)$

$-a+2b-3=0 \quad \Rightarrow \quad b=-5 \Rightarrow -a-10-3=0$

$-a+b-8=0 \qquad\qquad a=-13$

$-13-5+c+2=0 \Rightarrow c=16$

نو د غوښتل شوي دايرې معادله: $x^2+y^2-13x-5y+16=0$ ده

دويمه طريقه:

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 .... I$

$2+2g+2f+c=0 .... II$

$5+4g-2f+c=0 .... III$

$13+6g-4f+c=0 .... IV$

که II معادله له III معادلې تفريق شي، لرو چې:

$3+2g-4f=0 .... V$

معادله III له IV معادلې څخه تفريقوو لرو چې:

$8+2g-2f=0 .... VI$

که V معادله له VI څخه تفريق شي، نو لرو چې:

$5+2f=0 \Rightarrow f=\frac{-5}{2}$

د f قيمت په VI معادله کې وضع کوو:

$8+2g-2(\frac{-5}{2})=0 \Rightarrow g=\frac{-13}{2}$

او د g او f قيمتونه په II معادله کې وضع کوو:

$2+2(\frac{-13}{2})+2(\frac{-5}{2})+c=0 \Rightarrow c=16$

د f,c او g قيمتونه په I معادله کې وضع کوو، نو غوښتل شوي معادله عبارت ده له:

$x^2+y^2-13x-5y+16=0$

21. د هغه دايرې معادله پيدا کړئ چې $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تيريږي او مرکز يې د $4x-3y-3=0$ پر مستقيم خط واقع وي.

حل: که $C(h,k)$ د دايرې مرکز په نومړي مستقيم خط واقع وي:

$4h-3k-3=0 .... I$

او همدارنګه (د دايرې شعاع) $|OA|=|OB|$

$(h-0)^2+(k-1)^2=(h-3)^2+(k+1)^2$

$h^2+k^2-2k+1=h^2+k^2-6h+2k+1$

$-6h+4k+9=0..................II$

اویا

د I او II له حلولو څخه لرو چې:

$$\begin{cases}-6h+4k+9=0\\ \;\;4k-3k-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-18h+12k+27=0\\ \;\;\underline{16h-12k-12=0}\end{cases}$$

$$-2h+15=0$$

$$h=\frac{15}{2}$$

$$-6(\frac{15}{2})+4k+9=0$$

$$-45+4k+9=0\Rightarrow\;4k=36$$

$$k=\frac{36}{4}=9$$

$$r^2=(\frac{15}{2})^2+(9-1)^2=\frac{225}{4}+64=\frac{481}{4}$$

$r^2=\frac{481}{4}\Rightarrow(x-\frac{15}{2})^2=\frac{481}{4}$ ویا $x^2+y^2-15x-18y+17=0$

22- د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 4 وېشو.

$$x^2+y^2-2x+3y-\frac{25}{4}=0$$

$$-2h=-2\quad\Rightarrow h=1$$

$$-2k=3\quad\quad\Rightarrow k=-\frac{3}{2}$$

د دایرې مرکز $(h.k)=(1.-\frac{3}{2})$

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{4+9+25}{4}}=\sqrt{\frac{38}{4}}=\sqrt{\frac{19}{2}}$ د شعاع اوږدوالی

23 – د هغه دایرې معادله پیدا کړئ چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تیرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

حل: که د دایرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو:

$$|CA|=|CB|$$

$$\left|(h-4)^2+(k-1)^2\right|=\left|(h-6)^2+(k-5)^2\right|$$

$$h^2-8h+16+k^2-2k+1=h^2-12h+36+k^2-10k+25$$

$$\Rightarrow 4h+8k-44=0\Rightarrow\begin{cases}h+2k-11=0...I\\ 4h+k-16=0...II\end{cases}$$

$$\begin{cases} h+2k-11=0 \\ _8h \pm 2k_{\mp}32=0 \end{cases}$$

یا $-7h+21 \Rightarrow h=3 \quad \Rightarrow k=-12+16 \Rightarrow k=4$

$$r^2=(h-4)^2+(k-1)=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$

د دایرې معادلې: $10=(X-3)^2+(Y-4)^2$ اویا:

$$x^2-6x+9+y^2-8y+16=10$$
$$x^2+y^2-6x-8y+25=10$$
$$x^2+y^2-6x-8y+15=10$$

24-که د یوه مثلث راسونه $A(5,-6)$, $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي دا مثلث:

a) متساوی الاضلاع دي b) متساوي الساقین دي c) مختلف الاضلاع دي

حل:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3-5)^2+(5+6)^2}=\sqrt{185}$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(-1-5)^2+(2+6)^2}=\sqrt{100}=10$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(-1+3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

لیدل کیږي چې دا مثلث هم مختلف الاضلاع دی، نو د c جز سم دی.

25-که د یو مثلث د راسونو وضعیه کمیات په ترتیب سره $A(5,4)$ $B(4,10)$ او $C(7,8)$ وي دا مثلث:

a) متساوي الاضلاع دی b) مختلف الاضلاع دی c) متساوی الساقین دی

حل:

$$\overline{AB}=\sqrt{(4-5)^2+(10-4)^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(5-7)^2+(4-8)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(7-4)^2+(8-10)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{13}$$

لیدل کیږي چې مثلث مختلف الضلاع دی، نو د b جز سم دی.

26- که $p(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطې مختصات پیداکړئ که د A نقطه د PQ په مستقیم خط داخلاَ او خارجاَ د $\frac{2}{3}$ په نسبت وویشي.

حل:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{-8+(\frac{2}{3})\cdot 2}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-24+4}{3}}{\frac{3+2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{4+\frac{2}{3}(-1)}{\frac{5}{3}}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{5}=2$$

د $A(-4,2)$ نقطه راکړل شوي، خط داخلاَ د $\frac{2}{3}$ په نسبت ووشي.

$$x=\frac{-8+(-\frac{2}{3})\cdot 2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-28}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{-28}{3}\cdot\frac{3}{1}=-28$$

$$y=\frac{4+(-\frac{2}{3})(-1)}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{12+2}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{14}{3}\cdot\frac{3}{1}=14$$

د $A(-28,14)$ نقطه راکړل شوي، خط خارجاَ د $\frac{2}{3}$ په نسبت ووشي.

په دويم ډول:

$$P(x,y)=\left[\frac{(2)(2)+3(-8)}{2+3},\frac{3(4)+(-1)(2)}{2+3}\right]=(\frac{4-24}{5},\frac{12-2}{5})=(-4,2)$$

$$P(x,y)=\left[\frac{2(2)-3(-8)}{2-3},\frac{2(-1)-3(4)}{2-3}\right]=(28,14)$$

27- د $x-y+1=0$ د مستقيم خط د تقاطع نقطې د $x^2+y^2=5$ له دايرې سره پيدا کړئ.

حل:

$y=x+1$

$x^2+(x+1)^2=5$

$x^2+x^2+2x+1-5\Rightarrow x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$x=1 \qquad x=-2$

نو د تقاطع نقطې عبارت دي له: $(-2,-1)$ و $(1,2)$

28-که د $x+ay-5=0$ مستقيم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ له دايرې مماس وي، د a قيمت پيدا کړئ.

حل: د مستقيم خط له معادلې څخه د x قيمت پيدا کوو او د دايرې په معادله کې يې عوض کوو:

$x=-ay+5$

$(-ay+5)^2+y^2-2(-ay+5)+4y=0$

$a^2y^2-10ay+25+2ay-10+4y+y^2=0$

$(a^2+1)^2+(-8a+4)y+15=0$

$\Delta=(8a+4)^2-4(a^2+1)\cdot 15=64a^2-64a+16-60a^2-60=0$

$4a^2-64a-44=0$

$a^2-16a-11=0$

$\Delta'=64+11=75$ وي

$a_{1,2}=8\pm\sqrt{75}$

29- د هغه دايرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تيرېږي او د $y-1=0$ له مستقيم خط سره مماس وي عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$

b) $x^2+y^2-2x=0$

c) $x^2+y^2+2x=0$

حل: ځرنګه چې $(0,0)$ او $(2,0)$ نقطې د دايرې پر محيط باندې واقع دي نو :

$|AC|=|BC|$ (د دايرې شعاع)

$|AC|^2=|BC|^2$

$(h-0)^2+(5-0)^2=(h-2)^2+(k-0)^2$

$\Rightarrow h^2+k^2=h^2-4h+4+k^2 \Rightarrow 4h=4 \Rightarrow h=1$

نو د دايرې مرکز C(1,k) دي.

ځرنګه چې y-1=0 دي.

$$\frac{|0(1)+(k)(-1)|}{\sqrt{0^2+1^2}}=r \Rightarrow r^2=|k-1|^2$$

$|AC|^2=(k-1)^2$

$h^2+k^2=k^2-2k+1$

$1=-2k+1 \Rightarrow k=0$

$r^2=|0-1|^2=1$

$(x-1)^2+(y-0)^2=1$

$x^2+y^2-2x=0$

د b جز سم دی.

30 – هغه دايره چې معادله يې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده.

a) حقيقي ده   b) نقطوي ده   c) موهومي ده

$$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{\frac{(-6)^2}{4}+\frac{4^2}{4}-14}=\sqrt{\frac{36}{4}+\frac{16}{4}-14}=\sqrt{9+4-14}=\sqrt{-1}$$

د c جز سم دی موهومي ده.

31- هغه دايره چې معادله يې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$ ده.

a) حقيقي ده   b) نقطوي ده   c) موهومي ده

حل:

$$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{\frac{2^2}{4}+\frac{(-4)^2}{4}-5}=\sqrt{1+4-5}=0$$

د b جز سم دی دايره نقطوي ده.

32- د $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وې د A او B د نقطو ترمنځ فاصله پيدا کړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصيف نقطې کميات پيدا کړئ.

حل:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-2-4)^2+(-5+3)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$ (د اوږدوالي واحد)

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4+(-2)}{2}=\frac{4-2}{2}=1$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{-3-5}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات: $(x,y)=(1,-4)$ دي.

33- که د یوه مثلث راسونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي وښایاست چې دا مثلث قایمه الزاویه دي.

$$\overline{AB}=\sqrt{(3+6)^2+(-5-3)}=\sqrt{145}$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(-1+6)^2(5-3)^2}=\sqrt{29}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(-1-3)^2+(5+5)^2}=\sqrt{116}$$

څرنګه چې:

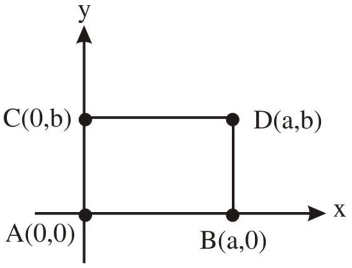
$$(\sqrt{145})^2=(\sqrt{29})^2+(\sqrt{116})^2$$

(د فیثا غورث قضیه) $145=29+16$

نو مثلث قایمه زاویه دی: $145=145$

34- وښایاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ ، $D=(a,b)$ نقطې د یو مستطیل راسونه دي او هم وښایاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

$$|AB|=\sqrt{(a-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{a^2}=a$$
$$|CD|=\sqrt{(a-0)^2+(b-b)^2}=\sqrt{a^2}=a$$
$$|AC|=\sqrt{(0-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{b^2}=b$$
$$|BD|=\sqrt{(a-a)^2+(b-0)^2}=\sqrt{b^2}=b$$



لیدل کیږي چې $|AC|=|BD|$ او $|AB|=|CD|$ دي، نو د C,B,A او D نقطې د مستطیل راسونه دي:

$$|AD|=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$|BC|=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

په نتیجه کې $|AD|=|BC|$ دی، نو د مستطیل قطرونه سره مساوي دي.

35 – وښایاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

حل: ددې لپاره چې درې واړه نقطې پر یوه مستقیم خط واقع وي، د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ د مستقیمو خطونو میلونه باید سره مساوي وي.

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-1}{6-3}=\frac{1}{3}$$
$$m_{\overline{BC}}=\frac{3-2}{9-6}=\frac{1}{3}$$

نو دا نقطې په یوه مستقیم خط واقع دي.

همدارنګه د $|AC|=|AB|+|BC|$ مساوات په واسطه هم ښودل کیږي.

$$|AC| = \sqrt{(9-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$|BC| = \sqrt{(9-6)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$$
$$|AB| + |BC| = \sqrt{10} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10} \Rightarrow |AC| = |AB| + |BC|$$

په نتیجه کې C,B,A نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

36- د هغه مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې د لاندې جوړو له نقطو څخه تیریږي.

$a:\quad (5,8),(1,2)$

$b:\quad (-1,-3)\ ,\ (2,-1)$

$c\quad (0,3)\ ,\ (5,0)$

$d:\quad (3,5),(8,15)$

$e:\quad (-2,-1)\ ,\ (3,-4)$

$f:\quad (0,2)\ ,\ (-2,0)$

د a جز حل:

$$y-8 = \frac{2-8}{1-5}(x-5) \Rightarrow y-8 = \frac{-6}{-4}(x-5) \Rightarrow 2y-3x-1=0$$

د b جز حل:

$$y+3 = \frac{-1+3}{2+1}(x+1) \Rightarrow y+3 = \frac{2}{3}(x+1) \Rightarrow 3y-2x+7=0$$

د c جز حل:

$$y-3 = \frac{0-3}{5-0}(x-0) \Rightarrow y-3 = \frac{-3}{5}x$$
$$5y-15+3x=0 \Rightarrow 5y+3x-15=0$$

د d جز حل:

$$y-5 = \frac{15-5}{8-3}(x-3) \Rightarrow y-5 = \frac{10}{5}(x-3)$$
$$y-5 = 2x-6 \Rightarrow y-2x+1=0$$

د e جز حل:

$$y+1 = \frac{-4+1}{3+2}(x+2) \Rightarrow 3x+5y+11=0$$

د f جز حل:

$$y-2 = \frac{0-2}{-2-0}(x-0) \Rightarrow x-y+2=0$$

37 – د هغه مستقیم خط معادله چې د $(5,8)$ او $(-1,10)$ له نقطو څخه تیریږي، عبارت ده له:

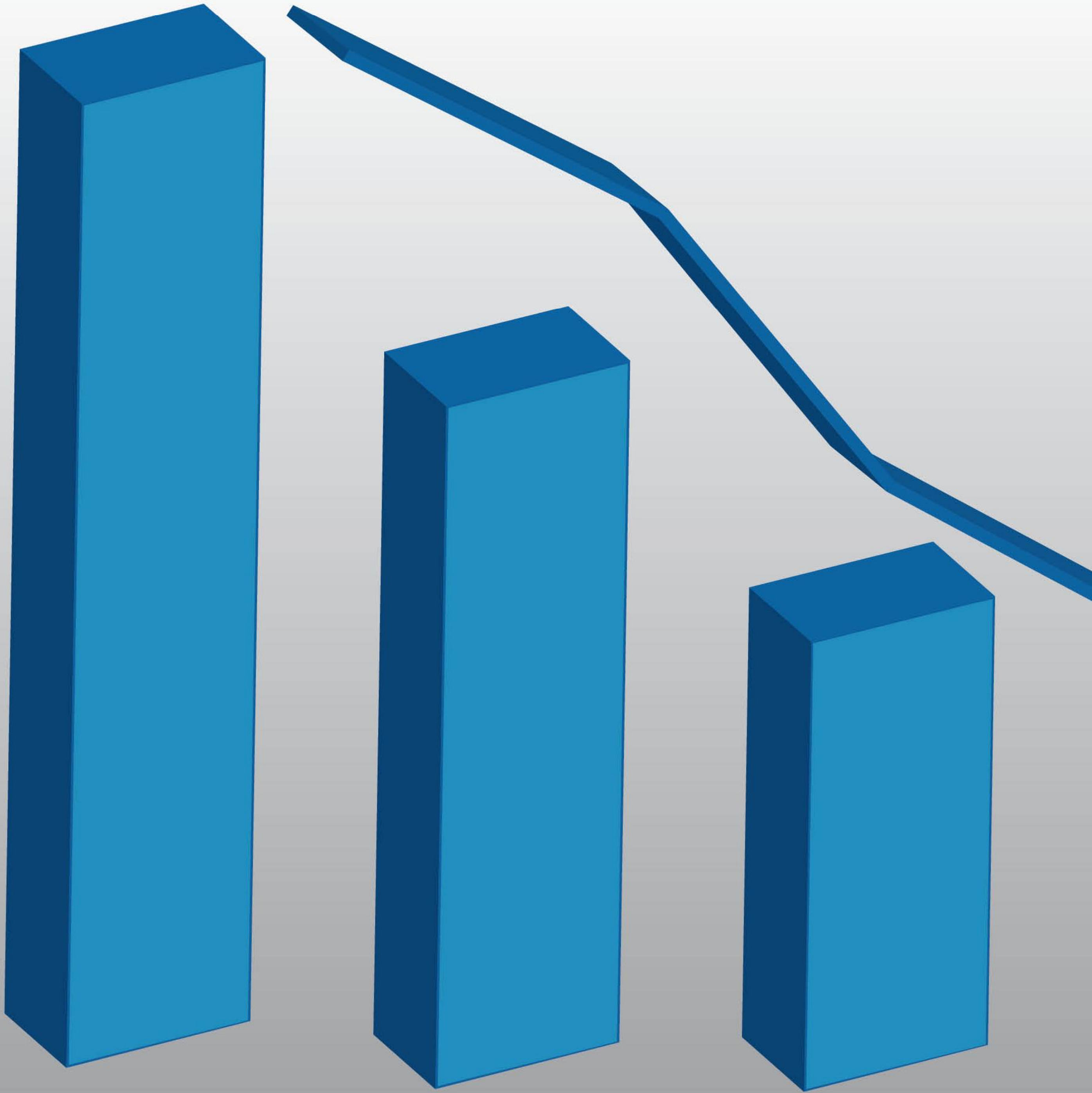
$a:\ y = -\frac{1}{3}x + 9\frac{2}{3}$ $\qquad b:\ y = -\frac{x}{3} + 9\frac{2}{3}$ $\qquad c:\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{3}$

$d:$ درې واړه سم دي:

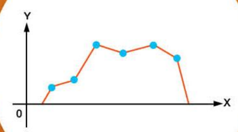
لیدل کیږي چې درې واړه معادلې سره مساوي دي، نو د d جز سم دی.

اتم څپرکی

احصائیه



د فریکونسي څو ضلعي ګراف



د درسي کتاب (359)**مخ   د لوست وخت**(1 **درسي ساعت**

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي ، ذهنیتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د فریکونسي څو ضلعي ګراف د رسمولو په طریقه وپوهیږي. • د راکړل شوي (data) له مخې د فریکونسي څو ضلعي ګراف رسم کړای شي. • و پوهیږي چې د مستطیلي ګراف د مستطیلونو مساحت د فریکونسي څو ضلعي ګراف له لاندې سطحې سره مساوي دی. • وپوهیږي چې دا ډول ګرافونه د متصلو مقداري متحولینو لپاره مناسب دی.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارټونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	د انګیزې د پیداکولو لپاره له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. چې د مستطیلونو ټول مساحت د فریکونسي د څو ضلعي ګراف له لاندې سطحې سره مساوي دی.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

د (395) مخ فعالیت دې زده کوونکي د راکړل شوي جدول له مخې د 360 مخ د مثال له حلولو څخه وروسته په ګروپونو کې کار وکړي چې ددې فعالیت حل په درسي کتاب کې توضیح شوي دی او ګراف یې ددې لوست په اضافي معلوماتو کې رسم شوی دی. د 360 مخ د مثال له حلولو څخه وروسته د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره د فعالیت ګراف رسم کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې:**

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره د 362 مخ (*data*) لپاره چې د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی راکړل شوي دی، د فریکونسي جدول ترتیب کړئ چې ګراف یې د پوښتنو په حل کې رسم شوی دی.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې:**

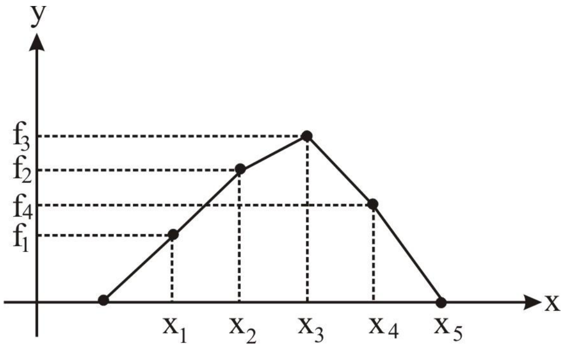
له زده کوونکو وپوښتئ چې یو ګراف د X محور څه وخت قطع کولای شي.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• په دې ګراف کې د (x_i, f_i) نقطې د وضعیه کمیاتو په مستوي کې سره نښلوو چې (x_i) د صنف مرکز او (f_i) د اړونده صنف فریکونسي ده. یو منکسر خط په لاس راځي چې (x_1, f_1) یې د پیل او (x_k, f_k) یې د پای ټکي دي. له دې ګراف څخه نوره استفاده هم کوي. ددې لپاره چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف د لاندې برخې مساحت د مستطیلي ګراف مساحت د مستطیلونو له مساحت سره مساوي شي. د څو ضلعي ګراف دواړه انجامونه د x له

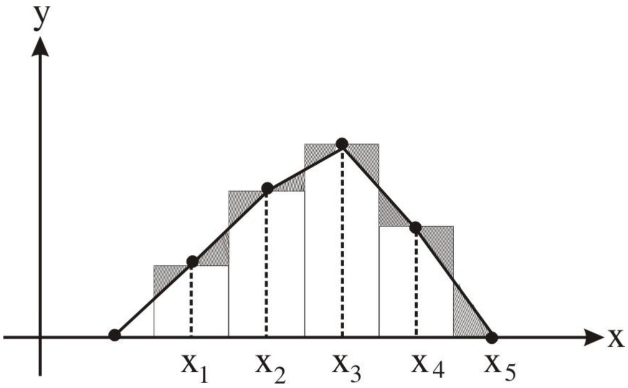
محورسره نښلولو فرض کیږي چې د لومړی صنف څخه تر مخه یو بل صنف هم لرو چې فریکونسي یې صفر ده او همدارنګه فرضوي چې د k ام صنف څخه وروسته یو بل صنف هم شته دی چې فریکونسي یې هم صفره ده. ددې دوو صنفونو په فرضولو سره به یو داسې ګراف رسم شي چې دا خاصیت ولري (x محور قطع کوي).

(د فریکونسیو د څو ضلعي ګراف لاندې مساحت د مستطیلي ګراف له مساحت سره مساوي دي) د مثال په ډول لاندې شکل وګورئ.



چې د x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 نقطې د صنفونو مرکزونه او f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 د صنفونو اړونده فریکونسي دي.

که پر دې ګراف مستطیلي ګراف (هستوګرام) رسم کړو لاندې شکل غوره کوي:



که شکل ته پاملرنه وشي (د مستطیل خط شوي برخه له هغه خط شوي برخې سره مساوي ده چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف د باندې واقع ده) نو په دې اساس د ټولو مستطیلونو مساحت د فریکونسیو د څو ضلعي ګراف له لاندې مساحت سره مساوي دي. د فریکونسیو څو ضلعي ګراف د مقداري متصلو متحولینو لپاره مناسب دی .

- د مثال په ډول د لاندې (data) د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

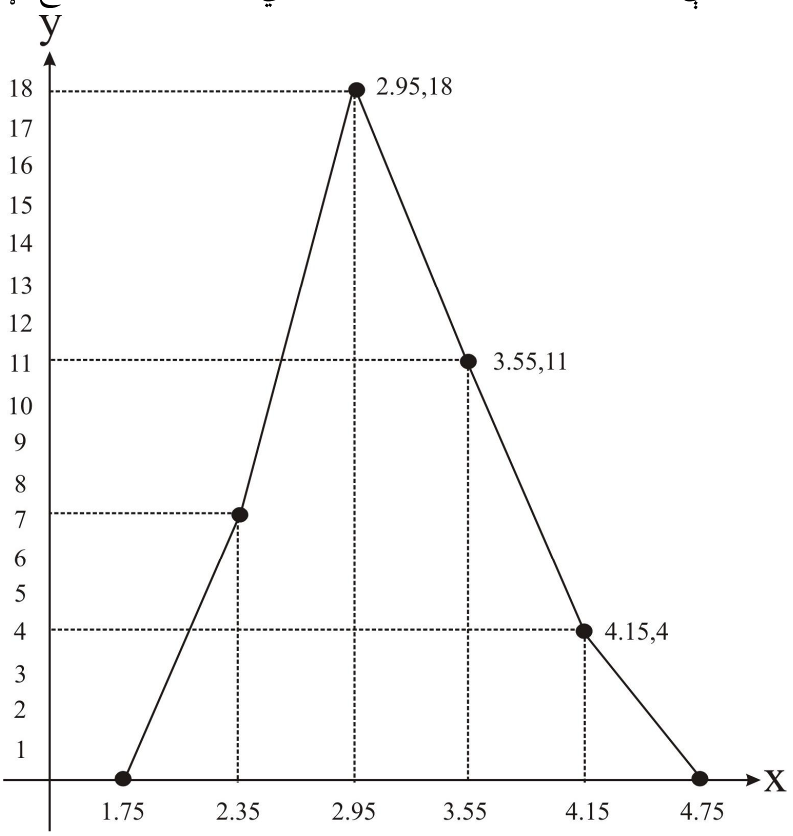
$$\text{د لومړي صنف مرکز} = \frac{2.05+2.65}{2} = 2.35$$

صنفونه	د صنف مرکز	د صنف وسعت	مطلقه فریکونسي
$2.05-2.65$	2.35	0.6	7
$2.65-3.25$	2.95	0.6	18
$3.25-3.85$	3.55	0.6	11
$3.85-4.45$	4.15	0.6	4
مجموع			40

ددې لپاره چې د فریکونسیو د څو ضلعي ګراف د x محور قطع کړي څرنګه چې د صنف طول یا وسعت (0.6) دی، نو:

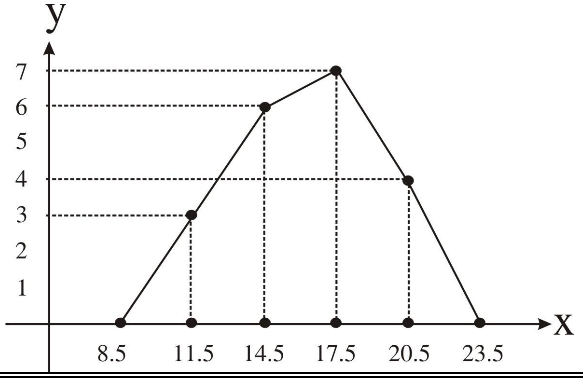
$(c = 2.65 - 2.05 = 0.6)$ $\quad 2.35 - 0.6 = 1.75 \quad 4.15 + 0.6 = 4.75$

نو د (1.75,0) او (4.75,0) نقطې علاوه کوو، ترڅو د فریکونسیو څو ضلعي ګراف د x محور قطع کړي.



- د (359) مخ د فعالیت حل:

د (11.5,3) , (14.5,6) , (17.5,7) او (20.5,5) نقطې د وضعیه کمیاتو په مستوي کې ټاکو چې ددې نقطو د x د مختصې قیمت یې د صنف مرکز او د y د مختصې قیمت یې د صنف اړونده فریکونسي ده. ددې لپاره چې د فریکونسیو د څو ضلعي ګراف لاندې سطحه د مستطیلي ګراف له مساحت سره مساوي شي (چې دا موضوع به وروسته مطالعه شي) دوه صنفونه چې یو صنف له لومړی صنف ترمخه بل صنف له أخرنې صنف څخه وروسته علاوه کوو چې ددې دواړو صنفونو فریکونسي صفر ده او د صنف اوږدوالی یا وسعت (Class interval) $14.5 - 11.5 = 3$ دی. نو $11.5 - 3 = 8.5$ له لومړی صنف څخه تر مخه فرضي صنف مرکز دی او $20.5 + 3 = 23.5$ اخرني صنف څخه وروسته صنف مرکز دی، که دواړه نقطې له پورتنیو نقطو سره علاوه کړو د فریکونسي د څو ضلعي ګراف لاس ته راځي چې په شکل کې لیدل کیږي.



د پوښتنو ځوابونه:

1- د نهم اولسم ټولګیو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړای شوي دي.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
125	98	117	153	141	126

د پورتنیو دیتا (Data)لپاره د فریکونسي یو جدول جوړ کړئ.دیتا (Data) په شپږو طبقو وویشئ، ددې ډیټا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دی د فریکونسیو څو ضلعي ګراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی راکړل شوي دیتا ترتیبوو:

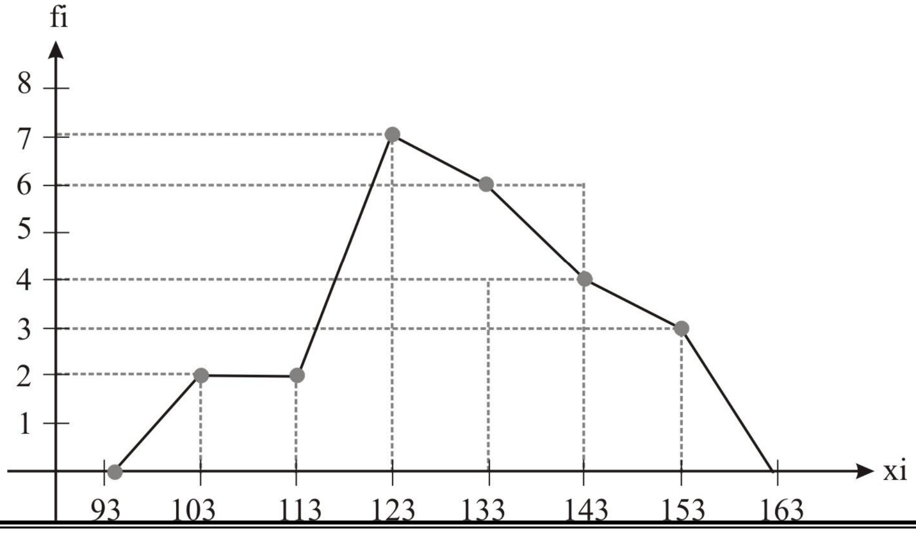
98 107 115 117 118 121 122 123 123 126 126 128 128 129 133
135 136 138 141 142 144 148 152 153

صنفونه	فریکونسی fi	د صنف مرکز xi
$98-108$	2	103
$108-118$	2	113
$118-128$	7	123
$128-138$	6	133
$138-148$	4	143
$148-158$	3	153

که د صنف مرکز (x_i) د x پر محور او فریکونسي (f_i) د y پر محور وښایو، د (x_i,f_i) مرتبه جوړه لاس ته راځي او په مستوي کې ددې نقطو په ټاکلو سره د فریکونسیو د څو ضلعي ګراف د پورتنی دیتا د ښودلو لپاره جوړیږي.

$(x_i - c,0) = (103-10,0) = (93,0)$

$(x_n + c,0) = (163,0)$



د ساقې او پاڼې ګراف

د درسي کتاب (363)مخ   دلوست وخت:(1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د ساقې او پاڼې دګرا ف د رسمولو طريقه زده کړي. • وپوهيږي چې په راکړل شوي ډيټا کې کوم رقمونه د ساقې او کوم رقمونه د پاڼو په حيث ليکل کيږي. • په دې وپوهيږي چې که د ساقې او پاڼې ګراف د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې د °90 په اندازه دوران وکړي. په ميله يې ګراف بدليږي. • د ورکړل شوي data له مخې د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړای شي. • د موضوع د زده کړې په پايله کې د رياضي زده کړې ته علاقه مند شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	د لومړنو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته، ورودي برخې پوښتنه د انګيزې د پيدا کولو لپاره له زده کوونکو وکړئ. کولای شوو چې احصائيوي ټولنه د ساقې په حيث قبوله کړو د مثال په ډول هر کس يو د تابعيت تذکرې يا د کارت نمره لري.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

د 363 مخ فعاليت دې استاد زده کوونکو ته توضيح کړي او ورودي وښودل شي چې که د ساقې او پاڼې ګراف ته د °90 په اندازه د ساعت عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، په ميله يې ګراف بدليږي.

د (364) مخ مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي او ګراف يې په چارت او يا د تختې پر مخ رسم کړئ.

همدارنګه د (365) مخ مثال هم په همدې ډول زده کوونکو ته توضيح کړئ.

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې:

د زده کړې د پياوړتيا لپاره لاندې پوښتنه حل کړئ.

د لاندې (*data*) د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

19 06 10 22 08 18 23 05 16 09 18

17 14 12 24 25 16 23 24 22 16 18 17

نوټ: څرنګه چې ټول عددونه دوه رقمي دي په دې اساس د 6 عدد د 06 په شکل او د 5 عدد د 05 په شکل او د 9 عدد د 09 په شکل ليکل شوي دی.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د لاندې ($data$) لپاره د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

38 , 48 , 45 , 32 , 29 , 32 , 45 , 36 , 22 , 21 , 35 , 45 , 47 , 26 , 43 , 48 , 64

چې ځواب یې داسې دی:

لومړی عددونه په صعودي ډول ترتیب کړئ

21 , 22 , 26 , 29 , 32 , 32 , 35 , 36 , 38 , 43 , 45 , 45 , 45 , 47 , 48 , 48 , 64

ددې ($data$) د ساقې او پاڼې ګراف په دې ډول دی:

ساقه	پانه
2	1 2 6 9
3	2 2 5 6 8
4	3 5 5 5 7 8 8
5	
6	4

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- دا ډول ګراف د هغه اطلاعاتو او مشاهدو لپاره مناسب دی چې لومړی طبیعي عددونه وي او بیا څه وخت چې د لومړیو مرتبو رقمونه یې حذف شي، کوم عددونه چې پاتې کیږي، زیات توپیر ونه لري. د لومړیو مرتبو عددونه د پاڼو او پاتې عددونه د ساقې په حیث د ساقې او پاڼې ګراف جوړوي، د موضوع د لا وضاحت لپاره هغه پوښتنه چې ددې لوست د پیاوړتیا په برخه کې راکړل شوي ده، که یویز رقمونه یې حذف کړو، نود 0 ،1 او (2) عددونه پاتې کیږي چې په خپل منځ کې زیات توپیر نه لري.

اوس هغه عددونه چې لسیز رقمونه یې صفر دي، په پام کې نیسو او یویز رقمونه یې په ترتیب سره له ساقې څخه په لږه فاصله کې یې ورته مخامخ لیکو، د صفر پاڼه په لاندې ډول جوړیږي: 5689 0

په دې معنا چې په یویز کې څلور عددونه لرو چې عبارت له 8,6,5 او 9 څخه دي او په همدې ډول د 1 عدد پاڼه د 1 عددونه دي او د 2 د عدد پاڼه عبارت ده، له 2233445 څخه، د ساقې او پاڼې ګراف یې په لاندې ډول دی. : 026666778889

0 5689

1 024666778889

2 2233445

چې 1,0 او 2 ساقه ده که دګراف د 90° په اندازه د ساعت د عقربې دحرکت په مخالف جهت وڅرخوو، نو میله یې ګراف ترې جوړیږي په لاندې ډول:

	9	
	8	
	8	
	8	
	7	
	7	5
	6	4
	6	4
9	6	3
8	4	3
6	2	2
5	0	2
0	1	2

د ساقې او پاڼې د ګراف له ګټو څخه یوه داده چې د اړتیا په وخت کې اطلاعات هم را سره موجود وي.

نوټ: ددې ګراف د رسمولو لپاره مو له مطلقه فریکونسیو څخه استفاده وکړه. له نسبي فریکونسیو څخه په استفاده یې هم رسمولای شوو، ښکاره خبره ده چې په دې صورت کې به د ګراف لوړوالی لږ شي، خو نسبتونه به تغیر نه کوي.

2- د لاندې دتیا د ساقې (Stem) او پاڼې (Leaf) ګراف په دې ډول دی.

32 , 32 , 34 , 91 , 38 , 12 , 17 , 62 , 22 , 51, 27, 34 , 43 , 44 , 44 , 8 , 30 , 30 , 31 , 40 , 34 , 37 38 , 38 ,78 , 50 , 26 , 54 , 28 , 29 , 19 , 6 , 54

ساقه	پانه
0	6,8
1	2,7,9
2	2,6,7,8,9
3	0,0,1,2,2,4,4,4,7,8,8,8
4	0,3,4,4,5
5	0,1,4
6	2
7	8
8	
9	1

3- د لاندې data د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

53, 49, 27, 48, 60, 52, 44, 38, 47, 52, 82, 46, 55, 31, 39, 54, 51, 47, 50, 45, 50, 61, 43, 64

ساقه	پانه
2	7
3	1,8,9
4	3,4,5,6,7,7,8,9
5	0,0,1,2,2,3,4,5
6	0,1,4
7	
8	2

4- د کرکټ د یو ټیم دګټل شوو او بایلل شوو لوبو شمېر په مختلفو کلونو کې په لاندې دول راکړل شوي دی:

کلونه	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
دګټل شوو لوبو شمېر	55	20	37	52	30	49	27	35	31	34	33
د بایلل شوو لوبو شمېر	10	19	24	17	13	26	17	21	24	19	16

له دوو خواوو څخه ددې دیټا د ساقې او پاڼې ګراف ترتیب کړئ:

حل:

د بایلل شوو لوبو شمېر	ساقه	دګټل شوو لوبو شمېر
9 9 7 7 6 3 0	1	
6 4 4 1	2	0 3 7
	3	0 1 4 5 7
	4	9
	5	2 5

5- دهغو مختلفو ونو لوړوالی چې تر ټولو زیات لوړوالی لري په لاندې ډول راکړل شوي دي د ساقې او پاڼې ګراف یې ترتیب کړئ.

د ونې ډول	لوړوالی	د ونې ډول	لوړوالی	د ونې ډول	لوړوالی
A	47	G	38	M	55
B	40	H	77	N	84
C	40	I	74	O	63
D	67	J	58	P	40
E	42	K	61	Q	48
F	91	L	44	R	35

3	5 8
4	0 0 0 2 4 7 8
5	5 8
6	1 3 7
7	4 7
8	4
9	1

6- د ځینو عناصرو اتومي نمبر(Atomic Number) په لاندې ډول راکړل شوی دی د ساقې او پاڼې ګراف یې ترتیب کړئ .

عنصر	نمبر اتومي	عنصر	نمبر اتومي	عنصر	نمبر اتومي	عنصر	نمبر اتومي
Hydrogen	1	Silver	47	Carbon	6	Titanium	22
Nitrogen	7	Barium	56	Argon	18	Bromine	35
Calcium	20	Iron	26	Krypton	36	Iodine	53

حل:

0	1 6 7
1	8
2	0 2 6
3	5 6
4	7
5	3 6

7- د ساقې او پاڼې دلاندې ګراف ډیټا ولیکئ

ساقه	پاڼه
5	0 1 4 8
6	2 6 7
7	1 4 5 6 6
8	2

چې data یې عبارت دی له: 50 , 51 , 54 , 58 , 62 , 66 , 67 , 71 , 74 , 75 , 76 , 76 , 82

د پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې ډیټا لپاره د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

7.9 8.3 10.9 11.7 8.4 9.1 6.8

12.5 11.2 7.8 12 11.3 8.4 13 6.8

حل: له کوچني عدد څخه لوي عدد ته یې ترتیبوو:

6.8 6.8 7.8 7.9 8.3 8.4 8.4 9.1 10.9

11.2 11.3 11.7 12 12.5 13

ددې لپاره چې اعشاري برخه یې له منځه یوسو، په 10 کې یې ضربوو.

68 68 78 79 83 84 84 91 109 112 113 117 120 125 130

ساقه	برګ
6	8,8
7	8,9
8	3,4,4
9	1
10	9
11	2,3,7
12	0,5
13	0

یا په دې ډول چې د 3.8 عدد د 038 په شکل، د 11.2 عدد د 112 په شکل او د 12 عدد د 120 د عدد په شکل په لاندې ډول لیکو:

ساقه	پاڼه
06	8 8
07	8 9
08	3 4 4
09	1
10	9
11	2 3 7
12	0 5
13	0

ربعي (چارکونه)

د درسي کتاب (367) مخ   د لوست وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	دې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • د لومړی، دويمې او دريمې ربعې تعريفونه زده کړي. • په دې پوه شي چې لومړی، دويم او دريم چارك په ترتيب سره په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کيږي. • د چارکونو مقدار او موقعيت پيدا کړای شي. • د احصائيوي مسايلو په حلولو کې ترې استفاده وکړای شي او په اهميت يې پوه شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيداکولو پاره له زده کوونکو څخه دې د ورودي برخې پوښتنه وشي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

ددې لوست فعاليت زده کوونکو ته توضيح کړئ. له دې وروسته چې د چارکونو د مقدار او موقعيت پيداکول زده کوونکو ته توضيح شي. دزده کوونکو په ونډې اخيستنې سره د دې لوست مثال حل کړئ.

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې:

ددې لوست پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې:

له زده کوونکو پوښتنه وکړئ چې د Q_1, Q_2 او Q_3 مقدارونه تعريف کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- Q_1, Q_2 او Q_3 په دې ډول هم ټاکي:

د لاندې ديتا Q_1, Q_2 او Q_3 عبارت دي له:

26   17   21   23   19   28   17   20   29

لومړې ديتا په صعودي ډول ترتيبوو لرو چې:

17   17   19   20   21   23   26   28   29

$$Q_1 = \frac{17+19}{2} = 18 \qquad Q_2 = 21 \qquad Q_3 = \frac{26+28}{2} = 27$$

- په لاندې data کې Range لومړی او دريم چارك کوم عددونه دي؟

65 42 45 20 66 60 76

Range $= 56$ $Q_1 = 42$ $Q_3 = 66$

•

84 95 76 88 92 78 98

Range $= 22$ $Q_1 = 78$ $Q_3 = 95$

•

13 11 14 16 14 15 16 17 14 18 19 16 25

Range $= 14$ $Q_1 = 14$ $Q_3 = 17.5$

•

2 3 3 3 3 3 (3) 4 4 4 4 4 4 (4) 4 5 5 5 5 5 (5) 5 5 5 5 5 6

میانه $= 4$

$Q_1 = 3$ $Q_3 = 5$

د پوښتنو ځوابونه:

فرض کړئ چې لاندې دیتا راکړل شوي وي:

100 90 80 120 160 140 85

a) لومړی او دریم چارک پیدا کړئ.

b) له میانې ځخه مخکې عددونه ولیکئ.

c) له میانې ځخه وروسته عددونه ولیکئ.

حل: راکړل شوي دیتا په صعودي ډول ترتیبوو او بیا شماره ورکوو:

80 85 90 100 120 140 160

1 2 3 4 5 6 7

لومړی چارک $Q_1 = \frac{1\cdot 7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7+2}{4} = \frac{9}{4} = 2.5 \Rightarrow Q_1 = 85.5$ (a

$$Q_3 = \frac{3\cdot 7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{21}{4} + \frac{1}{2} = \frac{23}{4} = 5.75 \Rightarrow Q_3 = 120.75$$

b) ځرنګه چې میانه له Q_2 سره مساوي ده، نو لومړی میانه پیدا کوو بیا له میانې مخکې او وروسته عددونه ټاکو:

$$Q_2 = \frac{2\cdot 7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{14+2}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow Q_2 = 100$$

له میانې ځخه مخکې عددونه عبارت دي له: 90 85 80

c : له میانې ځخه وروسته عددونه عبارت دي له: 160 140 120

صندوقچه یي ګراف

د درسي کتاب (369)مخ **د لوست وخت(1 درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	دې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د راکړل شوي (data) د صندوقچه یي ګراف رسمول زده کړي. • په دې وپوهيږي چې دا ګراف نسبت نورو ګرافونو ته د (data) تيتوالی ښه ښکاره کوي. • وپوهيږي چې دا ګراف (data) ترټولو لوی او کوچنی (data)، لومړی او دريم چارک او مياني په اساس ښکاره کوي. • ددې ګراف له مخې پيدا کړای شي چې ديتا متناظره ده او که نه؟ • د راکړل شوي (data) صندوقچه یي ګراف رسم کړای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيدا کولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه دې له زده کوونکو وشي چې د سرخلاصي صندوق شکل لري.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

دې لوست فعاليت شايد زده کوونکي حل نه کړای شي، محترم ښوونکي دې حل کړي چې حل یې په لاندې ډول دی:

لومړی $(data)$ ترتيبوو:

10 , 11 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18 ,(19), 23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 31 , 31

د پورتنيو عددونو ميانه 19 ده. هغه عددونه چې د مياني مخکې نيمايي کې واقع دي، عبارت دي له:

10 , 11 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18

ددې عددونه ميانه $14.5=\dfrac{14+15}{2}$ ده.

او هغه عددونه چې د مياني وروسته نيمايي کې واقع دي عبارت دي له:

23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 31 , 31

چې ددې عددونه ميانه $26.5=\dfrac{26+27}{2}$ ده.

دويم چارک يا Q_2 (19) دی چې له مياني سره مساوي دی. له دې وروسته چې صندوقچه یي ګراف او د رسمولو مرحلې یې زده کوونکو ته توضيح شي، لومړی مثال دې زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره لاندې پوښتنه حل کړې.

که لاندې *data* راکړل شوي وي.

1,1.5 , 1.5 , 1.75 , 3 , 7 , 12 , 15 , 20

ددې عـــددونو میانـــه د (3) عـــدد دی چـــې *data*,50% لـــه میـــانې لانـــدې د [1,1.75] یـــا 0.75 پـــه فاصـــله کـــې یعنې 1.75 , 1.5 , 1.5 , 1 او په دې ډول چې 50% (data) د[7,20] په فاصله کې د 13 پـه اوږدوالي تیت شـوي ده. نو دا احصائیوي جامعه متناظره نه ده یعني د دیتا تراکم کیڼې خواته زیات دی نسبت ښې خواته.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

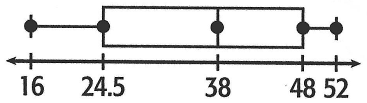
که لاندې دیتا راکړل شوي وي صندوقچه یي ګراف یې رسم کړئ

21 , 51 , 36 , 38 , 45 , 52 , 28 , 16 , 41

لومړی عددونه په صعودي ډول لیکو:

16 , 21 , 28 , 36 , 38 , 41 , 45 , 51 , 52

څرنګه چې میانه $\tilde{x} = 38$ د ښې خوا د څلورو عددونو میانه 48 او د کیڼې خوا د څلورو عددونو میانه (24.5) ده ګراف یـې پـه لاندې ډول دی.



د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

صندوقچه یي ګراف د (*data*) د رقمونو او عددونو د پرتله کولو لپاره ډیر ګټور دی. د دې ګراف په واسطه معلومـولای شـو چې احصائیوي جامعه متناظره ده که نه؟ لیکن داسې پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای لکه ایا عددونه سره نـژدې دي؟ ایـا د حـسابي اوسط په شاوخوا کې زیات عددونه راټول شوي دي.

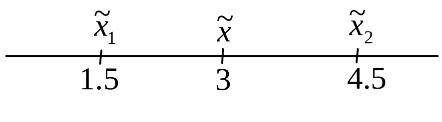
د لاندې راکړل شوي (*data*) صندوقچه یي ګراف عبارت دی له:

1 , 1.25 , 1.75 , 2 , 3 , 4 , 4.25 , 4.75 , 5

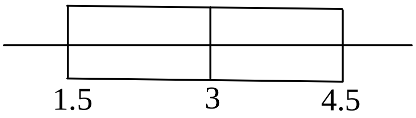
دګراف د رسمولو لپاره یې لومړی میانه، $\tilde{x} = 3$ (x تیلدا) ده، له میانې څخه د کوچنیو عددونو (2 , 1.75 , 1.25 , 1) میانه عبارت ده، له $\tilde{x}_1 = \frac{1.25+1.75}{2} = 1.5$ او له میانې څخه د لویو عددونو (5 , 4.75 , 4.25 , 4) میانه عبارت ده له:

$$\tilde{x}_2 \frac{4.25+4.75}{2} = 4.5$$

د عدد و خط پر مخ درې نقطې $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ او میانه $\tilde{x}$ ټاکو.



داسې یو مستطیل رسمولو چې سور یې اختیاري او اوږدوالی یې له $\tilde{x}_1$ تر $\tilde{x}_2$ پورې وي، د($\tilde{x}$) په نقطه کې دا مستطیل د عمود خط په واسطه په دوو برخو وېشو:



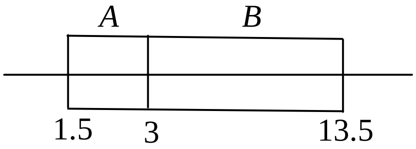
ځرنګه چې 50% عددونه په جبعه کې له 1.5 څخه تر 3 پورې واقع دي او 50% عددونه له 3 څخه تر 4.5 پورې واقع دي نو د جعبې دواړه برخې سره مساوي دي.

په نتیجه کې د عددونو تراکم د میانې په دواړو خواو کې سره مساوي دی، نو دا احصائیوي جامعه متناظره ده.

- همدارنګه لاندې *data* متناظره نه ده.

1 , 1.5 , 1.5 , 1.75 , 3 , 7 , 12 , 15 , 20

چې ګراف یې په لاندې ډول دی:



په شکل کې ښکاره لیدل کیږي چې 50% عددونه له میانې لاندې د *A* په کوچنی ساحه کې او 50% عددونه له میانې پورته د *B* په لویه ساحه کې واقع دي، نو په دې اساس د عددونو تراکم د میانې کینې خواته، زیات دی نسبت ښیې خواته، نو دا *data* متناظره نه ده.

- صندوقچه یي ګراف (Box and Whisker Plots) : داګراف د data توزیع ښکاره کوي.

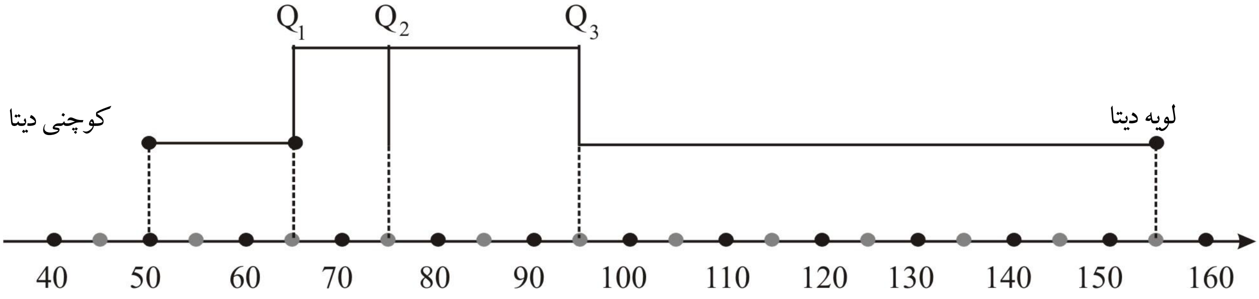
مثال: دل لاندې *data* صندوقچه یي ګراف رسم کړئ .

50 51 53 57 65 66 69 70 72 77 82 88 88 98 107 112 155

↑ تر ټولو کوچنی ډیتا ↑ $Q_1 = 61$ ↑ $Q_2 = 72$ میانه ↑ $Q_3 = 93$ ↑ تر ټولو لویه دیتا

$$Q_1 = \frac{57+65}{2} = 61$$

$$Q_3 = \frac{88+98}{2} = 93$$



پنځه کمیتونه (ترټولو لویه دیتا، Q_1, Q_2, Q_3 او تر ټولو کوچنی ډیتا) مستطیل جوړوي.

ددې بکس د جوړولو لپاره لاندې پنځه مرحلې په پام کې ونیسئ:

1- ډیتا په صعودي (Increasing) ډول ترتیب او Q_1, Q_2, Q_3 پیدا کړئ.

2- د عددونو یو خط (Line numbers) رسم کړئ لویه او کوچنی ډیتا پرې ولیکئ.

3- داسې یو بکس جوړ کړئ چې کینې خواته یې Q_1 او ښې خواته یې Q_3 وي.

4- د میانې په نقطه کې یو عمودي خط (Vertical line) (په Q_2 یا (میانه) کې رسم کړئ).

5- یو خط ددې بکس کینې خواته له Q_1 څخه تر کوچنۍ دیتا او بل خط د بکس ښې خواته له Q_3 څخه تر لوی دیتا پورې رسم کړئ.

مثال:

a: د راکړل شوي $data$ صندوقچه یې ګراف رسم کړئ.

60 , 58 , 75 , 64 , 90 , 85 , 60

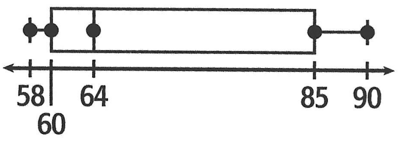
دیتا ترتیب کړئ.

58 , 60 , 60 , 64 , 75 , 85 , 90

په پورتنۍ data کې

تر ټولو کوچني دیتا $= 58$ $Q_1 = 60$ $Q_2 = 64$ $Q_3 = 85$

تر ټولو لویه دیتا $= 90$ $\text{Range} = 32$



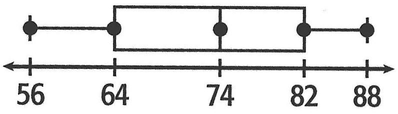
-b

56, 88 , 60 , 84 , 72 , 68 , 80 , 76

په پورتنۍ data کې

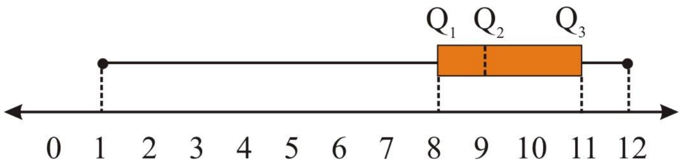
تر ټولو کوچني دیتا $= 56$ $Q_1 = 64$ $Q_2 = 74$ $Q_3 = 82$

تر ټولو لویه دیتا $= 88$ $\text{Range} = 32$



د پوښتنو ځوابونه:

1- شکل ته په پاملرنې سره د لاندینیو پوښتنو ځوابونه ووایاست. (پام مو وي چې په درسي کتاب کې ددې شکل په رسمولو کې اشتباه شوې ده)



a) په پورتني ګراف کې میانه څو ده؟

b) ددې $data$ لومړی چارک 8 دی، دا عدد د څه شی ښودونکي دی؟

c) دریم چارک (ربعه) څو ده؟ دا عدد څه شی ښیي؟

d) دا چې میانه د صندوق (بکس) کېنې خواته واقع ده داد څه شي ښکاروندی ده؟

e) دکینې خوا د ترادف اوږدوالي (د عددونو شمېر) نسبت ښېې خواته زیات دی، دا د څه ښکاروندوي دي؟

حل:

a) په پورتني ګراف کې میانه 9 ده.

b) لومړی چارک یا $Q_1 = 8$ دا ښیې چې 25% اطلاعات د Q_1 کېنې خواته واقع دي.

c) دریم چارک $(Q_3 = 11)$ دی، دا ښکاره کوي چې 75% دیتا د Q_3 کېنې خواته واقع ده.

d) کېنې خواته د میانې موجودیت ښیې چې ډېر اطلاعات *data* کېنې خواته واقع دي.

e) کېنې خواته د عددونو د ترادف اوږدوالی نسبت ښې خواته هم ددې مدعا ښکارندوی دی چې ډېر اطلاعات کېنې خواته واقع دي.

2- د یوه هېواد د فوټبال ملي ټیم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي:

25	24	26	19	31	18	23	22	25	26
25	27	23	29	25	25	33	31	26	

له لاندې نتیجو څخه کومه یوه سمه ده؟

- د هغه لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لوړ وي، زیات دي.
- د هغه لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له میانه څخه لوړ وي، زیات دي.
- د هغه لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ وي، زیات دي.
- د هغه لوبغاړو شمیر چې عمر یې له اوسط څخه زیات دی، د هغه لوبغاړو له شمیر سره مساوي دي چې عمرونه یې له اوسط څخه کم دي.

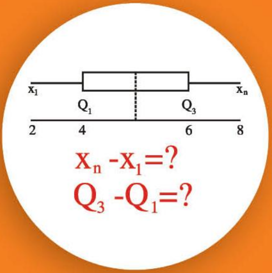
حل: څرنګه چې واقعي اطلاعات راکړل شوي دي، نو د فریکونسیو د جدول جوړولو ته اړتیا نشته دی، لومړی *data* ترتیبوو.

18	19	22	23	23	24	25	25	25	(25)	25
26	26	26	27	29	31	31	33			

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = (18+19+22+23+24+25+25+25+25+25+26+26+26+27+$$

$$+29+31+31+33) = \frac{483}{19} = 25.42$$

- لومړی جلمه سمه نه ده ځکه چې د هغه لوبغاړو شمېر چې عمرونه له اوسط (25.42) څخه زیات دي، 8کسه دي په داسې حال کې چې د هغه لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ دی 11کسه دي.
- دویمه جمله سمه ده ځکه چې د هغه لوبغاړو شمیر چې عمرونه یې له میانې (25) څخه زیات دي 8کسه دي او د هغه لوبغاړو شمیر چې عمرونه یې له میانې (25) څخه لږ دي، 6کسه دي.
- دریمه جمله هم سمه ده، ځکه دهغه لوبغاړو شیمر چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ دي، 11کسه دي.
- څلورمه جمله سمه نه ده، ځکه چې $(8 \neq 11)$



د چارکونو انحراف

(Inter Quartile Range)

د درسي کتاب (375)**مخ** **دلوست وخت**(1 **درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د (data) ربعي انحراف (د چارکونو انحراف) د پیداکولو طريقه زده کړي. • په دې وپوهيږي چې د هماغه مستطيل اوږدوالی چې په صندوقچه يي ګراف کې يې دوې مياني سره نښلولي، د چارکونو له انحراف څخه عبارت دی. • د چارکونو دانحراف د پيداکولو فورمول زده کړي. • ددې فرمول په واسطه د (data) دچارکونو انحراف پيدا کړای شي. • په احصائيوي مسايلو کې له دې فورمول څخه ګټه واخيستلای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته ددې لپاره چې فعالې زده کړې ته انګيزه پيدا شي، له زده کوونکو څخه دې د ورودي برخه پوښتنه وشي او ورته واضح دې شي، څه وخت چې يوه احصائيوي جامعه سره نژدې او يا لويه وي، د دوو ډير کوچني او ډير لوی مقدار له امله له جامعې څخه لوي عددي تغيرات لاس ته راځي، يا په بل عبارت يو نامناسب تغير ښيي په همدې اساس د *data* څلورمه برخه له پورته او لاندې برخې څخه حذفوي چې د چارکونو انحراف د تيت والي له معيارونو څخه يو معيار دی او د $Q = Q_3 - Q_1$ له فرمول څخه په لاس راځي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

ددې لوست فعاليت دې محترم ښوونکي کار کړي متوجه اوسي چې ددې فعاليت د عددونو د ليکلو په وخت کې اشتباه شوي ده چې عددونه يې په لاندې ډول دي:

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

پورتني او لانديني چارکونه:

ځينې وختونه امکان لري چې د تغيراتو لمن يا د تحول ساحه له احصائيوي جامعې څخه نامناسبه تعبير وښيي. د مثال په ډول هغه معلومات او اطلاعات چې يو له بله سره ډير نژدې وي. يا د عددونو د ډيرو لويو او يا ډيرو کوچنيو مقدارونو په سبب د تحول

ساحه Range یو لوی عدد په لاس راشي، لکه: که په 12 ورځو کې هغه شمیر زده کوونکي چې د مطالعې لپاره کتابتون ته تللي وي، په لاندې ډول راکړل شوي وي.

0 , 1 , 2 , 8 , 7 , 6 , 5 , 9 , 10 , 6 , 15 , 11

ښکاره ده چې Range= 15-0=15 دی، خو په عمومي ډول (data) د 5 او 11 تر منځ تیت شوي ده چې تیت والې یې دومره زیات نه دی. له همدې سببه د لویو او کوچنیو (data) د تاثیر له منځه وړلو لپاره یو شمېر پورتني او لاندیني عددونه له منځه وړل کیږي، دا چې کوم شمیر عددونه حذف شي، د عددونو په شمیر او نژدېوالي پورې اړه لري. ځینې وختونه لسمه برخه او ځینې وختونه څلورمه برخه له پورتنیو او لاندینیو عددونو څخه حذفیږي. لومړی پورتني راکړل شوي عددونه ترتیبوو او که له پورتنیو او لاندینیو عددونو څلورمه برخه حذف شي، نو لرو چې:

0 , 1 , 2 , 5 , 6 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 15

نو (Range) یې عبارت له $9-5=4$ څخه دی چې له حذفولو څخه مخکې یې Range $15-0=15$ وه.

د چارکونو انحراف زده کوونکو ته توضیح کړئ او بیا ددې لوست مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د لاندې دیټا ترټولو کوچنی او تر ټولو لویه (data) ، چارکونه ، Range او ربعي انحراف یا د چارکونو انحراف پیدا کړئ او صندوقچه یې ګراف یې هم رسم کړئ

5 6 9 2 3 7 2 9 8

چې ځواب یې داسې دی.

لومړی *data* ترتیبوو:

2 2 3 5 (6) 7 8 9 9

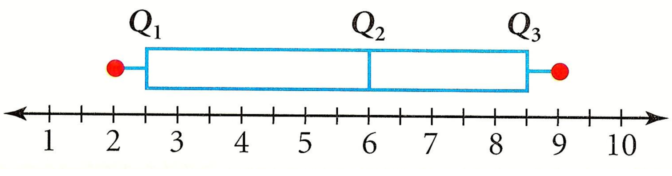
$$Q_1=\frac{2+3}{2}=2.5$$

$$Q_2=6$$

$$Q_3=\frac{8+9}{2}=8.5$$

$$\text{Range}=9-2=7$$

$$\text{IQR}=8.5-2.5=6$$



د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د ارزونې لپاره د لومړي پوښتنې یوه برخه دې له زده کوونکو وپوښتل شي.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

څرنگه چې د احصائيې هدف دا دی چې معلومات او اطلاعات لنډ کړي، په دې ډول چې موجوده اطلاعات لـه منځـه، ولاړ نـه شي.

ددې لپاره چې ويوهيږو چې د وسطي برخې د رقمونو فريکونسي له دواړو خواوو څخه زياته ده. مرکـز تـه د مـيلان لـه معيـارونو څخه گټه اخيستل کيږي، دا مقدارونه چې د *data* د مرکز مشخص کوونکي دي، مرکـز تـه د مـيلان د معيـارونو (Measures of location or central Tendency) په نامه يادېږي چې عبارت دی له:

حسابي اوسط(Arithmetic Mean)

ميانه(Median) او موډ (Mode)

د انحراف يـا تيـت والـي معيارونـه (Types of dispersion) يـا(Measures of dispersion) يـا د تيـت والـي پـارا مترونـه پـه عمومي ډول عبارت دي له:

1- وسعت(Range) يا د تغيراتو لمن (د تحول ساحه)
2- وريانس(variance)
3- معياري انحراف (standard Deviation)
4- منځنی انحراف (Mean Deviation)
5- د چارکونو انحراف (Quartile Deviation)

څرنگه چې د تحول ساحه يا وسعت (R) مساوي په $R = b - a$ دی چې b تر ټولو لويه *data* او a تر ټولـو کـوچنی *data* ده که $R = 0$ وي، نو ټول اطلاعات (data) سره مساوي دی، يا په بل عبارت په اطلاعاتو *data* کې هيڅ تيت والی نشته.

د 1,5,4,5,4,6,10 عددونو د تحول ساحه $R = 10 - 1 = 9$ ده، د تحول ساحه د مرکزي معيارونو په شان لکه مـوډ او ميانـه نظـر ټولـــو اطلاعـــاتو (data) تـــه حـــساسه نـــه ده. د مثـــال پـــه ډول $\{1,2,3,4,8,9,10\}$ عـــددونو د تحـــول ســـاحه Range هم $R = 10 - 1 = 9$ ده، سره له دې چې په مخکنيو عددونو کې، عددونه نسبت دې عددنو ته سره نژدې واقع وو چې پـه نتيجـه کې يې تيت والی لږ دی، دانحراف له معيارونو يو هم د چارکونو انحراف دی

عموما په اطلاعاتو (عددونو او رقمونو) کې ډير لوی او کوچني عددونـه موجـود وي او سـربېره پـر دې زيـات عددونـه پـه مرکـزي برخه کې راټول شوي وي. په هره اندازه چې ددې عددونو $(data)$ له اوسط څخه يا د لويو او ياکوچنيـو عـددونو خواتـه ولاړ شـو فريکونسي يې کميږي، نو بايد نه دي چې لوی او کوچني مقدارونه د فريکونسي د کموالی په اساس د جامعې د وېش پـه ترسـيم کې رول ولري. که دوی له احصائيوي جامعې څخه حـذف شـي، څـه چـې پـاتې کيـږي د جـامعې واقعيتونـو تـه بـه نـژدې وي. د همدې هدف لپاره په صندوقچه يي گراف کې ددې لپاره چې د اطلاعاتو متناظر او غير متناظروالی ښـکاره کـړو، هغـه اطلاعـات (جامعه) چې د دريو ميانو په واسطه مو په لاس راوړه، پـر څلـورو مـساوي برخـو مـو ووېـشل، پـه حقيقـت د لـومړنی څلـورمې او

وروستی څلورمې برخو څخه صرف نظر کوه او د مستطیل اوږدوالی هغه قطعه خط و چې دوې میانې ګانې یې سره نښلولي. په حقیقت کې د چارکونو انحراف د همدې د مستطیل اوږدوالی دی.

څرنګه چې لومړني چارك هغه کمیت دی چې $\frac{1}{4}$ برخه اطلاعات ترې لږ او $\frac{3}{4}$ برخه اطلاعات ترې زیات وي، دویم چارك هغه کمیت دی چې د (data) $\frac{2}{4}$ برخه ترې کمه او $\frac{2}{4}$ برخه ترې زیاته وي، نو دویم چارك میانه ده یا $Q_2 = \tilde{x}$

او دریم چارك هغه کمیت دې چې $\frac{3}{4}$ برخه احصائیوي جامعه ترې لږه او $\frac{1}{4}$ برخه ترې لویه وي چې دریم چارك په Q_3 سره ښودل کیږي که د چارکونو انحراف په Q سره وښودل شي، نو $Q = Q_3 - Q_1$ دی.

مثال: د لاندې راکړل شوي (data) د چارکونو انحراف پیدا کړئ:

1 , 5 , 9 , 4 , 3 , 2 , 7 , 6 , 4 , 5 , 7 , 4 , 3 , 5 , 9 , 2 , 7 , 7 , 6 , 5

لومړی (data) ترتیبوو:

$$\underset{}{1,2,2,3,3,}\ \overset{Q_1}{\downarrow}\ 4,4,4,5,5\ \overset{Q_2}{\downarrow}\ 5,5,6,6,7\ \overset{Q_3}{\downarrow}\ 7,7,7,9,9$$

د $(data)$ شمیر 20 دی، نو $\frac{1}{4}$ برخه یې مساوي په 5 ده او $\frac{3}{4}$ برخه یې 15 کیږي، نو لومړنی چارك باید له پنځو اطلاعاتو زیات او له 15 اطلاعاتو څخه کوچنی وي یا لومړنی چارك د 4 او 3 ترمنځ کمیت دی چې ددې دوو عددونو حسابي اوسط لومړنی چارك دی.

$$Q_1 = \frac{4+3}{2} = 3.5$$

دویم چارك باید له (10) عددونو څخه ریات او له (10) عددونو څخه لږ وي یا Q_2 د 5 او 5 په منځ کې وي یا:

$$Q_2 = \frac{5+5}{2} = 5$$ او دریم چارك $$Q_3 = \frac{7+7}{2} = 7$$

نو د چارکونو انحراف یې عبارت له:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 7 - 3.5 = 3.5$$

ځینې وختونه د چارکونو انحراف د $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ له فورمول څخه هم په لاس راځي.

د چارکونو د انحراف د پیدا کولو لپاره لاندې مرحلې په پام کې نیسو.

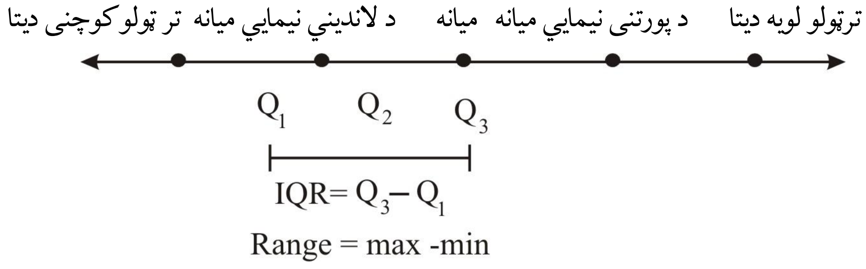
1) د data میانه پیدا کړئ، څو فیصده اطلاعات له میانې څخه لوړ او څو فیصده له میانې څخه لاندې واقع دي.

2) د data لاندینی نیمایي میانه پیداکړئ، څو فیصده data له دې میانې څخه لاندې واقع ده.

3) د پورتنی نیمایي data میانه پیداکړي چې څو فیصده data له دې میانې پورته واقع ده.

4) د عددونو یو خط رسم کړئ او هغه میانې ګانې چې په لومړی، دویمه او دریمه مرحله کې پیدا شوي دي او هم تر ټولو

کوچنۍ او لویه data د عددونو پر دې خط په نښه کړئ.



دلویې او کوچنۍ data د تفریق حاصل د تحول ساحه (Range) دی او د لوی او کوچنی چارکونو د تفریق حاصل $(Q_3 - Q_1)$ د څلورمو د داخلي انحراف (Inter Quartile Range) په نامه یادیږي او یا په (IQR) سره ښودل کیږي.

مثال: د لاندې ډیتا د څلورمو انحراف او د تحول ساحه په لاندې ډول په لاس راځي:

50 , 57 , 77 , 66 , 53 , 72 , 51 , 88 , 82 , 70 , 112 , 107 , 69 , 88 , 98 , 65 , 155

دیتا ترتیب کړئ چې میانه یې نهم قیمت یعنې 72 ده. د لاندې نیمایي ډیتا میانه $Q_1 = \frac{57+65}{2} = 61$ او د پورتني نیمایي ډیتا میانه $Q_3 = \frac{88+98}{2} = 93$ ده.

50 51 53 [57 65] 66 69 70 [72] 77 82 88 [88 98] 107 112 155

کوچنۍ ډیتا $Q_1 = 61$ $Q_2 = 72$ $Q_3 = 93$ لویه ډیتا

میانه

$$\text{Range} = 155 - 50 = 105$$

$$\text{IQR} = Q_3 - Q_1 = 93 - 61 = 32$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې ډیتا د تحول ساحه، د څلورمو (چارکونو) انحراف او موډ پیدا کړئ او ووایاست چې د دیتاګانو والی په کومه ساحه کې ډیر دي؟

5 11 12 14 15 15 16 17 30

حل: ډیتا په صعودي ډول ترتیبوو

د تحول ساحه یې: $30 - 5 = 25$

ددې عددونو میانه $Q_2 = 15$ ده.

$$Q_1 = \frac{11+12}{2} = \frac{23}{2} = 11.5$$

$$Q_3 = \frac{16+17}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$

$Q = Q_3 - Q_1 = 16.5 - 11.5 = 5$

او موډ يې هم د 15 عدد دی.

2- دلاندې ډیتا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پیدا او د لومړی پوښتنې د چارکونو د انحراف سره یې پرتله کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

حل: لومړی پورتني اطلاعات په صعودي ډول ترتیبوو:

21 22 23 24 26 27 28 29

د تحول ساحه يې: $R = 29 - 21 = 8$

د چارکونو انحراف او یا ربعې انحراف:

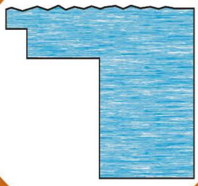
$$Q_2 = \frac{24 + 26}{2} = 25$$

$$Q_1 = 22$$

$$Q_3 = 28$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 28 - 22 = 6$$

د لومړۍ پوښتنې ربعې انحراف (چارکونو انحراف) 5 او د دویمې پوښتنې 6 دی؛ نو د دویمې پوښتنې د اطلاعاتو تیت والی نسبت د لومړۍ پوښتنې اطلاعاتو ته زیات دی.



واریانس(variance)

د درسي کتاب (377)**مخ** **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي ، ذهنيتي)	• د راکړل شوي دیتا د وریانس د پیداکولو طریقه زده کړي. • د دواړو فورمولونو په واسطه د راکړل شوي دیتا واریانس پیداکړای شي. • وپوهیږي چې واریانس د تیت والی یو داسې معیار دی چې نظر ټولو اطلاعاتو ته حساس دی • د احصائیوي مسایلو په حلولو کې د واریانس له فرمول څخه استفاده وکړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. د پوښتنې هدف دا دی که د ډنده (حوض) د ژوروالي حسابي اوسط معلوم وي. د مثال په ډول که د حوض د ژوروالي حسابي اوسط 1.5m وي او که پوه شو چې د ژوروالي تغیرات د حسابي اوسط په شاوخوا کې له 1.5m څخه زیات نه دی، نو په پوره ډاډ سره به په کې ولامبو، په دې شرط سره چې دا تغیرات له یو مناسب عددي معیار سره معرفي شوي وي چې دا مناسب عدد واریانس دی.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

د (377) مخ فعالیت بنایي زده کوونکي حل نه کړای شي، محترم ښوونکي دې د فعالیت هدف زده کوونکو ته واضح کړي چې ددې حوض حسابي اوسط $2m = \frac{1.5m + 2.5m}{2}$ دی.

محترم ښوونکي دې له د زده کوونکو سره مرسته وکړي، تر څو دوی د واریانس د پیداکولو طریقه زده کړي. ضرور نه ده چې زده کوونکي د واریانس د فورمول ثبوتول زده کړي. که ښوونکي یې لازم ګڼي ثبوت دې شي، مثال دې د دواړو فورمولونو په واسطه د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي. که چیرې دیتا په صنفونو کې ترتیب شوي وي، نو د واریانس د پیداکولو فورمول یې په درسي کتاب کې د اضافي معلوماتو لپاره ورکړل شوي دي چې ددې لوست په اضافي معلوماتو کې یو مثال هم ددې فورمول په واسطه حل شوی دی.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې:**

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره دا پوښتنه حل کړئ.

د 1,2,3,4,5, طبیعي عددونو واریانس پیدا کړئ.

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}[4+1+0+1+4] = \frac{10}{5} = 2 \qquad \bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د ارزونې لپاره لاندې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د هغه ساعتونو شمیر چې په یوه هفته کې 4 محصلینو په کتابخانه کې د مطالعې لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول دی. ددې *data* واریانس پیدا کړئ.

1,5,7,9

حل: $5.5 = \frac{1+5+7+9}{4} = \bar{x}$ او له اوسط څخه انحراف یې $(3.5\ ,\ 1.5\ ,\ -0.5\ ,\ -4.5)$ دی.

$20.25, 0.25, 2.25, 12.25 =$ له اوسط څخه د انحرافونو مجذور

له اوسط څخه د انحرافونو د مجذور اوسط $= \sigma^2 = \frac{20.25+0.25+2.25+12.25}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$

وریانس $\Rightarrow \sigma^2 = 8.75$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

ددې لپاره چې د تیتوالی معیار نظر ټولو اطلاعاتو ته حساس وي، باید د تیت والی په معیار کې له ټولو اطلاعاتو څخه استفاده وشي. ددې کار لپاره د هر عدد توپیر له یوه ثابت مقدار څخه محاسبه کوو او مجموعه یې په لاس راوړو، ددې لپاره چې دا کار یو نواخت وي، نو د هر یوه عدد د تفریق حاصل له حسابي اوسط څخه محاسبه کیږي. په دې معنا که هره *data* عبارت له x_i څخه وي، نو $x_i - \bar{x}$ له حسابي اوسط څخه د $i-$ ام $(data)$ انحراف دی.

څرنګه چې د اوسط له خصوصیاتو څخه پوهیږو چې $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$ دی د صفر کېدو دلیل یې دا دی چې ځینې *data* له اوسط څخه لوی او ځینې بیا له اوسط څخه کوچنی وي، یا په بل عبارت ځینې انحرافونه مثبت او ځینې یې منفي وي. چې د هغوی مجموعې یو بل سره خنثی کوي.

ددې ستونزې له منځ وړلو لپاره له مطلقه قیمت څخه کار اخیستل کیږي یعنې د

$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x})$

پر ځای د

$|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}| = \sum |x_i - \bar{x}|$

څخه کار اخیستل کیږي.

ښکاره خبره ده په هره اندازه چې دا مقدار زیات وي، تیت والی زیات دی، په هره اندازه چې کم وي، تیت والې یې کم دی که پورتني مقدار صفر وي، نو ټول اطلاعات سره مساوي دي، بیا هم مشکل پاتې کیږي او هغه مشکل دا دی چې که د نمونې اندازه زیاته شي یا نورې دیتاوې علاوه شي نو پورتنی مجموعه زیاتیږي، ایا دا به صحیح خبره وي چې د *data* په زیاتوالي سره تیت والی هم زیات شي؟

پام مو وي چې تیت والی د احصائیوي جامعې ذاتي خاصت دی او په کارنه ده چې د *data* په زیاتوالي یا کموالي سره لړ او زیات شي، نو د دې لپاره چې د *data* د شمېر تاثیر له منځه یوسو، نو پورتني مجموعه *data* په (n) وېشو او $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|)$ چې له اوسط څخه انحراف (وسطي انحراف) دی او کولای شو پر ځای یې $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ په نظر کې

ونیسو، نو د تیت والي معیار چې واریانس نومیږي په لاندې ډول لاس ته راځي چې په (σ^2) یا S^2 سره ښودل کیږي.

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

یا په بل عبارت واریانس د مجذورونو اوسط دی له حسابي اوسط څخه او یا د مقدارونو د انحرافونو د مربعګانو اوسط د واریانس په نامه یادیږي چې په احصائیه کې د تیت والي د معیار په حیث مروج دی.

- پام مو وي چې که له هرې *data* سره یو ثابت عدد جمع او یا یې ترې تفریق کړو، د واریانس په مقدار کې تغیر نه راځي. او که هره *data* د k له یو ثابت عدد سره ضرب شي، واریانس په k^2 کې ضربیږي.

لاندې مثالونه ددې مفهوم ښکارندوي دي.

مثال1: د 105 , 104 , 103 , 102 , 101 واریانس پیدا کړئ.

له هر عدد څخه 100 تفریقوو لرو چې:

1,2,3,4,5

$$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$S^2=\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}=\frac{10}{5}=2$$

2مثال: که د $x_1,x_2\ldots x_n$ د 5 واریانس عدد وي، د $-x_1+5,-x_2+5,\ldots-x_n+5$ واریانس پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د 5 عدد ورسره جمع شوي دي. په واریانس کې تغیر نه راځي. څرنګه چې هره *data* په (-1) کې ضرب شوي ده، نو واریانس په $(-1)^2$ کې ضربیږي.

$$S^2=(-1)^2\cdot 5=5$$

نوټ: که *data* په صنفونو وېشل شوي وي واریانس له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2=\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}$$

3مثال: د لاندې جدول واریانس پیدا کړئ.

x_i	2	4	6
f_i	2	4	2

$$\bar{x}=\frac{2\cdot2+4\cdot4+2\cdot6}{8}=\frac{32}{8}=4$$

$$S^2=\frac{2(2-4)^2+4(4-4)^2+2(6-4)^2}{8}=\frac{16}{8}=2$$

کولای شو چې واریانس له $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$ یا د $S^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-(\frac{\sum x_i}{n})^2$ او یا د $S^2=\frac{1}{n}[x_1^2+\ldots x_n^2]-\bar{x}^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2$ فورمول په لاس راړو.

4مثال: 10 زده کوونکو د ریاضي په مضمون کې له 100 نمرو څخه لاندې نمرې اخیستنې دي، واریانس یې پیدا کړئ.

46 , 50 , 52 , 60 , 63 , 64 , 51 , 61 , 55 , 66

حل: لومړی یې $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ له فرمول څخه واریانس پیدا کوو:

x_i	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
46	-10.8	116.64
50	-6.8	46.42
52	-4.8	23.04
60	3.2	10.24
63	6.2	38.44
64	7.2	51.84
51	-5.8	33.64
61	4.2	17.64
55	-1.8	3.24
66	9.2	84.64
568	-	425.60

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{568}{10} = 56.8$ $\qquad$ $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{425.60}{10} = 42.56$

اوس یې د $S^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\frac{\sum x_i}{n})^2$ له فورمول څخه په مستقیم ډول واریانس پیدا کوو:

x_i	$(x_i)^2$
46	2116
50	2500
52	2704
60	3600
63	3969
64	4096
51	2601
61	3721
55	3025
66	4356
مجموع 568	32688

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2 = \frac{32688}{10} - (\frac{568}{10})^2 = 3268.80 - 3226.24$$

$$S^2 = 42.56$$

په پایله کې له دواړو فورمولونو څخه عین ځواب په لاس راځي.

د وریانس مربع جذر معیاري انحراف دی.

$$S = \sqrt{S^2}$$

مثال: که په پنځو مضمونونو کې احمد او محمود لاندې نمرې اخیستې وي د احمد او محمود د نمرو واریانس په لاندې ډول لاس ته راځي:

احمد	66	43	37	50	54
محمود	54	49	47	48	52

احمد:

$$\overline{x} = \frac{66+43+37+50+54}{5} = 50$$

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
66	16	256
43	-7	49
37	-13	169
50	0	0
54	-4	25
مجموع	0	490

$$\text{Variance}: \delta^2 = \frac{490}{5} = 98$$

$$\text{S.d}: \delta = \sqrt{98} = 9.9$$

محمود:

$$\overline{x} = \frac{54+49+47+48+52}{5} = 50$$

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
54	4	16
49	-1	1
47	-3	9
48	-2	4
52	2	4
مجموع	0	34

$$\text{Variance}: \delta^2 = \frac{34}{5} \approx 6.8$$

$\text{S.d}: S = \sqrt{6.8} = 2.6$ معیاري انحراف

- د لاندې دیتا واریانس د دواړو فورمولونو په واسطه پیدا کړئ.

1 5 6 7 9

$$\overline{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$x_1^2 + \dots x_5^2 = 1+25+36+49+81 = 192$$

$$S^2 = \frac{192}{5} - (5.6)^2 = 38.4 - 31.36 = 7.04$$

او یا په مستقیم ډول:

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5} = \frac{21.16+0.36+0.16+1.96+11.56}{5}$$

$$= 7.04$$

- ایا امکان لري چې د یوې دیټا واریانس صفر وي، که ځواب هو وي، د کوم شرط پر اساس امکان لري؟

ځواب: که دې یوې دیټا ټول عددونه سره مساوي وي، په دې صورت کې د دیټا واریانس صفر کیږي.

که له اطلاعاتو سره یو ثابت عدد جمع شي واریانس تغیر نه کوي، خو که اطلاعات د a په ثابت عدد کې ضرب شي په دې ډول چې عددله یوه څخه لوی وي اطلاعات لوبږي او په پایله کې تیت والی به یې زیاته شي او که $a > 1$ او مثبت وي اطلاعات به سره نژدې شي او په نتیجه کې واریانس به یې کوچنی شي او که $a < 0$ وي په تیت والی به همدا تاثیر لري.

د مثال په ډول: که دولت تصمیم ولري چې د دولت د هر کارکوونکي تنخوا 1000 افغانی زیاته شي، په پایله کې په واریانس کې تغیر نه راځي او که دولت تصمیم ونیسي چې د دولت د کارکوونکو تنخوا 10% زیاته شي، نو په دې صورت کې که د هر مامور معاش x_i وي، نو 10 فیصده یې $0.1x_i$ کیږي او له زیاتولای وروسته د مامور معاش $x_i = x_i + 0.1x_i = 1.1x_i$ څرنګه چې $(1.1)^2 = 1.21$ کیږي، نو دمعاش له زیاتوالی څخه وروسته د تنخوا واریانس په 1.21 کې ضربیږي یعنې د معاش تیت والی زیاتیږي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- د هغه ساعتونو شمیر چې په یوه اونۍ کې زده کوونکو د ورزش لپاره ټاکلی دی، په لاندې ډول دی.

3 2 1 4 3 2 2

ددې دیټا واریانس پیدا کړئ.

حل:

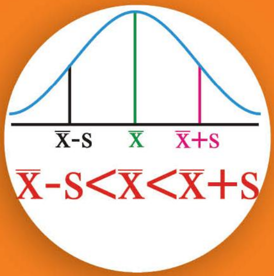
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{اویا:} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\bar{x} = \frac{3+2+1+4+3+2+2}{7} = \frac{17}{7} = 2.428$$

$$S^2 = \frac{3^2+2^2+1^2+4^4+3^2+2^2+2^2}{7} - (2.428)^2$$

$$S^2 = \frac{9+4+1+16+9+4+4}{7} - 5.895$$

$$S^2 = \frac{47}{7} - 5.895 = 0.819$$



معياري انحراف

(Standard deviation)

د درسي کتاب (381) مخ   د لوست وخت(1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • د ورکړل شوي *data* د معياري انحراف د پيداکولو طريقه زده کړي. • په دې وپوهيږي چې د واريانس مربع جذرله معياري انحراف څخه عبارت دی. • د راکړل شوي *data* معياري انحراف پيداکړای شي. • د معياري انحراف او واريانس تر منځ په اړيکه وپوهيږي. • د احصائيوي مسايلو په حلولو کې له معياري انحراف څخه استفاده وکړای شي او په اهميت يې پوه شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	هغه منحني چې داړو خواو ته متناظر وي، د طبيعي منحني يا Narmal curve په نامه يادېږي چې د زنګ شکل يا (Bell shaped) لري. په نارمل منحني کې تيت والی داسې دی چې که S د احصائيوي جامعې معياري انحراف وي، نو د احصائيوي جامعې د افرادو تيتوالی په دې ډول دی، د مثال په ډول که حسابي اوسط $\overline{x}$ د 5 عدد او معياري انحراف S يې 2 وي، غواړو وپوهيږو چې څو فيصده اطلاعات د $(5-2,5+2)$ په فاصله کې يا په $(3,7)$ کې واقع دي، د نارمل منحني په دې ساحه کې 68 فيصده ديتا واقع وي، ددې لوست په اضافي معلوماتو کې مثال حل شوي دی.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

ځرنګه چې له دې فعاليت سره زده کوونکي تر اوسه پورې نابلده دي، نو محترم ښوونکي دې له هغوي سره مرسته وکړي، لومړی جدول د تختنې پر مخ وليکئ چې x_i يا هره *data* ا و $\overline{x}$ د *data* حسابي اوسط دی $(\frac{8+9+6+4+8}{5}=7)$ او $(x-\overline{x})$ له اوسط څخه د هرې *data* انحراف او $|x_i-\overline{x}|$ د انحراف مطلقه قيمت او $(x_i-\overline{x})^2$ له اوسط څخه د انحراف مربع ده.

ښکاره خبره ده چې کارخانې ته د توکو د فرمايشو د تسليمي دوخت اوسط 7 دی او د انحرافونو د مطلقه قيمت اوسط يا وسطي انحراف عبارت دی له $1.6=\frac{8}{5}=\frac{1+2+1+3+1}{5}$ او وراياانس يې $3.2=\frac{16}{5}=\frac{1+4+1+9+1}{5}$ دی.

د واريانس مربع جذر يا معياري انحراف $1.78=\sqrt{3\cdot 2}$ دی.

ځرنګه چې زده کوونکو د واريانس فورمول په مخکينی لوست کې زده کړی دی، نو د واريانس د فورمول مربع جذر

$s=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n}}$ له معیاري انحراف څخه عبارت دی.

زده کوونکي مجبور نه دی چې ثبوت یې زده کړي، دلته یوازې د اضافي معلوماتو په حیث راوړل شوي دی، د دې لوست مثال دزده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د زده کړې د پیاوړیتا لپاره دا پوښتنه حل کړئ.

پوښتنه:- د 8 , 14 , 10 , 16 , 12 عددونو معیاري انحراف پیدا کړئ.

حل:

$$\overline{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{60}{5}=12$$

$$s=\sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{40}{5}}=\sqrt{8}=2.83$$

x	$(x-\overline{x})$ (	$(x-\overline{x})^2$
12	0	0
16	4	16
10	-2	4
14	2	4
8	-4	16
60	0	40

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

په خپله خوښه په یوه روغتون کې د پنځو کسانو د کار ساعتونه په لاندې ډول راکړل شوي دي، ددې *data* معیاري انحراف پیدا کړئ.

1 3 4 5 6

$$\overline{x}=\frac{1+3+4+5+6}{5}=\frac{19}{5}=3.8$$

$$S^2=\frac{(-2.8)^2+(-0.8)^2+(0.2)^2+(1.2)^2(2.2)^2}{5}=2.96$$

$$S=\sqrt{2.96}=1.7$$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

دا چې د وریانس واحد د متحول دمجذور واحدي دي، نو ستونزي پیدا کوي، د مثال په ډول که محمود د خپل ټولګي د زده کوونکو د تنې لوړوالی د (m) په واحد، احمد د (cm) په واحد اندازه کړي وي، په دې صورت کې د احمد د اندازه کولو واریانس به نظر، د محمود اندازه کولو ته (10000) چنده وي، داسې ښکاري چې د احمد په اندازه کولو کې تیت والی زیات دی. ددې لپاره چې دا توپیر له منځه ولاړ شي، کوښښ کیږي چې د واریانس او حسابي اوسط په واحد کې دا عمده توپیر د واریانس د جذر نیولو په واسطه له منځه ولاړ شي. د واریانس مربع جذر ته معیاري انحراف وایي، معیاري انحراف په σ او یا S سره ښودل کیږي.

د معياري انحراف واحد د متغير له واحد څخه عبارت دی. $s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2}$

1- که ټولې $data$ سره مساوي وي، نو واريانس او معياري انحراف صفر کيږي او برعکس که واريانس او معياري انحراف صفر وي، ټول اطلاعات سره مساوي دي، د مثال په ډول د 20،20،20 عددونو معياري انحراف صفر دی.

2- که له هرې $data$ سره يو عدد جمع او يا ترې تفريق شي، واريانس او معياري انحراف تغير نه کوي.

3- که هره $data$ د k په يوه ثابت عدد کې ضرب شي، معياري انحراف د $|k|$ او واريانس په k^2 کې ضربيږي.

1مثال: که د (x, y, z) د $data$ معياري انحراف 5 وي.

a: د $(x+3, y+3, z+3)$ معياري انحراف پيدا کړئ.

b: د $(-3x+3, -3y+3, -3z+3)$ معياري انحراف پيدا کړئ.

ځواب:

a) د (3) د عدد په جمع کولو سره معياري انحراف تغير نه کوي، هماغه د (5) عدد دی

b) څرنګه چې هره $data$ په (-3) کې ضرب شوي ده، نو معياري انحراف يې: $s=|-3|\cdot 5=15$ کيږي.

2مثال: د $(2,6,10,14)$ عددونو معياري انحراف د $(1,3,5,7)$ د عددونو د معياري انحراف څو چنده دی؟

حل: څرنګه چې د $(2,6,10,14)$ عددونه د $(1,3,5,7)$ د عددونو دوه چنده دي، نو معياري انحراف يې هم د $(1,3,5,7)$ عددونو دوه چنده دي.

3مثال: که د $x_1, x_2, \ldots x_n$ د عددونو واريانس د 5 عدد وي، د $-x_1+5, -x_2+5, \ldots -x_n+5$ واريانس څو کيږي؟

حل: د 5 د عدد په جمع کولو سره واريانس تغير نه کوي، خو واريانس يې عبارت دی له:

$(-1)^2\cdot 5=5$

4- د $(\bar{x}\pm s)$ يا د $\bar{x}-s<\bar{x}<\bar{x}+s$ په ساحه کې تقريباً 68.27 فيصده مشاهدې شاملې دي.

او د $(\bar{x}\pm 2S)$ په ساحه کې تقريباً 95.45 فيصده مشاهدې شاملې دي.

او د $(\bar{x}\pm 3S)$ په ساحه کې تقريباً 99.73 فيصده مشاهدې شاملې دي.

4 مثال: لاندې د 12 مختلفو ډولونو درمل وزن په ګرام سره راکړل شوي دی.

a: حسابي اوسط و b: معياري انحراف يې پيدا کړئ.

c: د $(\bar{x}\pm s), (\bar{x}\pm 2s)$ او $(\bar{x}\pm 3s)$ په ساحو کې څو فيصده مشاهدې شاملې دي.

43,54,45,44,58,47,50,52,51,45,48,46

حل:

43,44,45,45,56,47,48,50,51,52,54,58

x	x^2
43	1849
54	2916
45	2025
44	1936
58	3364
47	2209
50	2500
52	2704
51	2601
45	2025
48	2304
46	2116
583	28549

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{583}{12} = 48.58$$

$$s \cdot D = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{28549}{12} - (\frac{583}{12})^2}$$

$$s = \sqrt{2379.08 - 2360.34}$$

$$s = \sqrt{18.74} \approx 4.33$$

په $(\bar{x} \pm s) = 48.58 \pm 4.33$ ساحه کې52.91 او 44.25 ، نو په پایله کې په دې ساحه کې 8 ډوله درمل دي چې فیصدي یې

عبارت ده له:

$$100 \cdot \frac{8}{12} = 66.66 \approx 67\%$$

په $(\bar{x} \pm 2S)$ ساحه کې

$$\bar{x} \pm 2S = 48.58 \pm 2(4.33)$$

57.24 و 39.92

په11ډوله درمل دي.

$$100 \cdot \frac{11}{12} = 91.66 \approx 92\%$$

په $(\bar{x} \pm 3S)$ په ساحه کې

$$(\bar{x} \pm 3S) = 48.58 \pm 3(4.33)$$

61.57 او 35.59 دي.

چې ټول درمل په دې ساحې کې شامل دي:

$$100 \cdot \frac{12}{12} = 100\%$$

5- که $(data)$ په صنفونو کې ترتیب شوي وي، نو معیاري انحراف یې د لاندې فورمول په واسطه پیدا کیږي:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

5مثال: د $\{6,6,4,6,4,2,8,8,8,2,2,6,6\}$ عددونو معیاري انحراف عبارت دی له:

x_i	f_i	f_ix_i	$\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})$	$(x_i-\overline{x})^2$	$f_i(x_i-\overline{x})^2$
6	5	30	5.23	0.77	0.59	2.95
4	2	8	5.23	−1.23	1.51	3.02
2	3	6	5.23	−3.23	10.43	31.29
8	3	24	5.23	2.77	7.67	23.01

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\overline{x})}$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{13}(2.95+3.02+31.29+23.01)}=\sqrt{\frac{1}{13}(60.27)}=\sqrt{4.64}$$

$$s=2.15$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د پوهنې وزارت د ځلورو تلویزیونونو پروګرامونو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي دي معیاري انحراف یې پیدا کړئ.

1 3 4 5

حل: ځرنګه چې د واریانس مربع جذر معیاري انحراف دی، نو لومړی د پورتنی دیتا واریانس حسابوو.

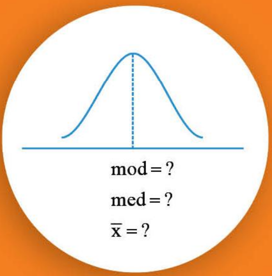
$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i^2}{4}-\overline{x}^2 \qquad \overline{x}=\frac{1+3+4+5}{4}=\frac{13}{4}=3.25$$

$$S^2=\frac{1^2+3^2+4^2+5^2}{4}-(3.25)^2$$

$$S^2=\frac{1+9+16+25}{4}-10.56$$

$$S^2=\frac{51}{4}-10.56=12.75-10.56=2.19$$

معیاري انحراف $S=\sqrt{2\cdot 19}=1\cdot 479$



د مرکزي معیارونو پرتله کول د نارمل منحني په واسطه

د درسي کتاب (371)مخ **د لوست وخت(1 درسي ساعت**

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي ، ذهنیتي)	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • نارمل منحني وپيژني. • وپوهيږي چې نارمل منحني د مرکزي معیـارونو (حسابي اوسط، میانـه او مـوډ) د پرتله کولو لپاره استعماليږي. • درك کړي چې نارمل منحني د مياني، حسابي اوسط او موډ موقعيت يو دی يا په بل عبارت تقريبا سره مساوي وي. $(\text{mod} = med = \bar{x})$
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتني او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته دې د ورودي برخې پوښتنه زده کوونکو ته توضيح شي چې په نارمل منحني کې $\text{mod} = med = \bar{x}$ دی او دا يو متناظر منحني دی.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

ددې لوست فعاليت دې استاد کار کړي او زده کوونکو ته دې توضيح شي، څه وخت چې منحني متناظر نه وي، د ښـي او کيڼې خـوا تيـت والـي داسـې دی چې کـه تيـت والـی ښـې خواتـه وي، نـو $\bar{x} > med > \text{mod}$ او کـه تيـت والـی کيڼې خواتـه وي نو $\bar{x} < med < \text{mod}$ وي.

له توضيح کولو وروسته دواړه مثالونه دې محترم ښوونکي د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

که د 16 د زده کوونکو د تنې لوړوالی د انچ پر حساب په لاندې ډول راکړل شوي وي:

64 , 67 , 62 , 66 , 63 , 64 , 63 , 69 , 63 , 65 , 67 , 71 , 65 , 64 , 72 , 66

ددې *data* حسابي اوسط او معياري انحراف پيدا کړئ او هم وواياست چې څو فيصده مشاهدې د $(\bar{x} \pm S)$, $(\bar{x} \pm 2S)$ او $(x \pm 3S)$ په ساحو کې شاملې دي.

حل: لومړی ډیتا په صعودي ډول لیکو:

62 , 63 , 63 , 63 , 64 , 64 , 64 , 65 , 65 , 66 , 66 , 67 , 67 , 69 , 71 , 72

ځواب: $s = 2.82$ $\bar{x} = 65.69$

د $(\bar{x} \pm S)$ ، په ساحه کې 75% د $(\bar{x} \pm 2S)$ په ساحه کې ,93.75% او د $(\bar{x} \pm 3S)$ په ساحه کې ,100% مشاهدات دي.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د ارزونې لپاره لاندې پوښتنې له زده کوونکو څخه وپوښتئ:

که د یوې ازموینې د نمرو توضیح تقریبا د نورمال په شکل وي که حسابي اوسط یې 650 او معیاري انحراف یې 100 وي:

a) د یوې تصادفي نمرې چانس د 450 او 850 ترمنځ څومره دی؟

b) له 1000 نمرو څخه څو نمرې به د 450 او 850 په منځ کې وي؟

حل:

a)

$\sigma = 100$ او $\overline{x} = 650$

$$650 - 2\sigma \le \overline{x} \le 650 + 2\sigma$$

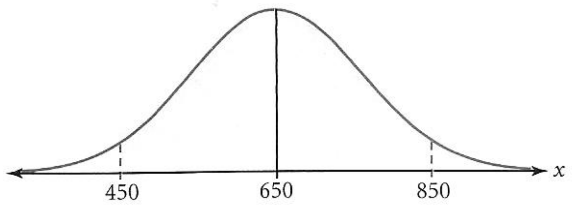
نو د 450 او 850 ترمنځ د یوې نمرې احتمال **95%** دی.

b)

د **95%** د 1000 مساوي دی په:

$$0.95 \cdot 1000 = 950$$

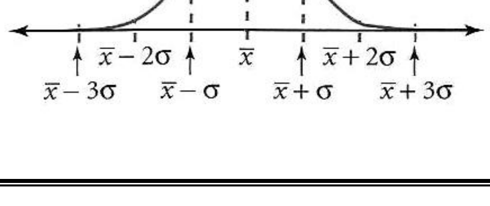
یعني له 1000 نمرو څخه 950 نمرې د 450 او 850 ترمنځ واقع دي.



ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- نارمل توزیع (Normal Distributions): د دیتا متناظره توزیع ده، نسبت حسابي اوسط ته ($\overline{x}$) هغه منحني چې په هستوګرام (Histogram) کې د مستطیلنو د د تنصیف له ټکو څخه تیر شي چې دیتا په نارمل ډول توزیع شوي وي د نارمل منحني (Normal Curve) په نامه یادیږي چې نارمل منحني د حسابي اوسط او معیاري انحراف په واسطه تعریف کیږي.

یو معیاري نارمل منحني (Standard Normal Curve) داسې یو منحني دی چې حسابي اوسط یې صفر او معیاري انحراف یې 1 وي لاندې شکل وګورئ.



2- نارمل منحني د یو موډل په شکل قبوله شوي ده.

a) دنارمل منحني ګراف د رياضي یوه تابع ده او د تصادفي پېښو لپاره یو موډل دی.

b) دنارمل منحني ګانو شمېر زيات دي چې د اوسط او معياري انحراف په مشخصو قيمتونو سره ټاکل کيږي.

c) نارمل منحني متناظر شکل لري چې اعظمي لوړوالی يې په وسط کې قرار لري.

d) نارمل منحني یو متمادي (متصل) منحنی دی چې د x د هر قيمت لپاره د y یو قيمت لري.

e) د y قيمت هر وخت مثبت دی او د x قيمتونه يا مثبت يا منفي وي.

f) نارمل منحني د x محور قطع کولای نه شي، یا د x محور يې افقي مجانب دی.

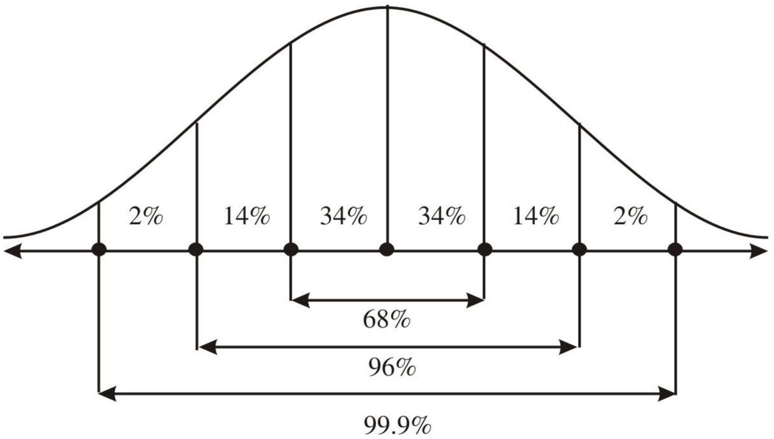
g) د نارمل منحني لاندې سطحه 1 واحد ده.

د مثال په ډول: که د $data$ حسابي اوسط 5 او معياري انحراف يې 2 وي

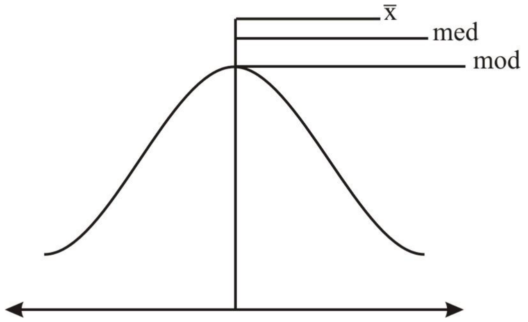
غواړو وپوهيږو چې څو فيصده ډيتا د $(5-2, 5+2)$ يا $(\overline{x}-S, \overline{x}+S)$ په انټروال يا د $(3,7)$ په انټروال کې واقع ده. په لاندې منحني کې ښودل شوي ده چې 68% په دې انټروال کې واقع ده، همدارنګه د $(5+4 \ , \ 5-4)$ يا په $(\overline{x}-2S, \overline{x}+2S)$ او يا په $(1,9)$ ، 96% ډيتا واقع ده او بالاخره د $(5-3S \ , \ 5+3S)$ په انټروال کې تقريباً 100% ډيتا واقع ده.

دا مقدارونه پر منحني باندې تقريبي دي ددې مقدارونو محاسبه د معياري انحراف د لوست په اضافي معلوماتو کې په لاس راوړل شوي ده.

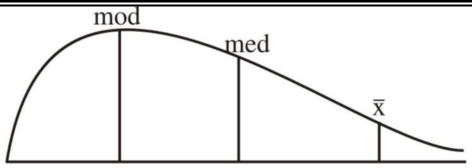
که S د واريانس جذر او يا معياري انحراف وي، د نارمل په توضيح کې د $\overline{x} \pm S$ په ساحه کې تقريباً 68.27% مشاهدات، د $\overline{x} \pm 2S$ په ساحه کې تقريباً 95.45% مشاهدات او د $\overline{x} \pm 3S$ په ساحه کې تقريباً 99.73% مشاهدات شامل دي.



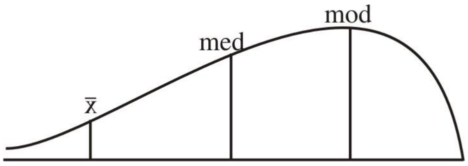
که منحني متناظر وي په دې صورت کې $\text{mod} = med = \overline{x}$ دي.



که تيت والي ښي خواته وي $\text{mod} < med < \overline{x}$ وي، لکه لاندې شکل:

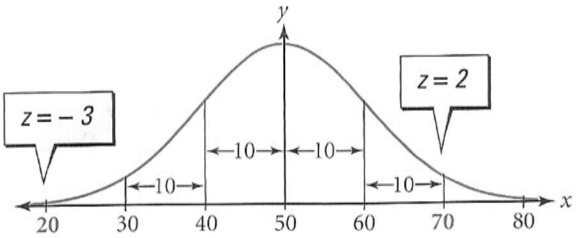


او که تیت والی کینږي خواته وي $\bar{x} < med <$ mod

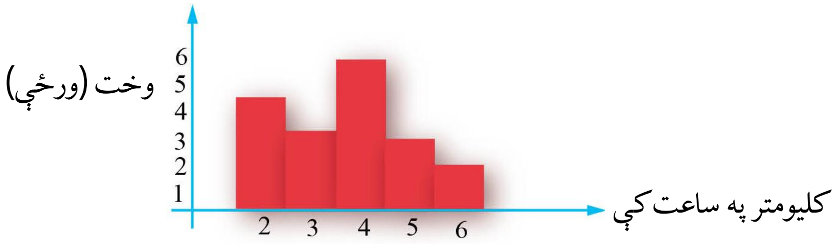


دZ نمرې (Z- scores) : یوه اندازه ده، که حسابي اوسط او معیاري انحراف معلوم وي، له حسابي اوسط څخه د نمرې فاصلې ښیي.

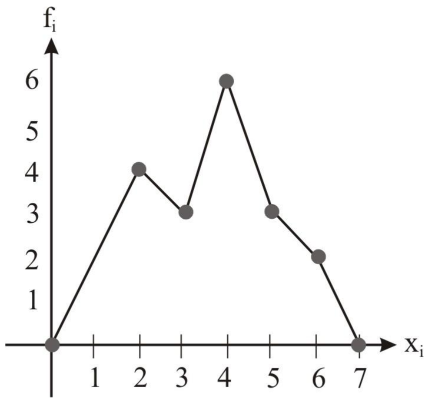
د مثال په ډول: که د یوې دیتا حسابي اوسط 50 او معیاري انحراف یې 10 وي، نو د 70 نمرې Z- scores د 2 عدد دی څکه چې دا نمره د 2 واحدو په اندازه له اوسط څخه پورته واقع ده او د 20 د نمرې Z- scores 3 دی. په دې معنا چې دا نمره د 3 په اندازه له حسابي اوسط څخه لاندې واقع ده.



1- لاندې ګراف د باد سرعت توزيع په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په ګراف کې د راکړل شوو معلوماتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فريکونسيو څو ضلعي ګراف رسم کړئ که چيرې يوې کښتۍ ته د حرکت ورکولو لپاره 5 کيلومتره په ساعت کې سرعت ته اړتيا وي، نو څو ورځې د کښتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟ په دې پوښتنه کې ولې د فريکونسيو د څو ضلعي ګراف نظر مستطيلي ګراف ته مناسب دی؟



حل:



له شکل څخه ليدل کيږي چې کښتۍ ته د حرکت ورکولو لپاره 5 ورځې مناسبې دي.

ددې *data* لپاره د فريکونسيو د څو ضلعي ګراف مناسب دی، که چې پورتني او لاندېني سرحدونه يې معلوم نه دي او د صنفونو منځني ټکي په شکل کې راکړل شوي دي، نو له همدې سببه د فريکونسيو څو ضلعي ګراف مناسب دی.

د دريم جز حل: د فريکونسو د څلور څلعي ګراف مناسب دی، ځکه چې پورتني او لاندېني سرحدونه يې معلوم نه دي او د صنفونو مرکزونه معلوم دي او د فريکونسي د څو ضلعي ګراف د رسمولو لپاره د صنفونو منځني ټکې په کار دي.

2- فريکونسيو څو ضلعي ګراف هغه ګراف دی چې .... په افقي محور او........ د عمودي محور پر مخ ښودل کيږي.

الف) صنفونو مرکز- نسبي فريکونسي

ب) نسبي فريکونسي- د صنفونو مرکز

ج) د صنفونو حدود- مطلقه فریکونسي

د) د صنفونو مرکز – مطلقه فریکونسي

ځواب: د (د) جز سم دی.

3- د ساقې او پاڼې ګراف راکړل شوي دي، له دې ګراف څخه یې اړونده *data* ولیکئ:

ساقه	
1	0 3 3 4
2	0 2 4 8 8
3	2

ځواب:

10 13 13 14 20 22 24 28 28 32

4- کوم ګراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لورې کې) دوران ورکړو، تر څو میله یي ګراف لاس ته راشي.

الف: د ساقې او پاڼې ګراف

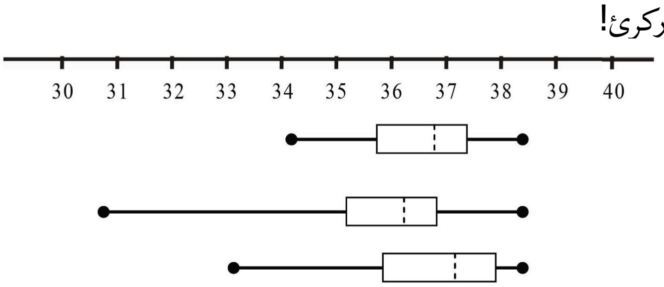
ب: مستطیلي ګراف

ج: د فریکونسیو څو ضلعي ګراف

د: دایروي ګراف

حل: د الف جز سم دی.

5- لاندې ګراف د الف، ب، او ج د درېو ټولګیو د ریاضي ازموینې نمرې ښکاره کوي، ګراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنه ځواب ورکړئ!



د الف صنف (A)

د ب صنف (B)

د ج صنف (C)

- د کوم ټولګي د تحول ساحه زیاته دی؟
- د کوم ټولګي د نمرو تیت والی تر ټولو زیات دی؟
- د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو زیاته ده؟ او د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو کوچنی ده؟
- دا درې تولګي، نمرو ته په پام سره چې په ازمونیه کې یې اخیستې دي له کمزورې څخه د قوي خواته ترتیب کړئ.

ځواب:

$R_A = 37.5 - 33 = 4.5$
$R_B = 37.5 - 30 = 7.5$
$R_C = 37.5 - 32 = 5.5$

- لیدل کیږي چې د ب د ټولګي د تحول ساحه تر ټولو زیاته ده.

- د ج ټولګي میانه له ټولو زیاته او د ب ټولګي میانه له ټولو کمه ده.

- د ب ټولګي تیت والی زیات دی.

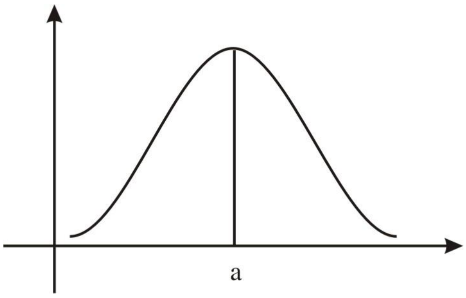
- د ب ټولګي، د ج ټولګی، د الف ټولګی

$\bar{x}$ الف =36.41

$\bar{x}$ ب=34.94

$\bar{x}$ج=35.92

6- په ګراف کې د a مقدار عبارت دی له؟



الف: میانه

ب: حسابي اوسط

ج: دریمه ربعه (چارك)

د: موډ

ځواب:څرنګه چې لیدل کیږي منحني متناظر دي، نو د a په نقطه کې حسابي اوسط میانه او موډ سره مساوي دي

7- د غذایي موادو د تولید دوې فابریکې د A او B په نامه د 48 ګرامو په قطعیو کې بسکیټ خرڅوي.

په تصادفي ډول د دواړو فابریکو د بسکیټ له قطعیو څخه 5 قطعی ټاکل شوي دي او په پوره غور سره یې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي .

A : 48.08   48.32   47.96   47.84   47.96
B : 49.16   48.84   48.88   49.08   49

- په قطعیو کې کومه فابریکه زیات بسکیټ خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکوونکي څخه استفاده کوي؟
- د بسکیټ په وېشولو کې کومې فابریکې یو شان عمل کړی دی؟

حل: د پوښتنې د حلولو لپاره د ساحې له تحول څخه استفاده کوو

$R_A = 48.32 - 47.84 = 0.48$
$R_B = 49.16 - 48.84 = 0.32$

- په B کې تیت والی نظر A ته کم دی

- په B کې نظر A ته ثبات زیات دی.

$$\bar{x}_A = \frac{48.08+48.32+47.96+47.84+47.96}{5} = \frac{24.16}{5} = 48.032$$

$$\bar{x}_B = \frac{49.16+48.84+48.88+49.08+49}{5} = \frac{244.96}{5} = 48.992$$

$$S = \frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+|x_3-\bar{x}|+|x_4-\bar{x}|+|x_5-\bar{x}|}{n}$$

$$S_A = \frac{|48.08-48.032|+|48.32-48.032|+|47.96-48.032|+|47.84-48.032|+|47.96-48.032|}{5}$$

$$S_A = \frac{0.048+0.288+0.072+0.192+0.072}{5} = 0.1344$$

$$S_B = \frac{|49.16-48.992|+|48.84-48.992|+|48.88-48.992|+|49.08-48.992|+|49-48.992|}{5}$$

$$S_B = \frac{0.168+0.152+0.112+0.088+0.008}{5} = 0.1056$$

د B کارخانې د بسکیتو په توزیع کې یو شان عمل کړي دي.

8- که د ډیټا د تحول ساحه صفر وي، د ډیټا په برخه کې څه نتیجه اخلئ؟

حل: ټول اطلاعات سره مساوي دي.

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$$

9- د هغو ساعتونو شمیر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د ورزش کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي:

1 5 7 9

ددې ډیټا واریانس پیدا کړئ.

حل:

$$\bar{X} = \frac{1+5+7+9}{4} = \frac{22}{4} = 5.5$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{(1-5.5)^2+(5-5.5)^2+(7-5.5)^2+(9-5.5)^2}{4} = \frac{(-4.5)^2+(-0.5)^2+(1.5)^2+(3.5)^2}{4}$$

$$= \frac{20.25+0.25+2.25+12.25}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 8.75$$

10- په لاندې جدول کې واریانس پیدا کړئ.

xi	25	35	45
fi	10	25	15

حل:

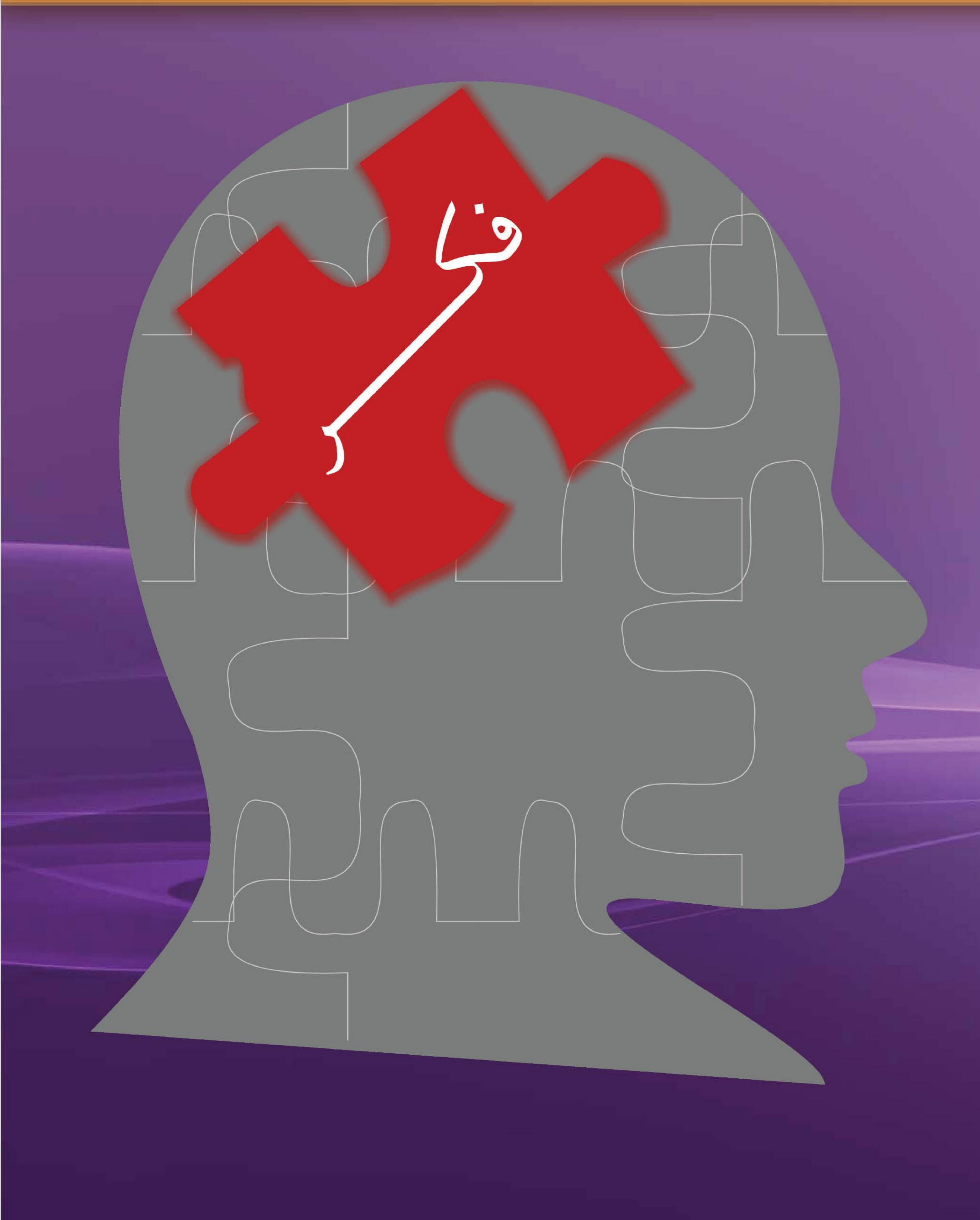
$$S^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{250 + 875 + 675}{50} = \frac{1800}{50} = 36$$

$$S^2 = \frac{10(25-36)^2 + 25(35-36)^2 + 15(45-36)^2}{50}$$

$$S^2 = \frac{1210 + 25 + 1215}{50} = \frac{2450}{50} = 49$$

نهم څپرکی
د رياضی منطق


فكر

د شهودي درک استدلال

د درسي کتاب: (391) مخ   د لوست وخت: (1 درسي ساعت)

د زده‌کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي)	• وپوهیږي چې شهودي درک کولای شي یوه طبیعي پوهه یا له استدلاله پرته احساس وي. • په دې پوه شي، کومه پایله چې د شهودې درک په واسطه منځته راځي په ډاډ سره نشو ویلای چې سل په سلو کې سمه ده. • وپوهیږي چې انسان د مجردو مفهومونو د سموالي او د زړه د ډاډ لپاره شهودي او تجربي درک ته اړ دی. • په دې پوه شي چې له شهودي درک څخه نتیجه اخیستنه کیدای شي د صحیحو حکمونو او قضیو بنسټ وي، همدارنګه د مسلئې د حل لپاره د هلو ځلو او د انګیزې پیداکولو سبب دی.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړینو فعالیتونو څخه وروسته دې ورودي پوښتنه توضیح شي. تر ډیرو پیړیو پورې انسانانو باور کاوه چې ځمکه هواره او ستورې یې پرشاوخوا ځرخې. هغوی دا خبره نه منله چې ځمکه ګرده ده او د لمر پرشاوخوا ځرخې، حال دا چې نن ورځ هر څوک دانظر تائید وي، خو د هغه زماني د خلکو له شهود سره برابره نه وه.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

د شهوي درک له تعریفولو څخه وروسته دې زده‌کوونکي ددې لوست فعالیت سرته ورسوي، خو ځرنګه چې زده‌کوونکي ددې موضوع سره بلد نه دي، محترم استاد دې مرسته او لارښوونه ورته وکړي، نتیجه دې زده‌کوونکو ته توضیح کړي، چې په ډیر برخوکې شهودي درک له موږ سره مرسته‌کوي، چې د ریاضي په مفهومونو ښه پوه شو، د مختلفو برخو د ثبوت لپاره ښه حدسونه (اټکلونه) ووهو، داسې اټکلونه لړ او ډیر احتمال لرونکي او د موقت استدلال په شکل په موږ کې قناعت پیدا کوي چې د یو حتمي استد لال لپاره هڅه وکړو.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره ددې لوست لومړی پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د ارزونې لپاره دویمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

وَإِذْ قَالَ إِبْرَاهِيمُ رَبِّ أَرِنِي كَيْفَ تُحْيِي الْمَوْتَى قَالَ أَوَلَمْ تُؤْمِن قَالَ بَلَى وَلَكِن لِّيَطْمَئِنَّ قَلْبِي قَالَ فَخُذْ أَرْبَعَةً مِّنَ الطَّيْرِ فَصُرْهُنَّ إِلَيْكَ ثُمَّ اجْعَلْ عَلَى كُلِّ جَبَلٍ مِّنْهُنَّ جُزْءًا ثُمَّ ادْعُهُنَّ يَأْتِينَكَ سَعْيًا وَاعْلَمْ أَنَّ اللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٌ ﴿260﴾ بقره

څه وخت چې ابراهیم (ع) وویل زما څښتنه ماته وښایه چې مړي په څه ډول ژوندي کوي، ویې فرمایل ایمان نه لري؟ ویې ویل ایمان خو لرم، د زړه ډاډ غواړم، ورته ویې فرمایل ((چې څلور ډوله مرغۍ راواخله ټوټې ټوټې یې کړه او سره ګډ یې کړه، بیا هره ټوټه په هر غره باندې کېږده، بیا دا مرغان ځانته راوغواړه، ډېر ژر به ستا خواته راشي او په دې ښه پوه شه، چې خدا لوی واکمن او د حکمت څښتن دی)) ﴿260﴾ بقره

پولیا وایې: (چې ریاضي دوه اړخه لري.چې یو یې شهودي او تجروبې جوړښت او بل یې مجرد جوړښت دی.)

زده کوونکي د ثبوتونو د درک کولو، منلو او د ریاضی د یو مفهوم په سموالي د ډاډ پیداکولو لپاره د شهودو تقویه کولو او د تجربې او ازمیښت له لارې استد لال رسیدلو ته اړتیا لري، تر څو داسې زمینه برابره شي چې مجرد درک صورت ونیسي.

په دې برخه کې پولیا وایې: کوښښ وکړئ هغه څه چې شهودي درته ښکاري په رسمي ډول یې په غور سره ثبوت کړئ او هغه څه چې مو په رسمي او دقیق ډول ثبوت کړي دي، په شهودي ډول یې درک کړئ چې دا یو مغزي ورزش دی.

هدف دادی چې د یو شي په سموالي ډاډه کېدل یوه خبره ده او دا چې ولې دا شی سم دی، بله خبره ده، زموږ او ستاسو هدف هم ددې ولې له پوهیدو څخه دی. ارسطو د سلیم عقل (ذهني استدلال) پر اساس حکم کړی و چې د جسمونو د ازاد سقوط په وخت کې دروند جسم نظر سپک جسم ته ژرځمکې ته رارسیږي، تر څو چې تجربه او مشاهده شوي نه وه، نورو پوهانو هم د ارسطو د ناسم نظر څخه پیروي کوله. سلیم عقل (ذهني استدلال) او (دنني منطق) یوازې هغه وخت موږ ته د حقیقتونو د کشفولو لارښوونه کولای شي چې پر مشاهده او تجربه (په عمل یا ذهن کې) ولاړ وي هغه وخت نو کولای شوو چې د پوهې او ذهني استدلال په قوه پټې او نامعلومې رابطې (اړیکې) کشف کړو او د حقیقت اټکل وکړای شو، په طبیعي پوهه کې دا حدس (اټکل) د مشاهدې او تجربې په واسطه اود ریاضي په پوهه کې د منطقي استدلال په واسطه منل کیږي او یا ردیږي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- د دوو نقطو تر منځ لنډه فاصله له یوه مستقیم خط څخه عبارت ده، ایا ددې مسلې درک کول یو شهودي درک دی، څرنګه استدلال کوئ؟

حل: د پورتنی مسلې درک کول یوه طبیعي پوهه او یا له استد لال پرته احساس دی.

2- له لاندې حکمونو څخه کوم یو یې د شهودي استدلال په طریقه د درک وړ دی؟

a : د یوې متوازي الاضلاع مقابلې زاویې سره مساوي دي.

b : د لوزي(معین) قطرونه یو پر بل عمود او یو بل نیمایې کوي.

c : په یوه قایم الزاویه مثلث کې وتر،له هرو دوو ضلعو څخه لوی دی .

حل: د (c)جز د شهودي درک په استدلال سره د درک وړ دي، خود a او bجزونه د ثبوت او استدلال څخه پرته نه درک کیږي.

تمثیلي یا قیاسي استدلال

د درسي کتاب (393)**مخ** **د لوست وخت:** (1 **درسي ساعت**)

د زده‌کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • په دې وپوهيږي چې تمثيل يوازې زموږ ذهن وېښوي اود مشاهدې او ازمېښت (تجربې) په يو خو حالتونو تکيه کوي. • پوه شي چې تمثيل د جزيې نتيجې اخيستل او يا يو مشابه والي بل مشابه والي ته نقلول دي. • وپوهيږي چې تمثيل (قياس) په حقيقت کې د بېلابېلو مفهومونو په منځ کې د يو شان والي (شباهت) پيداکول دي. • وپوهيږي سره له دې چې تمثيل يو څه محدويت لري، بيا هم کولای شي چې د رياضي د زياتو مفهومونو د درک کولو او ثبوتولو لپاره مرستندويه وي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارټونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته دې د وردې برخې پوښتنه توضيح شي چې مقصد د مشابهت پيداکول دي. چې هغه د چرګې هګۍ ده.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

محترم استاد دې تمثيلي استد لال تعريف کړي او ددې لوست فعاليت دې زده کوونکي په مناسبونو ګروپونوکې سرته ورسوي او استاد دې ورسره مرسته او لارښوونه ورته وکړي، لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د زده‌کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې:**

د زده‌کړې د پياوړتيا لپاره محترم استادکولای شي د لاندې مثال په شان يو مثال زده کوونکو ته حل کړي که m او n طبيعي عددونه وي نو: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

او دا حالت په هغه صورت کې چې mاو n طبيعي عددونه نه وي هم کاروي. $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$

چې دا ډول استد لال، تمثيلي استد لال دی.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د ارزونې لپاره ددې لوست لومړی پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

تمیثل (Analogies)   قیاس (deduction)

د ورځنې ژوند په زیاتو کارونوکې له سطحې نتیجې اخیستنې څخه تر عمده او علمي موفقیتونو او یا هنري کارونو پورې له تمثیل اویا قیاس څخه استفاده کوو. تمثیل یا قیاس د مختلفو مفهومونو تر منځ د یوشان والی پیداکول دي چې په ټولو مختلفو سطحو کې د استفادې وړ دی. د تمثیل مختلف ډولونه کولای شي چې د ریاضي د زیاتو مفهومونو د درک کولو او ثبتولو لپاره د شهودي زمینې د پیداکولو موثره مرستندویه طریقه وي. تمثیلي استدلال ته ځینې خلک د ماشومانو استد لال وایي، خو علمي نوم یې تمثیل او تمثیلي استد لال دی، فقهیان تمثیل ته ((فقهي قیاس)) وایي، خو دلته قیاس په هغه معنا نه دی چې په منطق کې په کار وړل کیږي (د یو عام حکم په اساس قضاوت کول) بلکې د شباهت په معنا دي یعنې هدف منطقي قیاس نه دی. قیاس د مشابه والي او تمثیل په معنا په کارول کیږي. د مثال په ډول ((قیاس په نفس)) یا هر څه چې په خپل ځان کې ویني، نورو ته یې هم نسبت ورکړئ، یا پنځه گوتې سره برابرې نه دي. د انسانانو د حقونو له نابرابروالي سره شباهت ورکوي چې په حقیقت کې له تمثیلي استدلال څخه استفاده شوي ده.

نشو کولای چې تمثیل د ریاضي د استدال پر ځای(چې په منطق کې ورته قیاسي استد لال وایې) په کار یو سو، د تمثیل په واسطه یوازې حدس (اټکل) وهلي شو چې د احدس امکان لري په عمل کې سم او یا ناسم وي، یوازې قیاسي استدلال دی چې د ځومره او ولی پوښتنې ځوابوي یا تمثیل کولای شي د څیړنې لپاره یوه انگیزه وي. تمثیل په یو خاص حالت کې د یوې نتیجې پیژندل دي د بل خاص حالت لپاره.

قیاس د یو کلُي قانون یوجزیي حالت ته نقلول دی یا داسې یوه نتیجه چې په عمومي حالت کې ثبوت شوي وي، په یوه خاص حالت کې یې منل دي یا د ریاضي د قیاسي استد لال خاصیت له کل څخه وجز ته تلل دي.

پوښتنه پیداکیږي دا چې ریاضي په قیاسي استد لال تکیه لري؟ ایا ریاضي یوه یقیني، بې تغیره او په خپل قانون کې تکامل نه منوونکي پوهه ده ؟

داسمه ده چې راضي منطقي، استنتاجي او یا په اصلاح کې قیاسي پوهه ده. خو باید هېر نه کړو چې د ریاضي د مفهومونو اساس او قانونونه په مشاهدو، ازمیښتونو او عمل باندې ولاړ دي.

د ریاضي هره څانگه په تعریفونو او موضوعه اصولو باندې تکیه لري. استد لال نه شو کولای چې له هیڅ څخه یې شروع کړو. استد لال یو ډول تکیه ځای لري چې ټولو ته د منلو وړ وي او په ریاضیاتو کې دا تکیه ځای هماغه موضوعه اصول دي، چې

ثبوتولوته اړتیا نه لري او سموالي يې ټولو منلي وي اود وخت په تیریدو سره يې پخواني اصول ښايې اصلاح شي، نو په اخیر نې تحلیل کې ریاضیات هم د هرې بلې پوهې په شان له طبیعته راپورته شوي دي او د طبیعت د قوانینو د رازونو په پیژندلو سره تکاملي تغیر لري او مخکنیو قوانینو او رابطو ته عمومیت ورکوي یا ریاضیات هم د هرې بلې پوهې په شان ژوندې پوهه ده. لکه څرنګه چې هر ژوندي موجود هیڅکله هم پر خپل ځای نه دریږي او کولای شي تر یوه حده مخکې ولاړشي چې د نن ورځې انسان يې په ذهن کې تصور هم نه شي کولای.

د پوښتنو حل:

1- دابیان چې (بختورکال د کال له پسرلي څخه معلومیږي) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي؟

a: د شهودي درک استدلال

b: قیاسي استدلال

c: هیڅ ډول استدلال په کې نشته

حل: د b جز سم دی.

2- د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لاندې نتیجه ثبوتیدلای شئ؟

$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$ (په قایمه زاویه مثلث کې)

استقرایي استدلال

د درسي کتاب (395)مخ　　**د لوست وخت: (1 درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي)	• ویوهیږي چې استقرایي استدلال له جز څخه وکل ته رسیدل دي. • په دې ویوهیږي چې په حقیقت کې استقرایي استدلال د لوی نمونې په برخه کې د یوې کوچنې نمونې یو خاصیت ته عمومیت ورکول دي. • درک کړي چې استقرایي استدلال په مسایلو کې د عمومي قوانینو په لور موږ ته لارښوونه کوي. او په مشاهدو کې خطا د استقرایي استدلال له ستونزو څخه یوه ستونزه ده.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ، که هغوی یې ځواب پیدا نه کړای شو، تاسو ورسره مرسته وکړئ، تر څو سم ځواب پیدا کړای شي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

د لوست فعالیت دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي او محترم استاد دې څارنه،لارښوونه او مرسته ورسره وکړي.

$1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$

$1+3+5+9=25=5^2$

$1+3+5+\ldots+n=n^2$

د فعالیت نتیجه دې زده کوونکو ته توضیح کړئ.

لومړی او دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

ددې لوست دویمه پوښتنه حل کړئ چې ځواب یې په دې ډول دی:

$1\cdot8+1=9$

$12\cdot8+2=98$

$123\cdot8+3=987$

$234\cdot8+4=9876$

$12345\cdot8+5=98765$

$123456\cdot8+6=987654$

د لوست ارزونه: (5) دقيقې:

ددې لوست لومړی پوښتنه له زده کوونکو وپوښتنئ

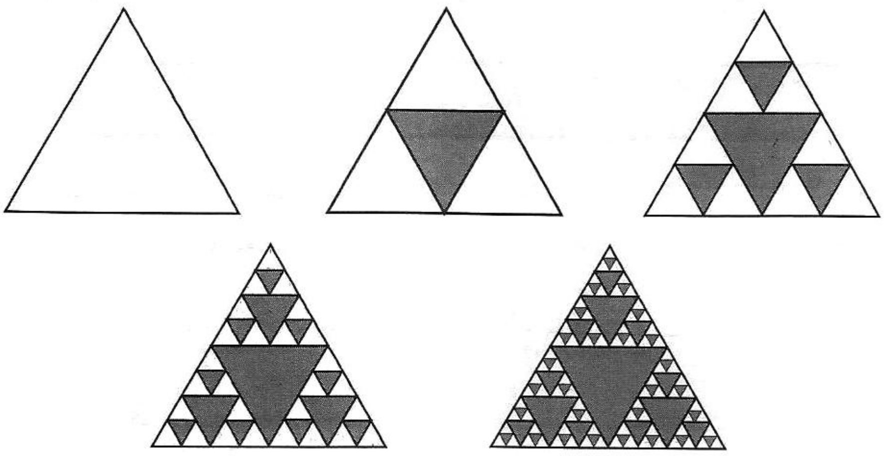
د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

څه وخت چې يو ناروغ ډاکتر ته مراجعه وکړي . ډاکتر د خپلې تجربې له مخې د ناروغی د ډول په برخه کې گمان (حدس) کوي، چې په دې وخت کې ډاکټر يوازې په خپل تجروبوي احساس باندې اتکا نه کوي او د زياتو ازميښتونو په سرته رسولو اود مختلفو علامو د مشاهدو په اساس د ناروغی د ډول او د تداوۍ په برخه کې خپل اخرنی تصميم نيسي. په دې ډول ډاکتر د لابراتواري معاينو له مشاهدو، د معلوماتو د جمع کولو، اندازه کولو او د دوي په منځ کې دنظم په اساس ناروغي تشخيصوي. په طبي مسايلو او تجربوي علوموکې استد لال، استقرايي استدلال دی. په رياضي کې هم د مسلو د حل لپاره د يوې ښې طريقې په حيث له استقرايي استد لال څخه استفاده کيږي. په دې طريقه کې لومړی حدس وهو، بيا خپل حدسونه دقيق کوو، په پای کې د سموالي په اړوند حکم کوو.

مثال: يو متساوي الاضلاع مثلث د شکل په شان په پام کې ونيسي.

a) د مثلث د ضلعو نيمايي ټکي، لکه څنگه چې په شکل ښودل شوي دی، سره ونښلوئ، درې مثلثونه چې په غاړو کې جوړيږي، په پام کې ونيسي او په تورولو سره ونښلوي.

b) درې مثلثونه چې په غاړو کې جوړيږي، په پام کې ونيسي او په تورولو سره منځني مثلث حذف کړئ دا کار په نوو دريو مثلثونو تکرار کړئ، په دې ډول (9) انطباق منوونکي مثلثونه جوړيږي.



1- د هغه نوو مثلثونو شمير چې له لومړی څخه تر څلورمی مرحلې پورې جوړ شوي دي وشمارئ او په لاندې جدول کې يې وليکئ.

مرحلې	0	1	2	...	n
شمېر	1				

د n -امی مرحلې د مثلثونو د شمير پيداکولو په برخه کې څه ويلای شئ، دا د استقرايي استد لال يو مثال دی.

- استقرايي استد لال له جزيي مفهومونو څخه کلي مفهومونو ته تلل دي، يا د ځينو مشاهدو په اساس کلي نتيجه د استقرايي استد لال په نامه ياديږي.

ساينس پوهان د طبعيت د قوانينو په کشفولو کې له دې طريقې څخه استفاده کوي او د رياضي پوهان د قضيو د ثبوت کولو لپاره له دې طريقې څخه استفاده کوي، بايد متوجه او سوچې د مشاهدو محدوديت او په مشاهدو کې خطا د استقرايې استدلال يوه ستونزه ده د مثال په ډول:

$6=1^2+1^2+2^2$

$14=1^2+2^2+3^2$

$24=2^2+2^2+4^2$

$59=1^2+3^2+7^2$

$61=3^2+4^2+6^2$

ايا د استقرايي استدلال په مرسته نتيجه اخيستلای شئ چې هر طبيعي عدد، د طبيعي عددونو د کاملو مربعگانو د جمعې د حاصل په شکل ليکلای شو، څرنگه چې د 17,19,23 لومړنې عددونه (Prime Numbers) نه شو کولای چې د طبيعي عدد د کاملو مربعگانو د جمعې د حاصل په شکل يې وليکو، نو دانتيجه سمه نه ده. او دا د استقرايې استد لال يو محدوديت دی په دې معنا چې استقرايې استدلال نه شي کولای چې هر وخت سمه نتيجه وښيي، خو کولای شي چې د رياضي د استقرا لپاره يوه ښه زمينه وي چې د رياضي له مهمو استدلالونو څخه شميرل کيږي.په تجربوي علومو کې دې ډول استد لال ته تجربوي يا علمي او په رياضي کې ورته استقرايې استدلال وايي. په احصائيه کې نتيجه گيري کولای شو چې د استقرايې استدلال په مرسته د عموميت ورکولو يوه نمونه وگڼو.

په حقيقت کې تمثيل د استقرا پيل دی چې تمثيلي استد لال د مشاهدو او ازميښتونو په يوه يا څو حالتونو باندې تکيه کوي، خو استقرايې استد لال په تکراري مشاهدو او ازميښتونو باندې تکيه لري.

په عمومي ډول استقرا د تجربو اود مشاهدو په تحليل او پرتله کولو او له ازميښتونو څخه راغلو، نتيجو سره پيليږي، بيا نتيجه يا نتيجو څخه د نورو مشابه حوادثو په برخه کې حدس وهل کيږي او له مشاهدو او ازمېښتونو څخه وروسته استقرايې نتيجه په لاس راځي او قبليږي چې دا نتيجه (رابطه، قاعده، قانون او ...) د ټولو مشابه حالتونو لپاره سمه ده.

همدادليل دی چې نشو کولای ازمېښت د ټولو مشابه حوادثو يا پديدو په برخه کې تحقيق کړو، نو دې ډول استقرا ته ناقصه استقرا او قبولې شوي نتيجې ته فرضيه وايي.

د پوښتنو حل:

1. هغه طريقه چې ديو محدود شمير مشاهدو په اساس ترينه عمومي نتيجه اخيستل کيږي څرنگه استد لال دي؟

الف) قياسي يا تمثيلي استد لال

ب) استقرايې استد لال

ج: د شهودي درک استدلال

حل: د b جز سم دی (استقرايې استد لال دی)

2. د عددونو ترتيب ته په پام سره لاندې خالي ځايونه ډک کړئ.

$1\times8+1=9$

$12\times8+2=98$

$123\times8+3=987$

$1234\times8+4=9876$

3-

a) د دویمې پوښتنې د حل په پام کې نیولو سره کېدای شي چې د عددونو پورتني ترتیب ته تر لایتناهي پورې دوام ورکړو.

حل: نه شو کولای چې لایتناهي پورې دوام ورکړو

b) د محاسبه کولو پرته اود پورتنیو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړي چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په خالي ځایونو کې راتلای شي.

$12345 \times 8 + 5 = 98765$

$123456 \times 8 + 6 = 987654$

د رياضي د استقرا استدلال

د درسي کتاب (397) مخ   د لوست وخت: (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	• پوه شي څه وخت چې له جزيي حکمونو څخه کلي حکمونو ته ورسيږو، د نتيجې اخيستلو دې طريقې ته استقرا وايي، کيداى شي، موږ سمې او يا ناسمې نتيجې ته ورسوي. • زده کړي چې که يو بيان د n=1 لپاره سم وي او ددې په فرضولو سره چې د n=k لپاره سم دى اود n=k+1 لپاره يې ثبوت کړاى شو، نو دا بيانيه د هر طبيعي عدد لپاره سمه ده چې دې طريقې ته د رياضي استقرا وايي. • د رياضي د استقرا اهميت درک کړي چې د رياضي استقرا د يوې مجموعې د ټولو غړو لپاره يو عمومي خصوصيت دي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخــې توضيـح (5) دقيقې	له لومړنو فعاليتونو څخه وروسته ددومينو لوبه دې زده کوونکو ته وروپيژندل شي، هدف دادې چې که يوه رابطه د n=1 لپاره سمه وي، فرض کړو چې د n=k لپاره سمه ده اود n=k+1 لپاره يې سموالي ثابت کړاى شو، په حقيقت کې دې طريقې ته د رياضي استقرا وايي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

ددې لوست فعاليت دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي او محترم استاد دې مرسته ورسره وکړي چې حل يې په لاندې ډول دى.

د عددونو مجموعي مربع	د مکعبونو مجموعه	د پرله پسې عددونو مکعب
1^2	1	1^3
3^2	9	1^3+2^3
6^2	36	$1^3+2^3+3^3$
10^2	100	$1^3+2^3+3^3+4^3$
15^2	225	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$

چې نتيجه يې داده:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

د پرله پسې متوالي طبيعي عددونو د مکعباتو مجموعه د عددونو د مربعاتو له مجموعې سره مساوي ده، محترم استاد دې دا خبره توضيح کړي چې يوازې د پورتنې جدول په قيمتونو سره نتيجه اخيستنه نه پوره کيږي، تر څو چې د استقرا په طريقه ثبوت نه شي، نو استاد دې د n=k+1 لپاره فورمول ثبوت کړي چې ثبوت يې په دې ډول دى:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots I$$

ايا د $(n+1)$ مسلسل عدد لپاره سمه ده؟ يا

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^2=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots II$$

رابطه صدق کوي؟

که اوله رابطه له دويمې رابطې څخه تفريق شي، نو لرو چې:

$$(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2-\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=(\frac{n+1}{2})^2[(n+2)^2-n^2]=\frac{(n+1)^2}{4}[n^2+4n+4-n^2]$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}[4n+4]=\frac{(n+1)^2}{4}(n+1)4=(n+1)^3$$

ويلاى شو چې د III رابطې نتيجه له دويمې II رابطې سره معادله ده.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^2=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

په نتيجه کې په ډاډ سره ويلاى شو، چې د n پرله پسې طبيعي عددونو د مکعباتو مجموعه، د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده.

د زده‌کړې پياوړتيا: (7) دقيقې:

لومړى مثال د زده‌کوونکو په ونډې اخيستنې سره يې حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې

د رياضي د استقرا مرحلې له زده‌کوونکو وپوښتنئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

حکمونه کيداى شي چې کلي اويا جزيې وي

د کلي حکمونو مثالونه:

- د هرې متوازي الاضلاع قطرونه يو بل سره نيمايي کوي.
- د هرعدد يو يز رقم چې صفر وي، پر 5 پوره د ويشلو وړ دى.

د پورتنيو حکمونو جزيې يا خاص حکمونه:

- د ABCD په متوازي الاضلاع کې قطرونه يو بل سره نيمايي کوي.
- د 140 عدد پر 5 د وېش وړ دى

له کلِّي حکم څخه جز ئې حکم تللو ته قياس وايي.

څه وخت چې له جزئي حکمونو څخه کلي حکمونو ته ورسیږو د نتیجې اخیستلو دې طریقې ته استقرا وایي.

پوښتنه داده چې په ریاضي کې استقرا څرنګه په کار یوړل شي. تر څو سمه نتیجه په لاس راشي.

د مثال په ډول د $x^2 + x + 41$ دري حده په پام کې نیسو چې د لئونار د یولر هم ورته متوجه شوي وه که په دې دري حده کې $x = 0$ شي نو د 41 لومړني عدد لاسته راځي او که $x = 1$ شي نو بیا هم د 43 لومړني عدد لاسته راځي. که دې کار ته ادامه ورکړو اود x پرځای د 2،3،4،5،6،7،8،9 او 10 عددونه وضع کړو نو 47،53،61،71، 83،97، 113، 131 او 151 لومړنی عددونه (Prime Numbers) راسته راځي.

اوس که حکم وشي چې په دی درې حده کې که هر صحیح عدد چې منفي نه وي وضع شي هر وخت لومړني عدد دي.حال داچې دا حکم سم نه دي نو نه سموالی یې چیرې دی؟ تر 39 = x پورې لومړنی عدد دی خود $x = 40$ لپاره د $(41)^2$ عدد په لاس راځي چې لومړنی عدد نه دی یعنې $(41^2 + 40 + 41)$ پر 41 د ویش وړ دی.

یا د مثال په ډول د $A = 2^{2^n} + 1$ عدد په پام کې نیسو دا عدد د $n = 0,1,2,3,4$ لپاره په دې ډول دی.

$n = 0 \Rightarrow A = 2^{2^0} + 1 = 3$ $\qquad$ $n = 1 \Rightarrow A = 2^{2^1} + 1 = 5$

$n = 2 \Rightarrow A = 2^{2^2} + 1 = 17$ $\qquad$ $n = 3 \Rightarrow A = 2^{2^3} + 1 = 257$

$n = 4 \Rightarrow A = 2^{2^4} + 1 = 65537$

چې ټول لومړنی عددونه دي په (17) پیړۍ کې فرانسوي ریاضي پوه فرما ګمان کاوه چې داعدد د n په هر قیمت لومړني عدد دی خو په (18) پیړۍ کې یو لر ثابته کړه چې دا عدد د n=5 لپاره لومړني عدد نه دی .

$n = 5 \Rightarrow A = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$ چې لومړنی عددونه ندي.

یا په (17) پیړۍ کې الماني ریاضي پوه(لیپ نیتز) ثابته کړه چې د n عدد هر صحیح قیمت لپاره $n^3 - n$ پر 3 او $n^5 - n$ پر 5 او $n^7 - n$ پر 7 د ویشلو قابلیت لري هغه ګمان کاوه چې د K د هر طاق عدد اود n د هر صحیح او مثبت قیمت لپاره د $n^k - n$ عدد پر K د ویشلو وړ دی خو پخپله متوجه شوه چې $2^9 - 2 = 510$ پر 9 د ویشلو وړ نه دي..

نتیجه: د ریاضي یو حکم کیدای شي په ډیرو خاصو قیمتونو کې سم وي خو په کلي ډول ناسم وي نو څرنګه کولای شوو چې مسایل د خاص استدلال په طریقه چې د ریاضي د استقرا یا (کاملي استقرا) په نامه مشهور دی حل کړو او څرنګه کولای شو چې دا حکم په کلي حالت کې تایید کړو ددې طریقی بنسټ د ریاضي د استقرا په اصل ولاړ دی چې دا اصل دارنګه دی.

د هر طبیعي عدد د nلپاره یو حکم هغه وخت سم دی چې:

1- د n=1 لپاره سم وي.

2- n=K د سموالی له منلو نتیجه شي چې د n=k+1 لپاره هم سم دی.

د مثال په ډول وښایاست چې:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$s_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

ددې په فرضولو چې پورتنۍ رابطه د n=k لپاره سمه ده يعنې

$$s_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

چې k يو اختياري طبيعي عدد دی اوس ددې رابطې سموالي د n=k+1 لپاره څېړو يا په بل عبارت غواړو چې وښايو

$s_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$ دی

په حقيقت کې $s_{k+1} = s_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ دی، نو لرو چې:

$$s_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

اوس د استقرا د اصل په اساس حکم کولای شو چې د $s_n = \frac{n}{n+1}$ رابطه د ټولو طبيعي عددونو لپاره سمه ده، بيا هم متوجه اوسئ چې ټولې رابطې د ټولو طبيعي عددونو لپاره سمې نه وي.

د مثال په ډول

$17+2=19$

$19+4=23$

$23+6=29$

$29+8=37$

$37+10=47$

(17) له لومړني عدد څخه مو پيل کړی و، د 17 له عدد سره مود 2 جفت عدد جمع کړ، په نتيجه کې د (19) لومړنی عدد په لاس راغي، په همدې ډول مو له (19) سره دويم جفت عدد (4) جمع کړ، د (23) لومړنی عدد لاس ته راغی، د 23 عدد مو له دريم جفت عدد(6) سره جمع کړ، د (29) لومړنی عدد لاس ته راغي ايا له دې پنځو نتيجو څخه ويلای شو چې يو قانون مو کشف کړی دی؟ او ايا که دا طريقه تعقيب کړو هر وخت لومړني عدد په لاس راځي.

$47+12=59$

$59+14=73$

$73+16=89$

$89+18=107$

$107+20=127$

- بيا هم ليدل کيږي چې ټول لاس ته راغلي عددونه لومړني عددونه (Prime Numbers) دي.

$127+22=149$

$149+24=173$

$173+26=199$

$199+28=227$

$227+30=257$

خو په شپاړسم قدم کې صدق نه کوي $289 = 32 + 257$ چې 289 يو لومړنی عدد نه دی ځکه چې : $17\cdot 17 = 289$ دی يو قانون نه دي، که دوام ورته ورکړو کله لومړنی اوکله مرکب عدد لاسته راځي.

(لومړنی عدد) $323+36=359$

(مرکب عدد) $289+34=323=17\cdot 19$

(مرکب عدد) $397+40=437=19\cdot 23$

(لومړنی عدد) $359+38=397$

(لومړنی عدد) $437+42=479$

(لومړنی عدد) $479+44=523$

زموږ حدس (ګمان) سم نه و، په دې برخه کې کلي قانون شتون نه لري. له پخوا زمانو راهیسې د استقرا نظریه موجوده وه او ګټه ترې اخیستل کیده، خو د استقرا په واسطه ثبوت د شپاړسمې پیړۍ په لومړیو وختو کې رواج وموند، خو په (17) پیړۍ کې مشهور ریاضي پوه فرما له استقرا څخه ګټه اخیسته طرح کړه، خو د (ریاضي استقرا) اصطلاح د (19) پیړۍ په لومړیو کې د انګلیسي ریاضي پوه دیمورګن له خوا وکارول شوه او د استقرا له طریقې څخه د ریاضي په ثبوتونو کې استفاده کېدله.

د استقرا عمومیت:

په دې مثالونو کې چې مو تر اوسه ولیدل د ریاضي استقرا مو له n=1 څخه پیل کوله، یا د مطلوب حکم سموالي مو د n=1 لپاره وښودوه، خو ځینې وختونه لازمه وي چې داستقرا لومړنۍ مرحله له یوه طبیعي عدد $n>1$ څخه پیل کړو، د مثال په ډول $n!>3^n$ رابطې لپاره $n\geq 7$ مناسب دی

ثابت کړئ چې د m یو مناسب عدد $m>1$ موجود دی چې د هر طبیعي عدد n لپاره د $(n\geq m)$ دا رابطه $n!>3^n$ صدق کړي.

حل: لومړی ځیرو چې n باید څومره لوی وي.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n!	1	2	6	24	120	720	5040	40320
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561

لیدل کیږي چې د $n<7$ لپاره دا حکم سم نه دی، خو د $n=7$ لپاره د $n!>3^n$ رابطه سمه ده او له (7)څخه د زیاتو قیمتونو لپاره هم سمه ده . اوس فرضوو چې $k\geq 7$ لپاره دا حکم سم دی، یعنې $k!\geq 3^k$ دی، اوس غواړو وښایو چې:

$(k+1)!>3^{k+1}$

که د $k!>3^k$ د رابطې دواړه خواوې په $(k+1)$کې ضرب شي، نو لرو چې:

$(k+1)k!>(k+1)3^k$

څرنګه چې $k\geq 7$ فرض شوی دی، نو $(k+1)k!>7\cdot 3^k$

او له دې ځایه لرو چې:

$7\cdot 3^k>3\cdot 3^k=3^{k+1}$

$7\cdot 3^k>3^{k+1}$

د تعریف په اساس $(k+1)!=(k+1)k!$ دی، که په پورتنی رابطه کې وضع شي

لرو چې

$(k+1)!>3^{k+1}$

په دې ډول د $k \geq 7$ لپاره مو وښود ل چې که $k! > 3^k$ وي

نو $(k+1)! > 3^{k+1}$ دی اوس په ډاډ سره ویلای شوو چې د هر $n \geq 7$ لپاره لرو چې $n! > 3^n$ دی

په دې مثال کې ولیدل شوه چې د m مناسب عدد (7) دی، دې ډول استدلالي طریقې ته د استقرا عمومیت وایي.

د استقرا د عمومیت اصل:

فرض کړئ چې $P(n)$ د طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم وي، که $P(m)$ د $m > 1$ لپاره سم وي او د هر طبیعي عدد $k \geq m$ لپاره د $P(k)$ له صحت څخه $P(k+1)$ نتیجه شي، نو $P(n)$ د هر طبیعي عدد $n \geq m$ لپاره صحت لري.

(متوجه اوسئ چې په هره مسئله کې د m مناسب عدد پیدا کړئ)

1- مناسب m پیدا کړئ.

$2-$ د $n = m$ لپاره یې سموالی ښایو.

3- ثبوتوو که د $n = k \geq m$ لپاره صحت ولري. په هغه صورت کې د $n = k + 1$ لپاره هم صحت لري او له دې څخه نتیجه کېږي چې د هر طبیعي عدد $n \geq m$ لپاره حکم صحت لري.

د پوښتنو حل:

1- د ریاضي د استقرا په واسطه وښایاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لرو چې:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

محترم ښوونکي دې متوجه وي چې په درسي کتاب کې ددې فرمول په لیکلو کې اشتباه شوي ده.

چې د ریاضي د استقرا په واسطه په لاندې ډول ثبوتېږي:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لومړی پړاو:

$$n = 1 \qquad : \quad 1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{2\cdot 3}{6} = 1$$

صحت لري.

دویمه پړاو: فرضوو چې د n=k لپاره سمه ده.

$$n = k \qquad \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

دریم پړاو: ثبوتوو چې.

$$1^2 + 2^2 + ...k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)}{6} = \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

نو د n هر طبیعي عدد لپاره پورتنۍ رابطه سمه ده.

2- د ریاضي د استقرا په واسطه وښایاست چې:

$$2+6+10+.......+(4n-2)=2n^2 \qquad (i)$$

$$1+3+5+................+(2n-1)=n^2 \qquad (ii)$$

د (i) حل:

1- صحت لري $\quad n=1 \qquad 2\cdot1^2=2$

2- د $n=k$ لپاره یې فرضوو چې راکړل شوي رابطه سمه ده.

$$2+6+10+...........+(4k-2)=2k^2$$

3- د $n=k+1$ لپاره یې ثبوتوو چې رابطه سمه ده.

$$2+6+10+..........+4k-2+4(k+1)-2=2(k+1)^2$$

$$2k^2+4(k+1)-2=2k^2+4k+4-2=2k^2+4k+2=2(k^2+2k+1)=2(k+1)^2$$

ثبوت شوه چې پورتنې رابطه د $n=k+1$ لپاره سمه ده نو دا رابطه د ټولو طبیعی عددونو لپاره سمه ده.

د (ii) جز حل: رابطه د $n=1$ لپاره سمه ده.

$$n=1 \qquad \Rightarrow 1^2=1$$

2- د $n=k$ لپاره یې سموالی فرضوو.

$$n=k \Rightarrow 1+3+.........+(2k-1)=k^2$$

د $n=k+1$ لپاره یې سموالی ثبوتوو:

ثبوت:

$$1+3+..........+2k-1+2(k+1)-1=(k+1)^2$$

$$k^2+2(k+1)-1=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

استنتاجي استدلال

د درسي کتاب: (401) مخ   د لوست وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	• په دې وپوهېږي چې استنتاجي استدلال له هغو حقيقتونو څخه په استفادې چې د هغو سموالی مو قبول کړی دی، د نتيجې اخيستلو يوه طريقه ده. • درک کړي چې په حقيقت کې هغه طريقه چې نتيجه اخيستل او يا ثبوتول يې له هغه مفهومونو څخه په استفادې چې سموالی يې ولرو او ډاډه اوسو چې نتيجه يې هر وخت سمه ده، استنتاجي استدلال دی. • پوه شي هغه وخت له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو چې ډاډه اوسو چې نتيجه هر وخت سمه ده. يا د کلي نتيجې اخيستلو سموالي د استناجي استدلال په واسطه ثبوتېږي. • درک کړي چې کلي يا عمومي قضيې هغه حکمونه دي چې همېشه سمې دي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيدا کولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د لوست بهير او فعاليتونه(28) دقيقې:

ددې لوست فعاليت دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي او محترم استاد دې ور سره مرسته او لارښوونه ورته وکړي او زده کوونکو ته توضيح کړئ چې له هغو حقيقتونو څخه په استفادې چې د هغو سموالی مو لا مخکې قبول کړی دی عمومي نتيجه په لاس راوړو چې دې طريقې ته استنتاجي استدلال وايي، لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د لاندېني جدول په شان يو بل مثال هم کار کړئ.

عدد وټاکئ	4	7	12	35
د 5 عدد ورسره جمع کړئ	9	12	17	40
د جمعې حاصل دوه چنده کړئ	18	24	34	80
د 4 عدد ترې تفريق کړئ	14	20	30	76
په 2 يې وويشئ	7	10	15	38
ټاکل شوی عدد له دې حاصل څخه تفريق کړئ	3	3	3	3

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره لاندې پوښتنه حل کړئ:

1- وښایاست چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی.

حل: فرض کړئ چې $2m+1$ او $2n+1$ دوه طاق عددونه وي چې m او n دوه طبیعي عددونه دي:

$(2m+1)+(2n+1)=2m+2n+2=2(m+n+1)$

په دې اساس چې د (2) عدد یې مضرب دی، نو د $2\ (m+n+1)$ عدد یو جفت عدد دی.

چې دا کار د استناجي استدلال پایله ده.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

دویمه پوښتنه له زدکوونکو وپوښتئ

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د (پاپیروس رایند) په مقدمه کې چې ښایي د ریاضي تر ټولو پخوانی تاریخ وي (1650) کاله مخکې له میلاده داسې راغلي دي.

"په ډېړ سره ویلای شو چې د انسان د شعور تر ټولو لویه ځانګړتیا چې د هر ملت د تمدن د اندازې ښوونکي ده، هماغه د استدلال کولو توان دی او په عمومي ډول دا توان د یو ملت د خلکو په ریاضیکي مهارتونو کې ښودل کېږي".

د مصر د (پاپیروس رایند) په تاریخ کې یو له هغه مسایلو څخه چې په دې تاریخ کې شته، له عددونو سره لوبې کول دي، په دې ډول یو عدد ټاکل کېږي، بیا څو نوري عملیې پرې سرته رسېږي. په پای کې پرته له دې چې ټاکل شوی عدد په پام کې ونیول شي نتیجه یې هر وخت یو شي وي.

د مثال په ډول: که ددې لوست د مثال په شان د عددونو پر ځای علامې ولیکو، لکه که د ټاکل شوي عدد پر ځای د مربع شکل په پام کې ونیسو او د لومړي مثال مرحلې پرې تطبیق کړو او د جمعې یا تفریق د عملیو پر ځای له یوې کوچنۍ دایرې څخه استفاده وکړو.

ټاکل شوی عدد	□
5 ور سره جمع کړئ	□ OOOOO
مخکینۍ نتیجه دوه چنده کړئ	□ OOOOO □ OOOOO
4 واحده ترې کم کړئ	□ OOO □ OOO
د مخکینۍ نتیجې نیمایي	□ OOO
ټاکل شوی عدد ترې کم کړئ	OOO

اوس مثال په الجبري شکل یعنې د عددونو پر ځای له تورو څخه کار اخلو د ټاکل شوي عدد پر ځای یو توری په پام کې نیسو:

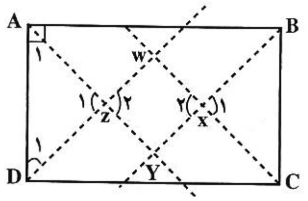
ټاکل شوی عدد	n
د ټاکل شوي عدد سره 5 جمع کړئ	n+5
د مخکینۍ نتیجې دوه چنده	2n+10
څلورو واحده ترې کموو	2n+6
د مخکینۍ نتیجې نمایې	n+3
ټاکل شوی عدد ترې کموو	3

په درېواړو حالتونو کې لیدل کېږي چې د هغه عبارتونو پر اساس چې د هغوی سموالی مو قبول کړی دې نتیجې مو په لاس راوړې. یعنې د استنتاجي استدلال څخه مو استفاده وکړه.

څه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو ډاډه یو چې نتیجه هر وخت سمه ده د پورتنیو مثالونو څخه هدف د استنتاجي استدلال سره آشنا کېدل وه له دې مثالونو څخه زیاتې یې عمومي قضیې دی، عمومي یا کلي قضیې هغه حکمونه دي چې هر وخت سمې دي د ریاضي زیاتې مهمې قضیې کلي قضیې دي، د مثال په ډول د فیثاغورس د قضیې اهمیت په دې کې نه دی چې په یوه قایم الزاویه مثلث کې صدق کوي، بلکه په ټولو قایمه الزاویه مثلثونو کې صدق کوي او یا د $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ د رابطې اهمیت په دې کې دي چې د هرې x زاویې لپاره دا مساوات صدق کوي او یا x او y د هرو دوو حقیقي مثبتو عددونو لپاره لرو چې $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ په لنډ ډول استنتاجي استدلال موږ ته ډاډ راکوي چې په لاس راغلې نتیجه خامخا سمه ده، دغه جامع والی ددې ډول استدلال د توان او ښکلتیا یوه نښه ده.

- د استنتاجي استدلال یو بل مثال: هغه شکل چې د هر مستطیل د داخلي ناصف الزاویه له قطع کېدو څخه لاس ته راځي مربع ده.

د ABCD یو اختیاري مستطیل په پام کې نیسو او د داخلي زاویو ناصفو نه یې رسموو:



1- AY د $\hat{A}$ د زاویې ناصف دی او د $\hat{A}$ زاویه قایمه ده نو: $\hat{A}_1=45^\circ$

2- DW د D د زاویې ناصف الزاویه دی او د D زاویه قایمه ده نو $\hat{D}_1=45^\circ$

نو په دې اساس د AZD مثلث متساوی الساقین دی او د $\hat{Z}$ زاویه قایمه ده، په نتیجه کې:

$\hat{Z}_1=\hat{Z}_2=90^\circ$

$AZ=DZ$....................I

2- د لومړي شمېرې له استدلال څخه نتیجه کېږي چې د (BXC) مثلث قایم الزاویه متساوی الساقین مثلث دی:

$\hat{X}_1=\hat{X}_2=90^\circ$

$BX=CX$....................II

I او II رابطو ته په پام او د ABCD د مستطیل څخه نتیجه کیږي چې د ADZ او BXC مثلونه سره انطباق منونکی دي

نو: $DZ = CX$

په همدې ډول د لومړي شمېرې د استدلال په شان نتیجه کېږي چې د CWD مثلث هم قایمه الزاویه متساوی الساقین دی.

$\hat{W} = 90^\circ$

$DW = CW$....................III

3- د I ، II او III رابطو څخه لرو چې د WXYZ څلور ضلعي مستطیل دی II او III رابطو ته په پام سره کولای شو

ولیکو چې:

$DW - DZ = CW - CX$

$WZ = WX$....................IV

IV رابطه ښيي چې WXYZ یوه مربع ده نو په پایله کې مو په عمومي حالت کې وښودل چې:

هغه شکل چې د هر مستطیل د داخلي زاویو د ناصفونو له تقاطع څخه جوړېږي مربع ده.

ددې مثال په ثبوت کې مو له هغه حقایقو (حکمونو) څخه استفاده وکړه چې سموالی یې مو مخکې منلی وه دا حکمونه

عبارت دي له:

- د هر مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180 درجې ده.
- هغه مثلث چې دوه زاویې سره مساوي وي متساوي الساقین دی.
- متقابل براس زاویې سره مساوي دي.
- که د یو مساوات له دواړو خواو څخه عین عدد کم کړو په مساوات کې تغیر نه راځي.

پورتني مثال د استنتاجي استدلال یوه بېلګه ده.

داسې نتیجې چې هر وخت سمې وي د قضیو بېلګې دي کلي قضیې هغه حکمونه دي چې همېشه سمې دي.

د پوښتنو حل

1- وښایاست چې د دوو طأقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یوجفت عدد دی:

حل: پوهیږو چې د k د هر تام عدد لپاره $2k+1$ یو طاق عدد دی اوس دوه طاق عددونه د $2k_1+1$ او $2k_2+1$ په پام کې نیسو چې k_1 او k_2 دوه طبیعي عددونه دي.

$$2k_1+1+2k_2+1=2k_1+2k_2+2=2(k_1+k_2+1)$$

دا چې د جمعې په حاصل کې چې ضریب یې د 2 عدد دی نتیجه اخلو چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یوجفت عدد دی.

2- ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

حل:

$k=1 \quad : \quad 2k+1=2\cdot1+1=3$

$k=n \quad : \quad 2n+1$

$k=n+1 \quad : \quad 2(k+1)+1=2k+2+1=2k+3$

3- د سرو زرو په 9 سکو کې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن لږ دی څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یي ترازو په واسطه له دوه ځل تللو په پایله کې تقلبي سکه وپیژنو ؟

حل: سکې درې، درې دانې په دریو ډیریو وېشو. دوه ډیرې یې د تلې په واسطه تلو که دواړه پلې سره برابري وي، نو تقلبي سکه په بل ډیرې کې ده او که پلې سره برابري نه وي، هماغه پله چې سپکه ده، تقبلي سکه په هماغه ډیرې کې ده، بیا له دریو سکو څخه یې دوه سکې یوه په یوه پله کې او بله په بله کې بږدو که پلې سره برابری وي، نو دریمه سکه تقلبي ده او که پلې سره برابرې نه وي تقلبي سکه په سپکه پله کې ده.

دمثال د نفی کولو استدلال

د درسي کتاب (403)مخ   د لوست وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	• زده کوونکي زده کړي هغه مثال ته چې وښودلای شي چې عمومي نتيجه سمه نه ده. د نفي کولو مثال وايي. • په دې وپوهيږي هغه مثال چې يو عبارت يا يو حکم نفي کوي د نفي کولو د مثال په نامه ياديږي. • دا درک کړي چې په يوه عبارت (فورمول) کې د ټولو عددونو ازمايل مشکل کار دی نو داسې يو عدد پيدا کوو چې دا خاصيت ونه لري چې دا عدد د نفي مثال دی.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارټونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيداکولو لپاره دزده کوونکو پام د ورودي برخې پوښتنې ته واړوئ.

د لوست بهير او فعاليتونه(28) دقيقې:

د لوست فعاليت دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي او محترم استاد دې ورسره مرسته او لارښوونه ورته وکړي.

$9 = 2 + 3 + 4$

$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

$22 = 4 + 5 + 6 + 7$

$39 = 12 + 13 + 14$

$74 = 17 + 18 + 19 + 20$

اوس دا پوښتنه پيداکيږي چې اياکولای شو چې هر طبيعي عدد د پرله پسې عددونو د مجموعې په شکل وليکو ددې کار لپاره ډير مثالونه شته، اياکولای شو چې ټول طبيعي عددونه وازمايو؟

له طريقو څخه يوه دا ده چې يو طبيعي عدد پيداکړو چې دا خاصيت ونه لري؟

$12 = 3 + 4 + 5$

$17 = 8 + 9$

$26 = 5 + 6 + 7 + 8$

$30 = 9 + 10 + 11$

$40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

$100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22$

$130 = 31 + 32 + 33 + 34$

$6 = 1 + 2 + 3$

$7 = 3 + 4$

$8 = ?$

ليدل کيږي چې نه شو کولای د 8 عدد د پرله پسې عددونو د مجموعې په شکل وليکو، نو د 8 عدد د نفي کولو مثال دی، دا ښيې هر طبيعي عدد نه شو کولای چې د پرله پسې عددونو د مجموعې په شکل يې وليکو.

ددې لوست مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې

لاندې نمونه په نظر کې ونيسئ.

$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$

$14 = 1^2 + 1^2 + 3^2$

$24 = 2^2 + 2^2 + 4^2$

$59 = 1^2 + 3^2 + 7^2$

$61 = 3^2 + 4^2 + 6^2$

$89 = 2^2 + 2^2 + 9^2$

احتمالي نتيجه دا ده چې: ايا کولای شو چې هر طبيعي عدد د درېو کاملو مربعګانو د جمعې د حاصل په شکل وليکو د نفي د مثال په واسطه وښيې چې پورتني نتيجه سمه نه ده.

څرنګه چې د 17 ، 19، 23 او داسې نور لومړني عددونه نه شو کولای چې د لومړنيو عددونو د کاملو مربعګانو په شکل يې وليکو چې دا د نفې کولو يو مثال دی.

د لاندې کومو حکمونو لپاره د نفي کولو مثال شته؟

a) که $x > 1$ وي، نو $x > 2$ دی.

b) که $x > 2$ وي، نو $x > 1$ دی.

c) که $ab = 0$ وي، نو $a = 0$ او $b = 0$ دی.

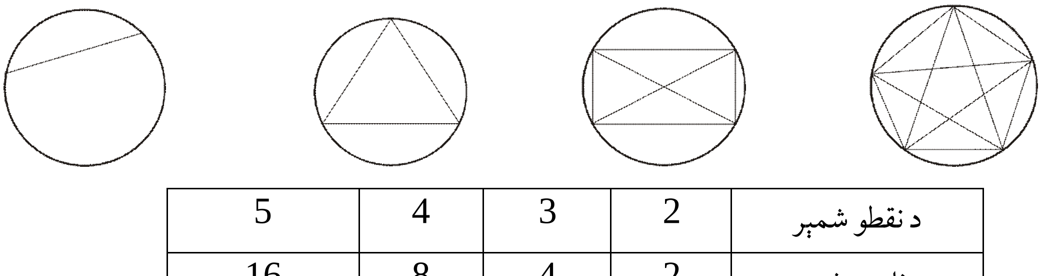
د لوست ارزونه: (5) دقيقې:

ددې لوست لومړی پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

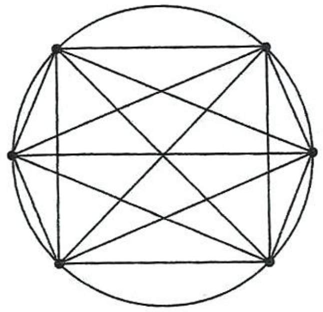
- که چيرې وويل شي د يو مثلث ارتفاعګانې د مثلث د ننه په يوه نقطه کې قطع کوي، ددې بيان لپاره د نفي کولو مثال دا دی چې د هغه مثلث ارتفاعګانې چې ضلعې يې 6،8 او 12 وي، د مثلث د ننه نه قطع کوي چې دا خاص مثال ددې ګمان لپاره د نفي کولو مثال دی.

د دايرې پر محيط دوې کيفي نقطې د يو قطعه خط په واسطه سره ونښلوئ، دايره په دوو برخو ويشي او د درېو نقطو په نښلولو سره دايره په څلورو برخو وېشل کيږي لاندې شکل د دايرې پر محيط د 2،3،4 او5 کيفي نقطو ښکارندوی دی.



5	4	3	2	د نقطو شمېر
16	8	4	2	د ناحيو شمېر

له دې څخه دا نتیجه کیږي که نقطې 6 وي، نو باید دایره په 32 برخو وویشل شي او دا خبره سمه نه ده، لاندې شکل وګورئ چې د 6 نقطو په نښلولو سره دایره په 30 برخو وېشل کیږي.



دا هغه مثال و چې زموږ ګمان یې ناسم کړ، نو ویلای شو چې د نفي د مثال په واسطه زموږ د ګمان نه سمولای ثابت شوي دی.

د پوښتنو حل:

1- د مثال د نفي کولو په استدلال سره وښایاست چې «د هر مثبت حقیقي عدد مربع د عدد له مکعب څخه کوچنی ده»

حل:

$-2 \in IR$ $\qquad$ $(-2)^2 > (-2)^3$ یا $4 > -8$

لیدل کیږي چې د هر حقیقي عدد د مکعب د عدد له مربع څخه لوی نه دی.

2- د لاندې کوم بیان لپاره د نفي مثال وجود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه یو ناطق عدد دی.

b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لویه ده.

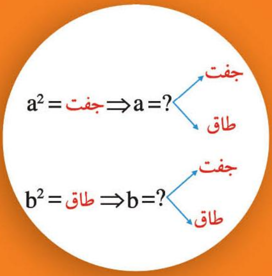
c) دوې زاویې چې متناظرې ضلعې یې سره موازي وي، دا دواړه زاویې سره مساوي دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه یو جفت عدد دی.

e) د دوو غیر ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غیر ناطق عدد نه دی.

له a,b,c، d او e څخه د کوم یو لپاره د نفي مثال موجود نه دی؟

حل: د c,a او d د نفي مثال نشته او د b او e لپاره د نفي مثالونه موجود دي، ځکه چې $1 = 1^2$ او $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$ چې یو غیر ناطق عدد دی.



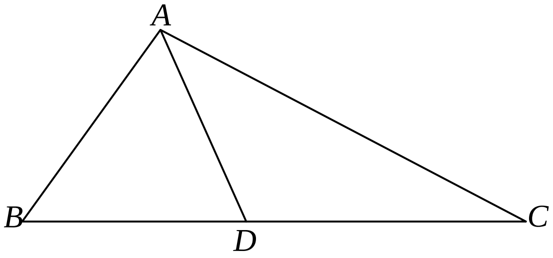
د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت

د درسي کتاب (405)مخ **د لوست وخت (1 درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي ، ذهنیتي)	• د غیر مستقیم ثبوت په مفهوم وپوهیږي او د غیر مستقیم ثبوت مرحلې وپیژني. • په دې یوه شي چې په دې ډول ثبوت کې فرض کیږي چې د قضیې حکم سم نه دی او د استنتاج په طریقه یوه تناقص (تضاد) ته رسیږو. • په دې پوه شي چې له دې طریقې څخه په هندسه کې د قضیو د ثبوتولو لپاره استفاده کیږي. • د هندسي مسایلو په ثبوتولو کې له غیر مستقیم ثبوت څخه استفاده وکړای شي او اهمیت یې درک کړي
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د انګیزې د پیدا کولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه دې له زده کوونکو وشي چې ځواب یې دا دی که د یو عدد مربع جفت وي، نو عدد هم جفت دی.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

ښایي زده کوونکي په ډلو کې فعالیت سرته ونشي رسولای، نو محترم ښوونکي دې دا فعالیت حل کړي چې حل یې په لاندې ډول دی.



AD د $\hat{A}$ د زاویې ناصف دی که $BD \neq CD$ وي ثبوت کړئ چې $AB \neq AC$ دی.

حل: په غیر مستقم ډول یې ثبوتوو فرض کړئ چې مطلوبه نتیجه سمه نه وي یعنې $AB \neq AC$ سم نه وي یعنی $AB = AC$ وي، نو د ABC مثلث متساوي الساقین دی.

څرنګه چې په متساوي الساقین مثلث کې د AD ناصف الزاویه د BC ضلعه هم نیمایي کوي، نو BD=DC کیږي چې دا د مسلې له فرض $BD \neq CD$ سره په تضاد کې ده. په پایله کې $AB \neq AC$ دی.

دې طریقې ته غیر مستقیم ثبوت وایي چې په ټولو ریاضیاتو کې د استعمال ځایونه لري، د فعالیت نتیجه زده کوونکو ته توضیح کړئ او بیا د غیر مستقیم ثبوت مرحلې هم وروپیژنئ د لوست مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره دا پوښتنه حل کړئ.

که n یو تام عدد او n^2 طاق وي، د غیر مستقیم ثبوت په واسطه وښایاست چې n هم طاق دی.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې:

د ارزونې لپاره دا پوښتنه وکړئ.

که n^2 د 3 مضرب وي، وښاياست چې n هم د 3 مضرب دی

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

وښاياست چې $\sqrt{2}$ یو غیر ناطق یاګنګ عدد دی.

ثبوت: فرضوو چې $\sqrt{2}$ يو ناطق (ګويا) عدد دی، نو د ناطق عدد د تعريف په اساس ليکلای شو چې:

$$\sqrt{2} = \frac{P}{q} \quad (q \neq 0)$$

چې P او q تام عددونه دی او د $\frac{P}{q}$ په ساده شکل وي يعنې د p او q لوی مشترک قاسم يو وي.

$$\sqrt{2} = \frac{P}{q} \quad \Rightarrow 2 = \frac{P^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

له دې ځايه نتيجه کيږي چې P^2 جفت عدد دی، نو P هم جفت دی يعنې $P = 2k$ دی او $P^2 = 4k^2$ کيږي.

د P^2 پر ځای يې قيمت $2q^2$ عوض کوو، نو لرو چې $2q^2 = 4k^2$

دواړه خواوې پر (2) وېشو $q^2 = 2k^2$

له دې ځايه نتيجه کيږي چې q^2 جفت او په نتيجه کې q هم جفت دی او دا د فرضيې خلاف دی ځکه په دې صورت کې د P او q مشترک قاسم 2 دی.

په پايله کې دا فرض چې $\sqrt{2}$ ناطق دی سم نه دی، نو $\sqrt{2}$ يو غير ناطق (ګنګ) عدد دی.

په همدې ډول کولای شی چې ثبوت کړئ چې $\sqrt{3}$ هم يو غير ناطق يا ګنګ عدد دی.

- وښاياست چې د دوو طاقو پرله پسې عددونو د جمعې حاصل پر 4 پوره وېشل کيږي.

حل: که $2k+1$ او $2k+3$ دوه پرله پسې طاق عددونه وي

$$2k+1+2k+3 = 4k+4 = 4(k+1)$$

ليدل کيږي چې پر 4 د وېش قابليت لري.

- وښاياست چې $\sqrt[3]{5}$ يو غير ناطق عدد دی.

حل: فرضوو چې $\sqrt[3]{5}$ يو ناطق عدد دی، نو:

$$\sqrt[3]{5} = \frac{p}{q} \quad (q \neq 0)$$

په دې ډول چې د p او q تامو عددونو لوی مشترک قاسم 1 وي، نو د p^3 او q^3 لوی مشترک قاسم هم د 1 عدد دی چې دا امکان نه لري

$$5 = \frac{p^3}{q^3} \Rightarrow p^3 = 5q^3$$

ځکه چې د p او q لوی مشترک قاسم د 1 عدد دی په نتيجه کې $\sqrt[3]{5}$ يو غير ناطق عدد دی

د پوښتنو ځوابونه:

وښایاست چې $\sqrt{3}$ یو غیر ناطق عدد دی.

حل: فرضوو چې مطلوبه نتیجه سمه نه ده یا $\sqrt{3}$ غیر ناطق عدد نه وي یعنې ناطق وي، نو $\sqrt{3}$ د $\frac{p}{q}$ په شکل لیکو چې p او q تام عددونه $(q \neq 0)$ دي.

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow 3 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 3q^2 = p^2$$

څرنګه چې p او q تام عددونه دی او لوی مشترک قاسم یې 1 دی.

له $3q^2 = p^2$ څخه نتیجه اخیستل کیږي چې p^2 پر 3 د وېش وړ دی.

که ab پر c د وېشلو وړ وي، نو b هم په c او a هم په c باندې د وېش قابلیت لري.

څرنګه چې $p \cdot p$ یا p^2 پر 3 د وېش وړ دی، نو p هم پر 3 د وېش وړ دی، نو د k تام عدد وجود لري چې $p = 3k$ کیږي،

نو $\sqrt{3}$ یو غیر ناطق عدد دی.

د رياضي منطق او د بيان استنتاج

د درسي کتاب (407)مخ   د لوست وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • بیان او د بیان نفي وپیژني. • د بیان او د بیان د نفي د صحت جدول جوړ کړای شي. • له يوې خوا او له دواړو خواو شرطيه بيانونه وپيژني او د صحت جدولونه يې ترتيب کړای شي. • د بيانونو د ترکيب جدول جوړ کړای شي. • د رياضي د منطق د مسايلو په حلولو کې ترې استفاده وکړای شي او اهميت يې درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه دې له زده کوونکو وشي او هدف يې دا دی چې کيدای شي بيان سم يا ناسم وي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

د 407 مخ د فعاليت ځواب دې زده کوونکي ووايي او محترم ښوونکي دې ورسره مرسته وکړي، په نتيجه کې هره جمله نه شي کيدای چې يو بيان وي، دا موضوع دې زده کوونکو ته توضيح شي بيا دې بيان او د بيان نفي د دوی د صحت له جدولو سره زده کوونکو ته توضيح شي.

د بيانونو ترکيب او يو طرفه او دوه طرفه شرطيه بيانونه دې توضح شي.

لومړی او دويم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې:

د لاندې پوښتنې حل زده کوونکو ته واضح کړئ.

که د p بيان ناسم او د q بيان سم وي ايا د $p \vee q$ او $p \wedge q$ بيانونو ترکيب سم دی يا ناسم؟

ځواب: د $p \wedge q$ بيان ناسم او د $p \vee q$ بيان سم دی.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې:

که د p لومړنی بيان سم او د q بيان ناسم وي، $p \Rightarrow q$ سم دی که ناسم؟

ځواب: $p \Rightarrow q$ نا سم دی.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

علامه یي منطق (symbolic Logic):

د (~) علامه ویل کیږي چې (نه) (~P د P نفي) Not p یا Negative of p

که p یو بیان وي ~P ته دP نقیض وایي، د مثال په ډول که P یو داسې بیان وي چې 5 طاق دی، نو نفي یا نقیض یې داسې دی چې (داسې نه ده چې 5 طاق دی) یا $\sim(1=2)$ داسې نه دی چې 1 له 2 سره مساوي وي.

د ($\wedge$) علامه د (و) ($p \wedge q$ یعنې p و q)

د ($\vee$) علامه د (یا) ($p \vee q$ یعنې p یا q)

$p \Rightarrow q$ که P نو q یا له p څخه q نتیجه کیږي، نو د یوې خوا شرطیه بیان په نامه یادیږي.

نوټ: د بیانونو رابطې د (داسې نه ده چې، او ، یا، که) په لفظونو سره صورت نیسي.

$p \Leftrightarrow q$ دوه طرفه شرطیه بیان دی ((p او که یوازې که q)) if and only if ویل کیږي یا (p له q سره معادل دی)

د صحت جدول او د سمبولونو استعمال توضیح: که p یو بیان وي (~P) نفي (Negation of p) یا داسې نه ده د p د بیان ده که p سم وي ~p ناسم دی او که p ناسم وي، نو ~p سم دی.

د صحت جدول Truth Table یې په لاندې ډول دی:

p	$\sim p$
T	F
F	T

1- د $p \wedge q$ ترکیب (Conjunction) په هغه صورت کې سم دی چې د بیان دواړه مولفې سمې وي.

د مثال په ډول $a < b \wedge b < c$ یعنې a له bکوچنی او b له c کوچنی دی د صحت جدول یې په لاندې ډول دی.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

1مثال:

(i)کابل دافغانستان مرکز او تهران د ایران مرکز دی.

(ii)- $4 < 5 \wedge 8 < 10$ (iii) $4 < 5 \wedge 8 > 10$ (iv) $2+2=3 \wedge 6+6=10$

لیدل کیږي چې (i) او (ii) سم دي، خو (iii) او (iv) ناسم دی.

2- د $p \vee q$ ترکیب (disjunction): په هغه صورت کې سم دی چې لږ تر لږه یو له دواړو p یا q څخه سم وي او هغه وخت ناسم دی چې دواړه ناسم وي. چې د صحت جدول یې په لاندې ډول دی.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

د مثال په ډول: په لاندې بیانونو کې یوازې څلورم بیان ناسم دی.

5 طاق دی یا واوره سپینه ده.

5 طاق دی یا واوره توره ده.

5 جفته دی یا واوره سپینه ده.

5 جفت دی یا واوره توره ده.

2مثال: 10 عدد تام مثبت عدد دی یا $\sqrt{2}$ یو ناطق عدد دی، څرنګه چې لومړی بیان سم دی، نو $p \vee q$ سم دی.

3مثال: یو مثلث دوه قایمې زاویې لري یا کندهار د افغانستان مرکز دی څرنګه چې دواړه بیانونه ناسم دي، نو $p \vee q$ هم ناسم دی.

$a < b \vee a = b$

a له b کوچنی یا a مساوي په b دی.

$\sim (a < b) \vee a = b$

a له b کوچنی نه دی یا a له b سره مساوي دی.

$\sim (a < b) \vee \sim (a = b)$

a کوچنی له b یا a له b سره مساوي نه دی.

$\sim (a < b \vee a = b)$

داسې نه ده چې a کوچنی د b یا a مساوي په b .

$p \vee q \vee r$ د $(p \vee q) \vee r$ په شکل لیکو.

شرطیه ترکیب(Implication or Conditional): چې په $p \Rightarrow q$ سره ښودل کیږي، لهp،q نتیجه کیږي چې p د فرضیې او q د نتیجې په نامه یادیږي (که p نو q)

د مثال په ډول: که α او β متقابل بالراس زاویې وي، نو $\alpha = \beta$ ده. یا که $a > 1$ انګاه $a^2 > 1$ ده.

شرطیه بیان په هغه صورت کې ناسم دی چې p سم او q ناسم وي، نور په ټولو پاتې حالتونو کې $p \Rightarrow q$ سم دی.

د صحت جدول یې په لاندې ډول دی

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

مثال: په لاندې بيانونو کې يوازې دويم ناسم دی.

که 5 طاق دی 7 لومړنی دی.

که 5 طاق دی 7 جفت دی.

که 5 جفت دی 7 لومړنی دی.

که 5 جفت دی 7 جفت دی.

او يا په لاندې بيانونو کې دويم ناسم دی او نور سم دي.

که $3 > 2$ ، نو $2 > 1$

که $3 > 2$ ، نو $2 < 1$

که $3 < 2$ ، نو $2 > 1$

که $3 < 2$ ، نو $2 < 1$

مثال: که احمد په کابل کې ژوند کوي، نو احمد په افغانستان کې ژوند کوي. که لومړی بيان سم نه وي دمثال په ډول احمد په کابل کې ژوند نه کوي، خو احمد په افغانستان کې ژووند کوي، هيڅ دليل نشته چې احمد په افغانستان کې ژوند نه کوي، نو نه شو کولای چې د $p \Rightarrow q$ ترکيب ته ناسم ووايو. که دواړه جملې ناسمې وي لاندې مثال ته توجه وکړئ.

مثال: احمد ادعا کوي چې که دی د ټيم د کپتان په حيث وټاکل شي، نو ټيم لوبه گټي په دې وخت کې څلور امکان شته:

1- احمد د ټيم کپتان وټاکل شو او ټيم لوبه وگټله، نو د احمد بيان سم دی.

2- احمد د ټيم کپتان وټاکل شوه، خو ټيم لوبه بايلو ده، نو د احمد بيان سم نه دی.

3- احمد د ټيم کپتان و نه وټاکل شوه، خو د ټيم ټولو غړو لوبه وگټله، نو د احمد د بيان د ناسم والي دليل وجود نه لري.

4- احمد د ټيم کپتان و نه وټاکل شو او ټيم لوبه بايلوده، نو په دې صورت کې د احمد گناه نه ده.

مثال: احمدپه کابل کې ژوند کوي، نو احمد په افغانستان کې ژوند کوي او دا يو سم بيان دی، خو که احمد په کابل کې ژوند نه کوي نه شوو ويلای چې احمد په افغانستان کې ژوند نه کوي.

که $p \Rightarrow q$ هغه وخت ناسم بيان دی چې p سم او q ناسم وي، په دې حالت کې q ~ سم او p ~ ناسم دی.

$p \Rightarrow q$ او $\sim (p \wedge \sim q)$ چې دواړه په عين وخت کې سم دي د $\sim (p \wedge \sim q)$ دصحت جدول په لاندې ډول دی:

p	q	$\sim q$	$p\wedge \sim q$	$p\Rightarrow q$ $\sim (p\wedge \sim q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
T	F	T	T	T

که د جدول اخیرني ستون ته پام وکړي $p\Rightarrow q$ او $\sim (p\wedge \sim q)$ دواړه یو شي دي، نو منطقا دواړه سره برابر دي.

مثال: که د x حقیقي عدد له 5 لوی وي، نو 4x له 20 لوی دی . $x>5\Rightarrow 4x>20$

په هندسه کې: که مثلث متساوي الساقین وي، د مساوي ساقونو مقابلې زاویې سره مساوي دي. دې ډول قضیو ته شرطي قضیې وایي چې لومړی جملې ته د قضیې فرض او دویمې جملې ته د قضیې حکم وایي، که او نو (هغه وخت) په شرطي قضیو کې تعینونکي نقش لري چې حکم له فرضیې څخه نتیجه کیږي، که په یو شرطي بیان کې فرض سم او حکم ناسم وي، دا بیان شرطي قضیه نه شي کیدای

مثلا: که $x>0$ وي نو $x^2>x$ دی.

که $x=\frac{1}{2}$ وي نو $x^2=\frac{1}{4}$ کیږي.

چې دلته فرض $x>0$ سم دی، خو حکم یې $\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$ نا سم دی.

د $p\Rightarrow q$ د بیان عکس عبارت له $q\Rightarrow p$ دې څخه دی او د یو شرطي بیان د نقیض عکس یو داسې بیان دی چې لومړی او دویمه جمله یې په ترتیب سره د دویمې جملې نقیض او د لومړی جملې نقیض دی.

د مثال په ډول :که p نو q $(p\Rightarrow q)$ د نقیض عکس یې که $\sim q$ نو $\sim p$ (که داسې نه ده چې q نو داسې نه ده چې p)

د یو بیان د نقیض عکس: که a طاق دی a+1 جفت دی، د تقیض عکس یې عبارت دی:

له a+1 جفت نه دی a طاق نه دی.

په لږ دقت سره ویلای شو چې د یو شرطي بیان ارزش او د بیان د نقیض د عکس ارزش سره برابر دي.

دوه شرطیه بیانونه (Biconditional): ($p\Leftrightarrow q$ بیانیه) $p\Rightarrow q\wedge q\Rightarrow p$ په لنډ ډول د $p\Leftrightarrow q$ په شکل ښودل کیږي.(P iff q) چې iff د که او که په مفهوم ښودل کیږي.

یا په هندسه کې که د یوې شرطي قضیې عکس هم یوه شرطي قضیه وي، داسې قضیې ته دوه شرطي قضیه وایي، د فیثاغورث د قضیې په شان (د وتر مربع د دوو نورو ضلعو د مربعګانو له مجموعې سره مساوي ده.)

که مثلث قایم الزاویه وي، په p چې د قضیې فرض دی او د قضیې حکم (د وتر مربع د دوو نورو ضلعو د مربګانو له مجموعې سره مساوي ده) په q سره وښایو.

د فیثاغورث قضیه $p\Rightarrow q$

د فیثاغورث قضیې عکس $q\Rightarrow p$

ځرنګه چې دواړه سم دی، نو $p \Leftrightarrow q$ دی او ویل کیږي چې p د q معادل دی او وایو چې p که او یوازې که q مثلث قایم الزاویه دی که او یوازې که د یوې ضلعې مربع د دوو نورو ضلعو د مربعګانو له مجموعې سره مساوي وي او یا یې عکس.

مثال: که a=b نو 2a=2b او که 2a=2b نو a=b

یا دو شرطیه بیانونه داسې هم لیکلای شو (p یوازې او یوازې که q) یا د $\Leftrightarrow$ علامه د لازم او کافي شرط ښکارندوی ده. د دوه شرطیه ترکیبي بیان $p \Leftrightarrow q$ ارزش یوازې او یوازې هغه وخت سم دی چې د دواړو مولفو ارزش سره برابر وي ځکه چې $p \Rightarrow q$ هغه وخت سم دی چې دواړه سم یا ناسم وي، د مثال په ډول په لاندې بیانونو کې لومړی او څلورم سم او دویم او دریم بیان ناسم دي.

- که 5 طاق دی واوره سپینه ده او عکس یې
- که 5 طاق دی واوره توره ده او عکس یې
- که 5 جفت دی واوره سپینه ده او عکس یې
- که 5 جفت دی واوره توره ده او عکس یې

د دوه شرطیه بیان د نقیض عکس:

د تعریف له مخې د $p \Leftrightarrow q$ د نقیض عکس له $\sim q \Leftrightarrow \sim p$ څخه عبارت دی چې مولفې یې د لومړی بیان د مولفو نقیض دي، د مثال په ډول د $a = b \Leftrightarrow 2a = 2b$ بیان د نقیض عکس د $\sim(2a = 2b) \Leftrightarrow \sim(a = b)$ بیان دی او یا په بل عبارت $(a \neq b \Leftrightarrow 2a \neq 2b)$ دی چې کولای شو داسې یې بیان کړو.

لازم او کافي شرط ددې لپاره چې a د b مساوي نه وي، دا دی چې 2a د 2b مساوي نه وي، توجه وشي، د یو دوه شرطي بیان د نقیض عکس او خپله د بیان ارزش یو شی دی.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

یعنې په هغه وخت کې د $p \Leftrightarrow q$ بیان سم دی چې دواړه بیانونه سم او یا ناسم وي. شرطیه بیانونه له شرطي جملو سره اړیکې لري که $p \Rightarrow q$ یو راکړل شوي شرط وي.

1- $q \Rightarrow p$ د $p \Rightarrow q$ عکس دی.

2- $\sim p \Rightarrow \sim q$ د $p \Rightarrow q$ نقیض دی.

3- $\sim q \Rightarrow \sim p$ د $p \Rightarrow q$ د نقیض عکس دی.

چې د صحت جدول یې په لاندې ډول دی.

				Given Condition	Convers	Inverse	Contra Positive
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T	T

پورتني جدول ښيي چې:

1- بيانيه او د نقيض عکس يې (contra positive) سره معادل دي د يوې قضيې ثبوت د هغې له متناقصې جملې څخه ثبوتيږي.

2- د يو بيان عکس (Converse) او نقيض (Inverse) سره معادل دي.

مثال: عکس (Converse) او نقيض (Inverse) او د نقيض عکس (Contra Positive) بيانونه د لاندې شرطيه بيانونو لپاره وليکئ.

حل:

$\sim q \Rightarrow p = ?$

Conditional	converse	inverse	contra Positive
$\sim p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow p$
$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Rightarrow q$
$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$

2مثال: د لاندې راکړل شوو بيانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ.

حل:

$(p \Rightarrow -p) \vee (p \Rightarrow q) = ?$

1:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow \sim p) \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T

$(p\wedge \sim p) \Rightarrow q = ?$

2:

P	q	$\sim p$	$p\wedge \sim p$	$(p\wedge \sim p) \Rightarrow q$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

$(p\wedge \sim q) \Leftrightarrow (p\wedge \sim q) = ?$

3:

P	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p\wedge \sim q)$	$(p\wedge \sim q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

د پوښتنو ځوابونه:

1- د صحت د جدول په ترتیبولو سره وښایاست چې د $(p \Rightarrow q)v \sim (\sim pvq)$ بیان هر وخت سم دی، پام مو وي چې p او p ~ یو له بله مستقل نه دي).

حل:

p	q	~p	$p \Rightarrow q$	pvq	~pvq	~(-pvq)	$(p \Rightarrow q)v \sim (\sim pvq)$
T	T	F	T	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	F	T

2- د صحت د جدول په جوړولو سره وښایاست چې د $(p \Rightarrow q)$ او $(pvq) \sim$ بیانونو ارزښت سره مساوي دی که نه؟

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	pvq	~(pvq)
T	T	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

لیدل کیږي چې د $p \Rightarrow q$ او ~(pvq) بیانونه سره مساوي نه دي.

1- ستاسو په نظر د لاندې بيانو څخه کوم يو يې سم دی؟

الف) په مشاهدوکې خطا د استقرايي طريقې له ستونزو څخه يوه ستونزه ده.

ب) د رياضي د استدلال له قوي طريقو څخه يوه هم استقرايي طريقه ده.

ج) د رياضي په استقرايي طريقې کې يوه ستونزه د مشاهدوکموالی دی.

د) الف او ج ځوابونه سم دي.

ځواب: (د)

2- له لاندې بيانو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

استقرايي استدلال:

الف) د رياضي له مسايلو څخه يوه قوي طريقه ده.

ب) د مسايلو په برخه کې موږ ته د عمومي قوانينو لارښوونه کوي.

ج) د مسايلو د حلولو لپاره له رياضي پرته يوه طريقه ده.

د) د مسايلو د حلولو لپاره د رياضي طريقه نه ده.

حل: (الف)

3- د شهودي درک په برخه کې له لاندې بيانو څخه کوم يو يې سم دی؟

الف) له شهود څخه په استفادې نتيجه سل په سلو کې سمه ده.

ب) له شهود څخه په استفادې په ډاډ سره نه شو ويلای چې نتيجه سل په سلو کې سمه ده.

ج) شهود د رياضي د ښه درک کولو لپاره دی.

د) له شهود څخه په استفادې کولای شو، د ثبوت لپاره قطعي حدس (گمان) له حتمي استدلال سره وکړو.

حل: ځواب (ب)

4- له لاندې بيانو څخه کوم يو يې سم نه دی.

الف) استقرايي استدلال له جز څخه وکل ته رسيدل دي.

ب) استقرايي استدلال له کل څخه وجز ته رسيدل دي.

ج) له استقرايي استدلال څخه نه شو کولای چې د رياضي د دقيق ثبوت لپاره گټه واخلو.

د) استقرايي استدلال د يو شمېر مشاهدو پر اساس يوه کلي نتيجه ده.

حل: (ب).

5- د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې بيانو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

الف) که واوره اوري ځمکه نمجنه کيږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وريدلې ده.

ب) د يوه ښوونځي ټول فارغان له کمپيوټر سره بلد او په رياضي ښه پوهيږي، ضمير چې له دې ښوونځي څخه فارغ شوی دی نو له کمپيوټر سره ښه بلد او په رياضي ښه پوهيږي.

ج) که یوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه يې يو پر بل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه يو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

د) که دیوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقین مثلث دی، او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث متساوي الساقین دی.

حل: (الف).

6- د قیاسي استدلال په واسطه وښایاست چې د α هرې زاویې لپاره $Sin^2\alpha + Cos^2\alpha = 1$ ده.

حل: د فیثاغورث د قضیې په ا ساس په یوه قایم الزاویه مثلث کې د وتر مربع د قایمو ضلعو د مربعګانو له مجموعې سره مساوي ده ځرنګه چې په مثلثاتي دایره کې دوې قایمې ضلعې د زاویې Sin او Cos دي او وتر له واحد سره مساوي دی، نو د α د هرې زاویې لپاره $Sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$ ده.

7- د استقرایي استدلال په واسطه وښایاست چې د n مسلسلو طاقو عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

حل: ثبوتوو چې:

$$1+3+5+.........+(2n-1)=n^2$$

1- د $n=1$ لپاره سمه ده

2- که د $n=k$ لپاره فرض يې کړو چې سمه ده د $n=k+1$ لپاره يې ثبوتوو، نو لرو چې:

$$1+3+.........+(2k-1)+2(k+1)-1=(k+1)^2$$

$$\Rightarrow k^2+2(k+1)-1=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

ځرنګه چې د $n=k+1$ لپاره سمه ده، نو د هر طبیعي عدد n لپاره سمه ده.

8- د استقرایي استدلال سره وښایاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+........+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

حل: د $n=1$ لپاره لرو چې:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}\Rightarrow 1=1$$

نو د $n=1$ لپاره دا رابطه سمه ده.

د $n=k$ لپاره يې قبلوو او رابطه د $n=k+1$ لپاره ثبوتوو:

$$n=k+1 \qquad 1+2+3+..........+k+k+1=\frac{(k+1)[(K+1)+1]}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=(k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right]=(k+1)\left[\frac{k+2}{2}\right]=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

ځرنګه چې د $n=k+1$ لپاره سمه ده، نو د هر طبیعي عدد n لپاره سمه ده.

9- د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی.

حل:

که $2k_1$ او $2k_2$ دوه جفت عددونه وي.

نو $2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$ چې یو جفت عدد دی

10- له یوه مثاله سره وښایاست چې د $2^n + 3$ افاده د n د هر طبیعي عدد لپاره لومړنی عدد نه دی.

حل: که $n = 5$ وي $2^5 + 3 = 32 + 3 = 35$

چې 35 لومړنی عدد نه دی د هر طبیعي عدد د n لپاره $2^n + 3$ افاده هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11- د غیر مستقیم ثبوت د استدلال په واسطه وښایاست که n یو طبیعي عدد وي او n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

حل: ددې پر ځای چې ثبوت کړو چې n طاق دی یا n نشي کېدای چې جفت وي، لومړی فرضوو چې n یو جفت عدد دی

نو: $n = 2k$

چې k یو صحیح عدد دی، نو لرو چې:

$$n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = (2k)^2$$

له دې څخه دا نتیجه کیږي چې n^2 جفت دی چې له فرضیې سره په تناقض کې ده یا دا چې د فرضیې خلاف n طاق دی.

12- د (باران اوري او وریځ نشته، نو باران نه اوري) د ترکیبي بیان لپاره د صحت جدول جوړ کړئ په داسې حال کې چې (α = باران اوري)، (β =وریځ ده) سره وښایو، د 1 عدد د سم او د 0 عدد د ناسم لپاره په کار یوسئ.

α	β	$-\alpha$	$-\beta$	$\alpha \vee -\beta$	$\alpha \wedge -\beta$	$\alpha \wedge -\alpha \Rightarrow -\alpha$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1