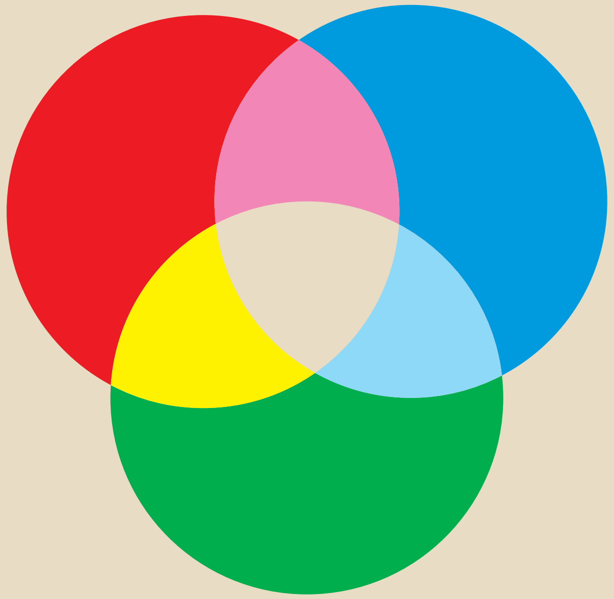
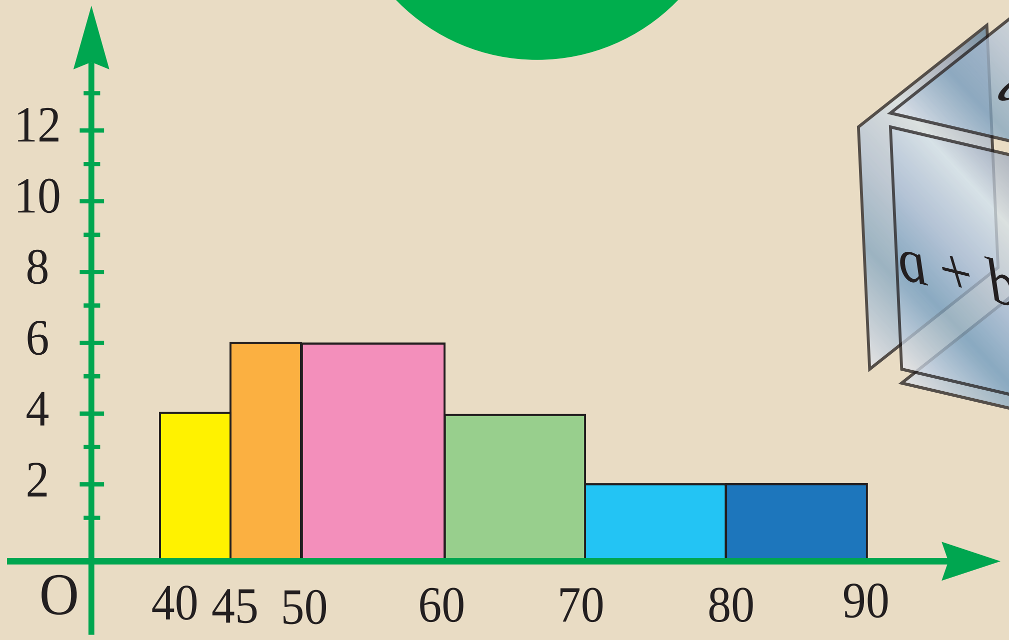
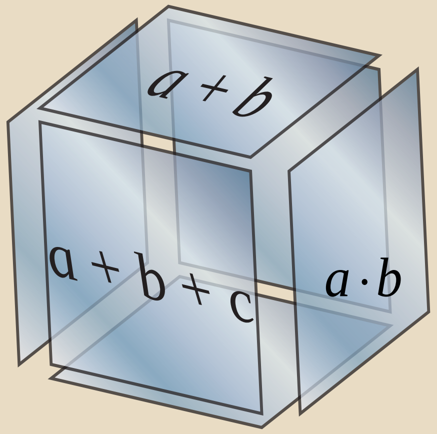
د پوهنې وزارت
د تعليمي نصاب د پراختيا او د ښوونکو د روزنې معينيت
د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی رياست

رياضي

نهم ټولگی







رياضي نهم ټولگی

درسي کتابونه د پوهنې په وزارت پورې اړه لري. په بازار کې يې پيرودل او پلورل په کلکه منعه دی. له سرغړوونکو سره به يې قانوني چلن وشي.

moe.curriculum@gmail.com

١٣٩۶ هـ. ش.

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

رياضي
نهم
ټولګی

۱۳۹۶

هـ.ش

مولفین

- د ښوونې او روزنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ
- د ښوونې او روزنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی پوهنمل طلاباز حبیب زی
- د ښوونې او روزنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی پوهندوی خالقداد فیروزکوهی
- د ښوونې او روزنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی دکتور ماخان شینواری
- د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف ریاست علمي غړی سرمؤلف میرنقیب الله

ژباړونکي

- د ښوونې او روزنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ
- د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف ریاست علمي غړی استاد مختار نوید

علمی اډیټور

- د ښوونې او روزنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی پوهنمل طلاباز حبیب زی

د ژبې اډیټور

- د ښوونې او روزنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی سرمحقق نعمت الله اندړ

دیني، سیاسي او فرهنگي کمېټه:

- مولوي عبدالصبور عربي
- دکتور محمد یوسف نیازی
- د تعلیمي نصاب په ریاست کې د پوهنې وزارت سلاکار حبیب الله راحل.

د څارنې کمېټه:

- د تعلیمي نصاب د پراختیا او د ښوونکو د روزنې معین دکتور اسدالله محقق.
- د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې رئیس دکتور شېرعلي ظریفي.
- د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس سرمؤلف عبدالظاهر گلستاني.

کمپوز او ډیزاین

- ولید نوید نسیمي او محمد اشرف امین

د چاپ د سمون چارې: د پوهنې وزارت د نشراتو او اطلاعاتو رئیس محمد کبیر حقمل

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزير پيغام

د لوی خدای ﷻ ډېر شکر دی چې انسان يې په احسن تقويم کې پيدا او هغه ته يې د خبرو کولو توان ورکړ او د علم او فکر پر ګاڼه يې سمبال کړ. ډېر درود دې وي د اسلام پر ګران پيغمبر حضرت محمد مصطفی ﷺ چې د انسانيت ستر ښوونکی دی او د رحمت، لارښوونې او روښنايي پيغام راوړونکی.

ښوونه او روزنه په هره ټولنه کې د بدلون او پراختيا بنسټ دی. د ښوونې او روزنې اصلي موخه د انسان د بالقوه ځواکونو فعالول او د هغه د پټو استعدادونو غوړول دي.

درسي کتاب د ښوونې او روزنې په بهير کې يو مهم رکن بلل کيږي چې له نوو علمي بدلونونو او پرمختګونو سره اوږه په اوږه د ټولنې له اړتياوو سره سم تاليف کيږي. درسي کتابونه بايد د منځپانګې له مخې خورا بډای وي چې وکړای شي د علومو له نوو لاسته راوړنو سره مل ديني او اخلاقي زده کړې د نوو ميتودونو له لارې زده کوونکو ته وليږدوي.

دغه کتاب چې اوس ستاسو په واک کې دی، د همدغو پورته ځانګړنو پر بنسټ چمتو او تأليف شوی دی. د پوهنې وزارت تل زيار باسي چې په هېواد کې تعليمي نصاب او درسي کتابونه د اسلامي ښوونې او روزنې او د ملي هويت د ساتلو پر بنسټ جوړ او له علمي معيارونو، نوو روزنيزو ميتودونو او د نړۍ له علمي پرمختګونو سره سم چمتو کړي.

د زده کوونکو استعدادونه په ټولو اخلاقي او علمي خواوو کې وغوړيږي او په هغوی کې د تفکر او نوښت توان او د پلټنې حس پياوړی کړي. د خبرو اترو او پېرزوينې د فرهنګ دودول، د هېواد پالنې او د مينې او محبت د حس پياوړی کول، ښځنه او پيوستون د پوهنې د وزارت نورې غوښتنې دي چې ښايي د لوست په کتابونو کې ورته پام وشي.

درسي کتابونه د ښه او مسلکي ښوونکي له درلودو پرته نشي کولای ټاکل شوي موخې ترلاسه کړي. ښوونکی د ښوونې او روزنې يو مهم جزء او د ښوونې او روزنې د پروګرامونو پلي کوونکی دی. د هېواد له ژمنو او زړه سواندو ښوونکو څخه، چې د تور تم او ناپوهۍ په وړاندې يې جګړه خپله دنده ګرځولې، دوستانه هيله لرم د تعليمي نصاب په دقيق او مخلصانه تطبيق کې د هېواد ماشومان، نجونې او تنکي ځوانان د پوهې، اخلاقو او معنويت لوړو څوکو ته ورسوي.

د هېواد د زده کړې د نظام بری د خلکو له جدي مرستو پرته امکان نه لري. له دې امله له ټولو قشرونو او د ملت له شريفو خلکو، په تيره بيا له کورنيو او د زده کوونکو له درنو اولياوو څخه هيله لرم چې د معارف د موخو د لاسته راوړو په برخه کې له هيڅ ډول مرستې څخه ډډه ونه کړي. دغه راز له ټولو ليکوالو، پوهانو، د ښوونې او روزنې له ماهرينو او د زده کوونکو له محترمو اولياوو څخه هيله کيږي چې په خپلو رغنده نظرونو، وړانديزونو او نيوکو د درسي کتابونو په لاښه والي کې د پوهنې له وزارت سره مرسته وکړي.

لازمه بولم له ټولو ښاغلو مؤلفانو، د پوهنې وزارت له اداري او فني کارکوونکو او له ملي او نړيوالو بنسټونو څخه، چې د دغه کتاب په چمتو کولو، چاپولو او وېش کې يې زيار ايستلی او مرسته يې کړې، مننه وکړم.

په پای کې له لوی خدای ﷻ څخه غواړم چې په خپله بې پايه مهربانۍ له موږ سره د پوهنې د سپېڅلو ارمانونو په لاسته راوړلو کې مرسته وکړي. انه سميع قريب مجيب.

د پوهنې وزير

دوکتور اسدالله حنيف بلخي

فهرست　　　　مــخ

لومړی څپرکی: دایره ۱

- د دایرې عناصر، د یوې مستقیمې کرښې حالتونه، د دایرې موقعیت نظر یو بل ته
- په دایره پورې اړوند زاویې
- د دایرې د وتر او شعاع ځانګړتیاوې
- د دایرې محیطي او مماسي زاویې

دویم څپرکی: په یوه دایره کې د اوږدوالی اړیکي ۲۷

- د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته
- د دایرې مماس کرښه، د دایرې داخلي او خارجي زاویه
- محیطي او محاطي دایره
- په دایره کې د مرسوم څلور ضلعي ځانګړتیاوې (خواص)
- د منظمې مضلع ترسیم، د د ایرې مساحت او محیط

دریم څپرکی: تحلیلي هندسه ۵۵

- د دوو ټکو تر منځ واټن (فاصله)
- د یوه قطعه خط (ټوټې کرښې) د منځني ټکي مختصات
- د مستقیمې کرښې میل، د موازي او عمود کرښو میلونه
- د مستقیمې کرښې معادله، د هغې مستقیمې کرښې معادله چې میل او یو ټکی یې معلوم وي
- د مستقیمې کرښې عمومي معادله
- د خطي معادلاتو سیستم
- د خطي معادلاتو د سیستم حل د تعویضي او افنا په لاره (طریقه)
- تغییر مکان، انتقال، انعکاس او دوران

څلورم څپرکی: مثلثات ۹۵

د تالس قضیه

- د حاده زاویې ساین، کوساین او تانجنت
- د ځینو خاصو زاویومثلثاتي نسبتونه، د میل او تانجنت تر منځ اړیکې
- مثلثاتي جدول، د قایم الزاویو مثلثونو حل
- مثلثاتي معادلې

فهرست | مخ

پنځم څپرکی: څو جمله يي ګاني ۱۲۷
- په فکتورونو تجزیه
- د الجبري افادو ضرب، د مکعبونو مجموعه او تفاضل
- کوچنی مشترك مضرب
- د الجبري افادو وېش
- په الجبري افادوکې د عمليو د سرته رسولو ترتیب

شپږم څپرکی: نامساوات ۱۵۱
- د خطي غیر مساواتو حل
- فاصله یا انټروالونه
- د بینوم د علامې ټاکل، دکسر افادې اشاره ټاکل
- کسري نامساواتونه، دوه متحوله خطي نامساوات
- د نامساواتو سیستمونه

اووم څپرکی: یو مجهوله دویمه درجه معادلې ۱۷۵
- د دويمې درجې معادلو حل
- غیر خطي اړيکې
- په هندسي لاره د دويمې درجې معادلو حل د محمد بن موسی فورمول، تکمیل مربع

اتم څپرکی: احصائیه ۱۹۵
- د data د دسته بندي لاره، د نښتو یا پیوسته dataګانو دسته بندي او وزني اوسط
- مستطیلي او دايروي ګرافونه
- میانه، د تحول ساحه او د انحراف اوسط

نهم څپرکی: احتمالات ۲۲۱
- د ناخاپه پېښو اتحاد او تقاطع
- کلي او مکمله سټ
- په ستونو مدل جوړول
- د شمېرلو اصول

لومړی څپرکی

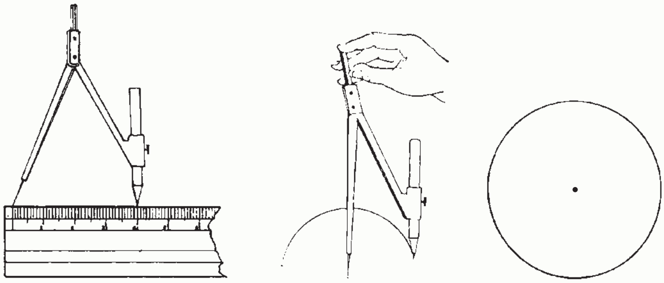
دایـــره

دایـره (CIRCLE)

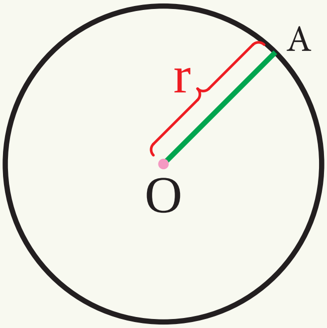
شکل ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چـې په تصویـر کـې وینـئ، نومونه یې واخلئ.

فعالیت

یـو ټکـی د کاغـذ پر مخ وټاکئ، د 1cm پـه اوږدوالي د پرکار خولـه خلاصه او ددې ټکي شاوخواته، یو بشپړ دوران ورکړئ، لاسته راغلی شکل او ټاکل شوی ټکی څه نومېږي؟



تعریف

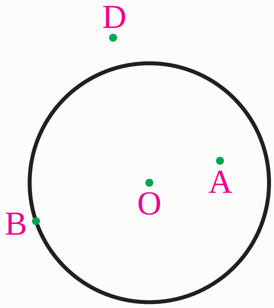


په یوه مستوي کې د هغو ټولو ټکو سټ چې له یوه ټاکلي ټکي نه مساوي واټن(فاصله) ولري، دایره نومېږي، یا په بل عبارت دایره له یوې تړلې منحنی څخه عبارت ده چې له یوه ټاکلي ټکي څخه مساوي واټن ولري.

تړلې منحنی ته د دایرې محیط او ټاکلي ټکي ته د دایرې مرکز وایي چې په $C(O,r)$ ښودل کېږي.

د دایرې مرکز په شکل کې O او شعاع یې د r په توروو ښودل کېږي.

فعالیت



- په لاندې شکل کې د A ، B او D ټکو ځايونه (موقعيت) نظر O دايرې ته وټاکئ.
- د هغو ټکو واټن د دايرې له مرکز څخه اندازه او د دايرې د شعاع له اوږدوالي سره پرتله کړئ.
- په خپله خوښه درې نور ټکي چې په دايره کې دننه او له دايرې څخه بهر پراته وي، په پام کې ونيسئ. ايا لاسته راغلې اړيکې د دې ټکو لپاره هم سمې دي؟

پايله:

1- د هغو ټکو سټ چې فاصله يې د دايرې له مرکز څخه د دايرې له شعاع څخه کوچنۍ وي، د دايرې داخلي ساحه(منځ) بلل کيږي، يا $I=\{A/|\overline{OA}|<r\}$

2- د هغو ټکو سټ چې فاصله يې د دايرې له مرکز څخه د دايرې له شعاع سره مساوي وي، د دايرې محيط يا مخ ويل کيږي، يا $C=\{B/|\overline{OB}|=r\}$

3- د هغو ټکو سټ چې فاصله يې د دايرې له مرکز څخه د دايرې له شعاع څخه لوی وي، د دايرې د خارجي يا باندنۍ ساحې په نامه يادېږي، يا $E=\{D/|\overline{OD}|>r\}$

4- د مستوي هغه برخه چې د دايرې د محيط او دهغې د اخلي سطحې په واسطه جلا شوې وي، د دايرې د سطحې په نوم يادېږي.

پوښتنې

1- يوه دايره د $2cm$ په شعاع رسم کړئ. دلاندې ټکو څخه کوم يو يې د دايرې په داخل، خارج او په محيط کې پروت دی:

- د A ټکې واټن د دايرې له مرکز څخه $1.4cm$ دی.
- د B ټکې واټن د دايرې له مرکز څخه $2.3cm$ دی.
- د C ټکې واټن د دايرې له مرکز څخه صفر دی.
- د D ټکې واټن د دايرې له مرکز څخه $\frac{4}{2}cm$ دی.

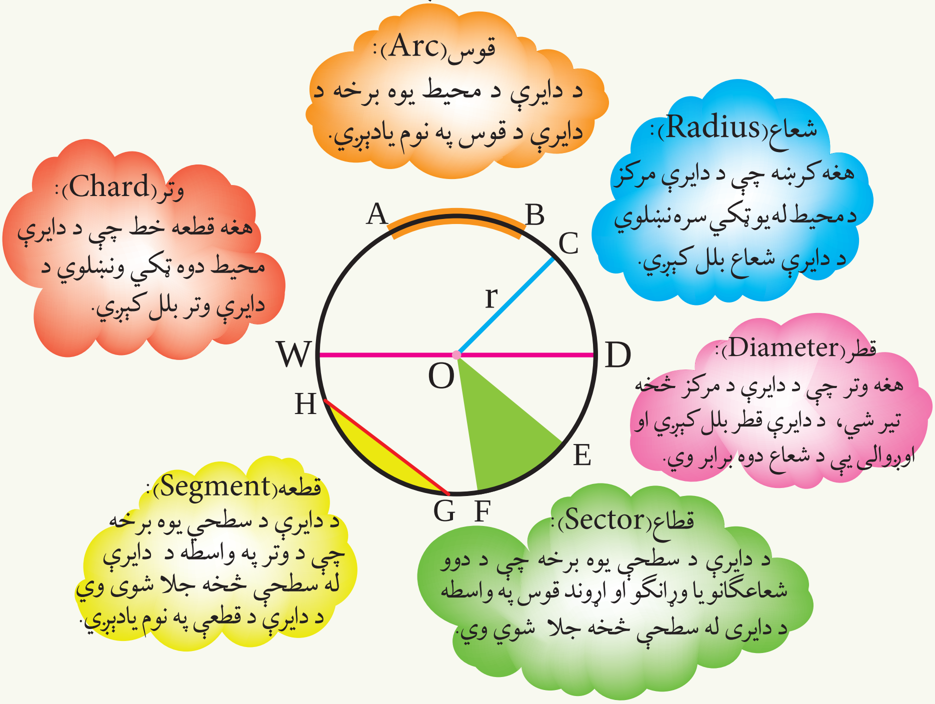
2- په کوم حالت کې يو ټکی د دايرې پر محيط پروت وي.

د دايرې عناصر
(Elements of a Circle)

شکل ته پام وکړئ د کیک مخ کوم هندسي شکل را ښيي او پرې شوې برخه يې د دايرې کوم عنصر راښيي؟

د دايرې د عناصرو تعريف

لومړی شکل او د دايرې د عناصرو تعريفونه خپلو کتابچوته نقل او وروسته لاندې تعريفونه د شکل له اړوندو عناصرو سره، په خپلو کتابچو کې ونښلوئ.



فعالیت

- د 4cm شعاع په اندازه یوه دایره رسم او له کاغذ څخه هغه پرې کړئ.
- د غه دایره داسې قات کړئ چې دواړه نیمې دایرې یو پر بل منطبقې شي.
- کاغذ خلاص کړئ، د کاغذ پر مخ قات شوې کرښه د څه په نامه یادیږي.
- دا ځل دوه نیمې دایرې بیا قات او قات کاغذ داسې خلاص کړئ، چې څلور مساوي برخې لاسته راغلې وي. څو قطعه خطونه(ټوټه کرښې)وینئ. هر یو د څه په نامه یادیږي؟
- څلور لاسته راغلې زاویې اندازه کړئ او وواياست چې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- د یوې دایرې د قطر او شعاع تر منځ اړیکې څه دي؟
- دایره داسې قات کړئ چې دوه نامساوي برخې جوړې شي، هغه خلاصه کړئ جوړه شوې کرښه د څه په نامه یادیږي؟ د هغې اوږدوالی د دایرې له قطر سره پرتله کړئ.

پایله:

- ومو لیدل چې په هره دایره کې که چیرې د دایرې د محیط دوه ټکي سره ونښلوو، د دایرې وتر لاسته راځي.
- په هره دایره کې ترټولو لوی وتر، د دایرې قطر دی چې د شعاع دوه برابره دی.
- د یوې دایرې هر قطر، وتر اما هر وتر قطر نه دی.
- هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمایي څخه کوچنی وي، د کوچني قوس (minor Arc) په نامه یادیږي.
- هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمایي څخه لوی وي، د لوی قوس (major Arc) په نامه یادیږي.

پوښتنې

1- د $C(0,4)$ دایره رسم کړئ.

a) د دایرې شعاع یا وړانګه، قطر، قطعه او قطاع په شکل کې و ښیئ.

b) د دایرې د قطر اوږدوالی وټاکئ.

c) د دایرې محیط په څلورو مساوي برخو وویشئ، له دې څخه، کومه پایله په لاس راځي؟

d) د دایرې داخلي ناحیه، خارجي ناحیه او د دایرې محیط د مختلفو رنګونو په واسطه په نښه کړئ.

له دایرې سره د یوې مستقیمې کرښې حالتونه

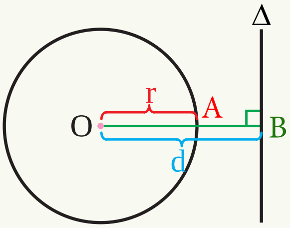
مخامخ شکل ته پام وکړئ او وواياست چې قلمونه او هندسي بکس، له دایرې سره څه اړیکې لري هره یوه توضیح کړئ؟

فعالیت

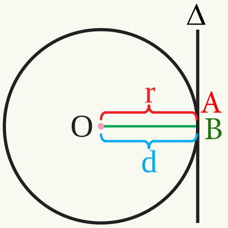
- یوه دایره او مستقیمونه داسې رسم کړئ چې د دایرې سره یوټکی، دوه ټکي او هیڅ ګډ(مشترک) ټکی و نلري.
- د دایرې له مرکز څخه په هره مستقیمه کرښه باندې عمودي کرښې رسم کړئ، د دایرې د مرکز اوکرښې تر منځ واټن اندازه کړئ او هر حالت، د دایرې د شعاع له اوږوالی سره پرتله کړئ.

د پورتنی فعالیت له کړنې څخه لیدل کیږي چې یوه مستقیمه کرښه او دایره نظر یو بل ته درې لاندې حالتونه لري:

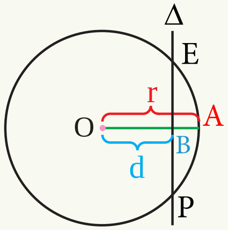
1- که چیرې مستقیمه کرښه له دایرې سره ګډ ټکي و نلري، مستقیمه کرښه له دایرې نه بهر پرته ده، په دې حالت کې د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه لوی دی یعنې: $d > r$



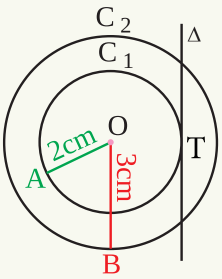
2- که چیرې مستقیمه کرښه له دایرې سره یو ګډ ټکی ولري، نو مستقیمې کرښې ته پر دایره مماس وایي. په دې حالت کې د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره برابر ده یعنې: $d = r$



3- که چیرې یو مستقیم له دایرې سره دوه ګډ(مشترک) ټکي ولري، مستقیم ته د دایرې غوڅې(قاطع) وایي، په دې حالت کې د مستقیم واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی دی، یعني $d < r$



مثال(بېلګه): د (O) ټکی په پام کې نیسو، د (O) په مرکز د 2 او 3 سانتي متره په شعاع دوې متحدالمرکز دایرې رسم کړئ. د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د C_1 او C_2، دوو دایرو له شعاع ګانو سره څه اړیکې لري؟



حل: په شکل کې لیدل کېږي چې د Δ مستقیم واټن د C_1 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې د وړانګې یا شعاع سره برابر دی یعني: $d = r$

د Δ مستقیم واټن د C_2 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې له وړانګې یا شعاع څخه کوچنی دی یعني: $d < r$

پوښتنې

د $3cm$ شعاع په اوږدوالي سره یوه دایره رسم کړئ، په دې دایره کې کرښې، په لاندینیو راکړل شویو واټنو رسم او حالتونه یې څرګند کړئ:

الف: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه $2.5cm$ وي.

ب: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه $4cm$ وي.

ج: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره برابره وي.

د دايرو موقعيت نسبت يو بل ته

مخامخ شکل ته په پام سره ووايئ چې:

1- د بايسيکل ټايرونه کوم هندسي شکل لري؟

2- ټايرونه يو بل سره څو حالتونه غوره کولای شئ؟ توضيح يې کړئ.

فعاليت

- دوې دايرې داسې رسم کړئ چې:

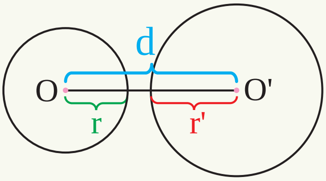
1: يو له بل سره يو ګډ ټکی ولري.

2: دوه ګډ ټکي ولري.

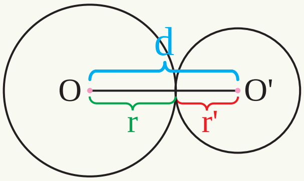
3: له يو بل سره ګډ ټکی و نلري.

- د دايرو د مرکزونو تر منځ اوږدوالی په پورته حالتونو کې د هغو له شعاع سره پرتله کړئ.

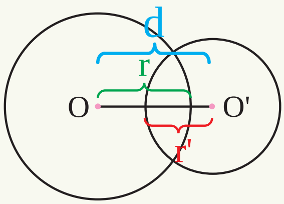
له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې په لاس راځي چې:



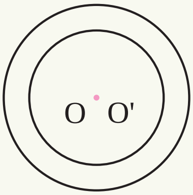
که چيرې د دوو دايرو د مرکزونو ترمنځ واټن، دهغو د شعاع د مجموعې له اوږدوالي څخه زيات وي، په دې حالت کې دايرو ته ناپرېکړې يا نا متقاطع دايرې وايي، يعنې $d > r + r'$



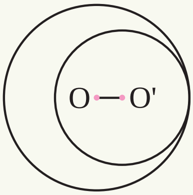
که چيرې د دوو دايرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغو د شعاع له مجموعې سره مساوي وي. په دې حالت کې، دايرو ته خارجا مماس وايي، يعنې $d = r + r'$



که د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ واټن، د هغو د شعاعګانو د مجموعې له اوږدوالي څخه کوچنۍ او د شعاعګانو د تفریق د حاصل له مطلقه قیمت څخه لوی وي، دایرې یو له بل سره متقاطع دي یعنې $|r-r'|<d<r+r'$



که د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ واټن صفر وي، دایرې د متحدالمرکز په نامه سره یادېږي، یعني $d=0$

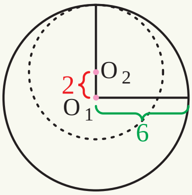


که د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ واټن د هغو د شعاع ګانو د تفریق حاصل له مطلقه قیمت سره مساوي وي، دایرو ته له دننه مماس وایي، یعني
$d=|r-r'|$

مثال(بېلګه): دوې دایرې داسې رسم کړئ، چې د لومړۍ دایرې شعاع $6cm$ ، د دویمې دایرې او لومړۍ دایرې مرکزونو تر منځ واټن $2cm$ او د دویمې دایرې شعاع د لومړۍ دایرې د شعاع $\frac{2}{3}$ برابره وي، په دې حالت کې، د دې دوو دایرو موقعیت نظر یو بل ته پیدا کړئ؟

حل: که د لومړنۍ دایرې شعاع r_1 او د دویمې دایرې شعاع r_2 ونوموو نو لرو:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 6cm \\ r_2 = \frac{2}{3} r_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r_2 = \frac{2}{3} \times 6 \\ r_2 = 4cm \end{array}$$



$$d = |r_1 - r_2| = |6-4| = |2| = 2$$

څرنګه چې:
نو له دایرې سره داخلاً مماس دي.

پوښتنې

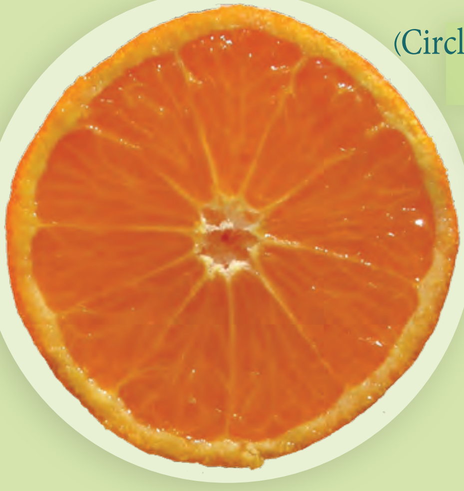
1- دوې دایرې د $6cm$ او $4cm$ په شعاع په پام کې و نیسئ او په لاندې توګه یې رسم کړئ.

الف: دایرې خارجاً (له باندې) سره مماس دي. ب: دایرې داخلاً(له دننه) سره مماس وي.

ج: له دایرې سره متقاطع(پرېکړې) وي. د: دایرې سره غیر متقاطع(ناپرېکړې) وي.

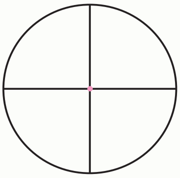
هـ : دایرې متحدالمرکزه(ګډ مرکز) وي.

د دایرې اړوند زاویې (Circle of a Angles)



تصویر ته پام وکړئ، هغه هندسي شکلونه چې په هغه کې لیدل کېږي، نوم یې واخلئ؟

فعالیت



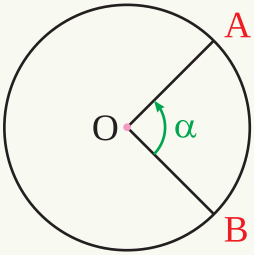
- په پورتني شکل کې، څو زاویې لیدلای شئ.
- د دې زاویو ګډ خاصیتونه کوم دي بیان یې کړئ؟
- د $C(0,3)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یو پر بل دوه عمود قطرونه رسم کړئ.
- څو مرکزي زاویې لاسته راځي؟ د هرې زاویې د مقابل قوس اندازه څو درجې ده؟
- د دې دایرې محیط څو درجې دی؟

د پورتني فعالیت له نتیجې څخه، لیکلای شو چې:

د یو قوس اوږدوالی د هغه د مرکزي زاویې په پراخوالي پورې اړه لري، یعنې:

$$\frac{\hat{AOB}}{360^\circ} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دایرې محیط}}$$

تعریف



هغه زاویه چې راس یې د دایرې په مرکز پروت او ضلعې یې د دایرې شعاعګانې وي، مرکزي زاویه بلل کېږي، لکه: د $\hat{AOB}$ یا د $\hat{\alpha}$ زاویه:

هره مرکزي زاويه له دايرې څخه يو قوس بېلوي، چې دغه قوس د خپلې مخامخ مرکزي زاويې مساوي اندازه لري، لکه: د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې له α زاويې سره مساوي دي.

د قرارداد له مخې ويلای شو چې په يوه دايره کې د مخامخ قوس اندازه د درجې له مخې له مرکزي زاويې سره مساوي ده، يعنې: $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = \hat{\alpha}$

لومړی مثال: که د $C(O, r)$ په دايره کې لوی قوس(major) د کوچني قوس(minor) پنځه برابره وي، نو د کوچني قوس، لوی قوس او د هغې د مرکزي زاويو اندازه پيدا کړئ.

حل: که کوچنی قوس $\overset{\frown}{PQ}_{\min or} = x$ وي، نو لوی قوس يې $\overset{\frown}{PAQ}_{major} = 360^\circ - x^\circ$ دی نو ليکلای شو، چې:

$$\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{PAQ} = 360^o$$

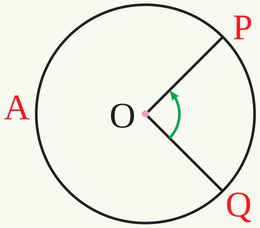
$$\overset{\frown}{PAQ}_{maj} = 5\overset{\frown}{PQ}_{\min}$$

$$x + 5x = 360^o$$

$$6x = 360^o$$

$$x = 60^o \quad \Rightarrow P\hat{O}Q = x = 60^\circ$$

$$\overset{\frown}{PAQ} = 5x = 5 \times 60 = 300^\circ$$



دويم مثال: په لاندې شکل کې چې که $K\hat{O}S = 31^\circ$, $E\hat{O}J = 82^\circ$, $\overline{EK}$ د دايرې قطر وي. د $\overset{\frown}{SJ}, \overset{\frown}{KJ}, \overset{\frown}{SK}$ د $\overset{\frown}{EK}$ قوسونه په درجه پيدا کړئ.

د مرکزي زاويې مخامخ قوس .....

$$\overset{\frown}{SK} = S\hat{O}K = 31^o \quad \Rightarrow \overset{\frown}{SK} = 31^o$$

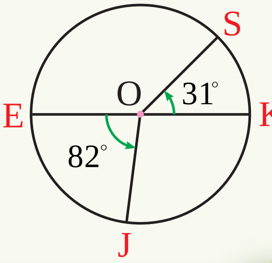
$$K\hat{O}J = 180^o - E\hat{O}J = 180^o - 82^o = 98^o$$

$$K\hat{O}J = \overset{\frown}{KJ} = 98^\circ$$

$$\overset{\frown}{SJ} = \overset{\frown}{SK} + \overset{\frown}{KJ} = 31^o + 98^o = 129^o$$

$$\overset{\frown}{JE} = E\hat{O}J = 82^o$$

$$\overset{\frown}{EK} = E\hat{O}K = 180^o$$

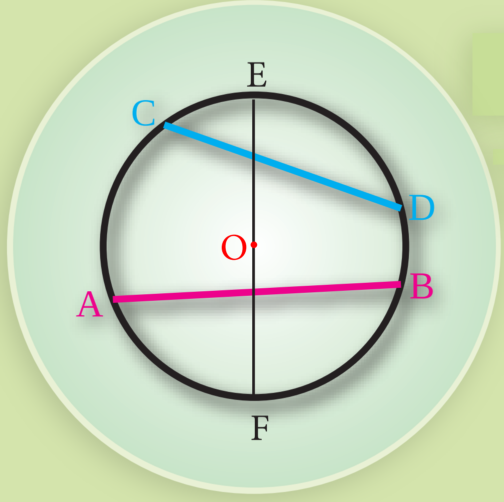


پوښتنې

1- د A, B او C درې ټکي د $C(O, r)$ پر دايره داسې پراته دي، چې $A\hat{O}B = 75^\circ$, $B\hat{O}C = 136^\circ$ زاويې د OB دواړو خواوو ته پرتې وي، $\overset{\frown}{AC}$ حساب کړئ.

2 - يوه مرکزي زاويه، د 180° په اندازه رسم کړئ.

د دايرې د وتر خواص



شكل ته پام وكړئ د $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ او $\overline{EF}$ مستقيمي كرښې په څه نامه يادېږي؟ د $\overline{EF}$ كرښې ځانګړتيا څه ده؟ او له $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ كرښې سره څه اړيكې لري؟

فعاليت

- د $C(O,r)$ په دايره كې د $\overline{AB}$ وتر رسم كړئ.
- د دايرې د $\overline{ED}$ قطر داسې رسم كړئ چې د $\overline{AB}$ په وتر د H په نقطه عمود وي.
- د (O) ټكى د A او B سره ونښلوئ، لاسته راغلى مثلث څه ډول مثلث دى؟
- په لاندې تشو ځايونو كې د($=,<$ يا $>$) ورنښې وليكئ.

$\overline{OA}\ \square\ \overline{OB}$, $\overset{\frown}{AE}\ \square\ \overset{\frown}{EB}$, $\overline{AH}\ \square\ \overline{HB}$

د دې فعاليت له پايلې څخه كولاى شو، لاندې قضيه بيان او ثبوت كړو.

قضيه: په هره دايره كې په وتر عمود قطر، وتر او د هغې مقابل قوس نيموي.

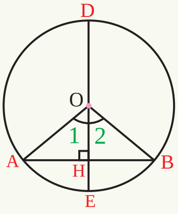
ثبوت: د $\overset{\Delta}{BOH}$ او $\overset{\Delta}{AOH}$ دوو مثلثونو څخه ليكلى شو چې:

$\overline{OA}=\overline{OB}$......... د دايرې شعاع

$\hat{H}_1=\hat{H}_2$.......... قايمه

$\overline{OH}=\overline{OH}$........ مشترك

$\Rightarrow \overset{\Delta}{AOH}\cong\overset{\Delta}{OHB}$

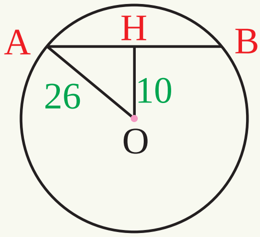


نو د دوو مثلثونو له تساوي څخه داسې پايله لاسته راځي، چې: $\overline{AH}=\overline{HB}$ او د $\overset{\Delta}{AOH}$ او $\overset{\Delta}{BOH}$ مركزي زاويې سره مساوي دي، په پايله كې $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}$ دى.

مثال: د $C(O,26)$ دايره راكړل شوې ده، كه چېرې پر وتر د عمود اوږدوالى، د دايرې له مركز څخه (2) واحده وي، د $\overline{AB}$ وتر اوږدوالى حساب كړئ.

حل: د $\overset{\Delta}{OAH}$ په مثلث کې د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:

$$\overline{OA}^2=\overline{AH}^2+\overline{OH}^2$$
$$(26)^2=\overline{AH}^2+(10)^2$$
$$\overline{AH}^2=(26)^2-(10)^2$$
$$\overline{AH}^2=676-100=576$$
$$\overline{AH}=24$$
$$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\times 24=48\,\text{unit}$$



فعالیت

- د $C(0,3)$ دایره رسم کړئ.
- په دایره کې د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ دوه مساوي وترونه رسم کړئ.
- د دایرې له مرکز څخه د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ په وترونو عمود کرښې رسم او اوږدوالی یې معلوم کړئ.

د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: په هره دایره کې د هغې مساوي وترونه، د دایرې له مرکز څخه مساوي واټن لري.

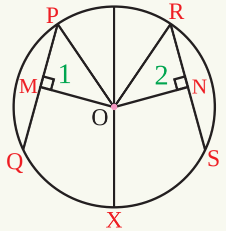
ثبوت: د $\overset{\Delta}{RON}$ او $\overset{\Delta}{POM}$ د دوو مثلثونو څخه لرو چې:

$\overline{OP}=\overline{OR}$ ....د دایرې شعاع

$\hat{1}=\hat{2}$ ....قایمه

$\overline{PQ}=\overline{RS}$ .... مساوي وترونه $\Longrightarrow$ $\overset{\Delta}{POM}\cong\overset{\Delta}{RON}$, $\overline{OM}=\overline{ON}$

$\dfrac{\overline{PQ}}{2}=\dfrac{\overline{RS}}{2}\Rightarrow PM=RN$

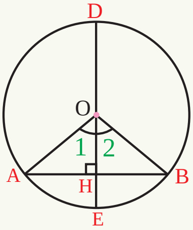


په پایله کې ویلای شو چې په هره دایره کې مساوي وترونه له مرکز څخه مساوي واټن لري.

پوښتنې

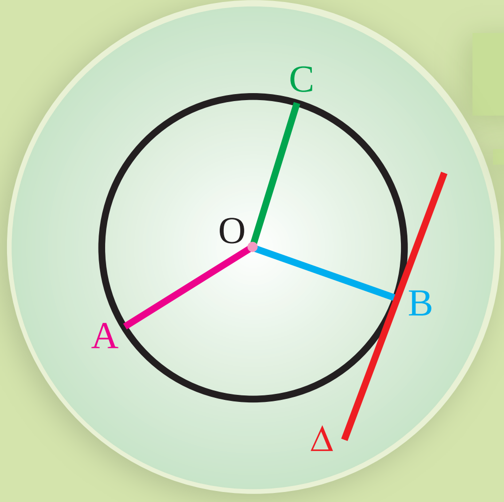
1- د $C(0,13)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ وتر د دایرې له مرکز څخه 5 واحده واټن لري، د $\overline{AB}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

2- که چیرې د یوې دایرې قطر د وتر له نیمایې څخه تیر شي، ثبوت کړئ چې پر وتر عمود دی.



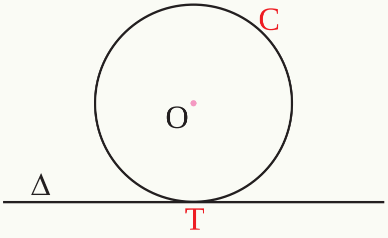
3- په یوه دایره کې $\overline{AB}=8cm$ وتر رسم کړئ. که چیرې د وتر عمودي فاصله له مرکز څخه $\overline{OH}=3cm$ وي، د دایرې قطر او محیط محاسبه کړئ.

د دايرې د شعاع خواص



شــکل ته په پام سـره، د OA، OB او OC کرښې څه نوميږي او د Δ کرښه، د دايرې او له OB وړانګې سره څه اړيکي لري؟

فعاليت



- په مخامخ شکل د (Δ) مستقيمه کرښه، د $C(0,2)$ دايرې د T په ټکي کې مماس دی. د A,B,C او D ټکي، د مماس پر مخ د T ټکي دواړو خواوو کې وټاکئ او د دايرې له مرکز سره يې ونښلوئ.
- ټوټه کرښې يا قطعه خطونه، د خط کش په مرسته اندازه کړئ.
- د دايرې د مرکز او مماس تر منځ لنډ واټن ونښياست؟

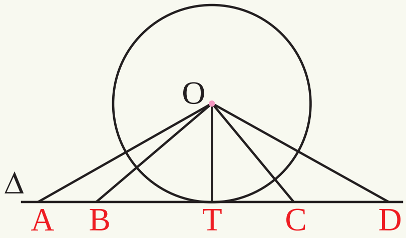
تر ټولو کوچنی فاصله د يوه ټکي او يوې مستقيمې کرښې تر منځ، کومه فاصله ده؟

- له پورتنيو دوو حالتونو څخه، څه پايله لاسته راوړئ؟

د دې فعاليت له پايلې څخه په لاندې توګه قضيه بيان او ثبوتوو.

قضيه: د دايرې شعاع، د تماس په ټکي کې، پر مماس عمود ده.

ثبوت: په لاندې شکل کې ليدل کيږي، چې:



$$\overline{OT} < \overline{OB} < \overline{OA}$$

$$\overline{OT} < \overline{OC} < \overline{OD}$$

پوهيږو، چې تر ټولو کوچنی فاصله، د يوه ټکي او مستقيم ترمنځ، عمودي فاصله ده. په پايله کې ويلای شو، چې مستقيمې کرښې: $\overline{OT} \perp \Delta$ دي.

لومړی مثال: په لاندې شکل کې، د Δ مستقیمه کرښه، د A په ټکي، د $C(O,r)$ پر دایره مماس ده. که چیرې د $\hat{AOB}$ مساوي 60° وي، د x زاویه پیدا کړئ.

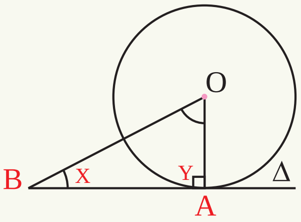
$OA \perp BA \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ$

$\hat{o} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$

$60^\circ + \hat{x} + 90^\circ = 180^\circ$

$x = 180^\circ - 150^\circ$

$x = 30^\circ$



دویم مثال: په لاندې شکل کې، د Δ مستقیمه کرښه، د $C(O,r)$ پر دایره مماس ده، که $\overline{OM} = 4unit$ او $\overline{ON} = 5unit$ اوږدوالي ولري، د $\overline{MN}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

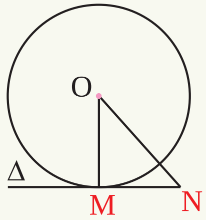
حل: پوهېږو، چې د دایرې شعاع، د تماس په ټکي، پر مماس عمود ده په پایله کې د $\overset{\Delta}{OMN}$ په قایم الزاویه مثلث کې، د فیثاغورث د قضیې پربنسټ لرو چې:

$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$

$\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$

$\overline{MN}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

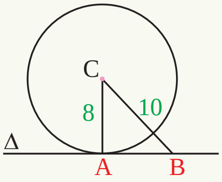
$\overline{MN} = 3$



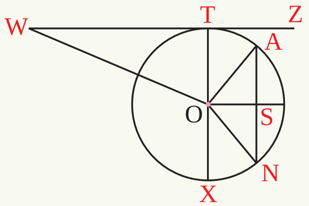
- د دایرې شعاع، د تماس په ټکي کې، پر مماس عمود وي.
- هر مماس، په هغه شعاع، چې د تماس له ټکي څخه تیرېږي عمود دی.

پوښتنې

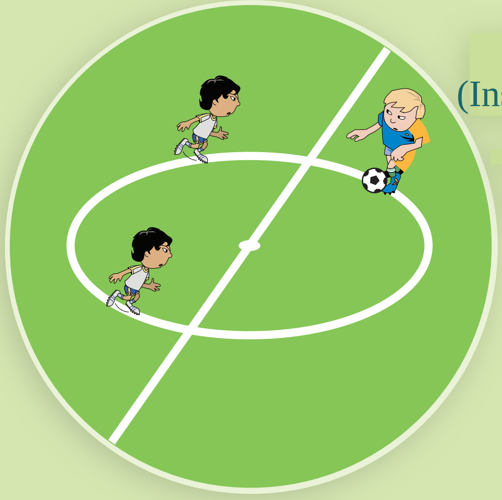
1- په مخامخ شکل کې د Δ کرښه د $P(C,r)$ پر دایرې مماس ده، که $\overline{AC} = 8unit$ او $\overline{BC} = 10unit$ اوږدوالی ولري، د $\overline{AB}$ اوږدوالی پیدا کړئ.



2 - په مخامخ شکل کې، که $\overline{WZ}$ د T په ټکي، د $C(O,r)$ پر دایرې مماس وي، $\overline{OS} = 1unit$ ، TW=3unit وي، د $\overline{OA}, \overline{AS}, \overline{SN}, \overline{OW}$ او $\overline{TX}$ اوږدوالی پیدا کړئ.



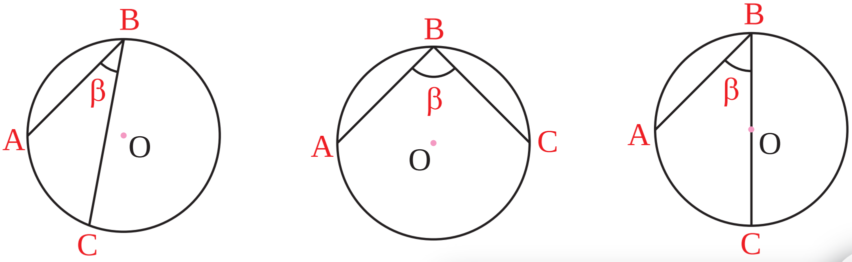
د دايرې محيطي زاويه
(Inscribed Angel of a Circle)



د فوټبـال د ميـدان پـه مرکـزي دايـره کې حسـيب الله، بلال ته او بلال الياس ته توپ پاس کړ. هغه شکل چې د توپ د شوټ له مسير څخه جوړيږي، څه ډول دی؟

تعريف

هغه زاويه چې راس يې د دايرې پر محيط او ضلعې يې د دايرې دوه وترونه وي، محيطي زاويه بلل کيږي، لکه: د $\hat{ABC}$ يا د $\hat{\beta}$.



فعاليت

- د $C(O,r)$ په دايره کې د $\hat{ABC}$ محيطي زاويه چې د $\overline{BC}$ ضلع يې د دايرې له مرکز څخه تيره شي، رسم کړئ.
- د A ټکی د دايرې له مرکز (O) سره ونښلوئ، څرنګه مثلث لاسته راځي.
- د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ زاويې د $O\hat{A}B$ په مثلث کې يو له بل سره څه اړيکې لري؟
- د $A\hat{O}C$ زاويه له $\hat{A}$ او $\hat{B}$ له زاويو سره څه اړيکې

په ياد ولرئ چې:

- د مرکـزي زاويې پراخوالی د خپل مخامخ قوس سره مساوي دی.
- پـه هر مثلـث کې د خارجي زاويې پراخوالـی د دوو داخلي پرتـه د مجـاورې زاويـې لـه مجموعې سره مساوي دی.

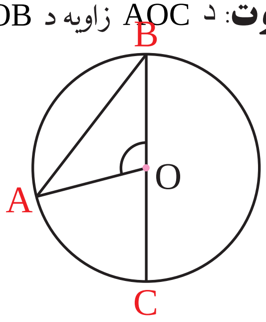
لري؟

د مخکیني مخ فعالیت له پایلې څخه په لاندې توګه، قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: د هرې محیطي زاویې پراخوالی د خپل مخامخ قوس نیمایي دی.

دلته قضیه په هغه حالت کې ثبوتوو چې، د محیطي زاویې یوه ضلع د دایرې قطر وي. د دوو نورو حالتونو ثبوت د کورنی دندې په توګه، زده کوونکو ته پاتې شو.

ثبوت: د $\widehat{AOC}$ زاویه د $\overset{\Delta}{AOB}$ د مثلث خارجي زاویه ده، لیکلای شو چې:



مرکزي زاویه ..... $\widehat{AOC} = \overset{\frown}{AC}$

$\widehat{AOC} = \widehat{A} + \widehat{B}$

$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{B} \text{ ..... ولې} \\ \widehat{AOC} = \widehat{B} + \widehat{B} \\ \widehat{AOC} = 2\widehat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\widehat{AOC} = 2\widehat{B}$

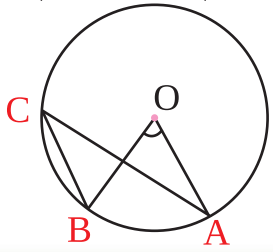
نو: $\overset{\frown}{AC} = 2\widehat{B}$

په پایله کې $\widehat{ABC} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

د $\widehat{ABC}$ د محیطي زاویې پراخوالی له $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ سره برابر دی.

مثال: د $C(O,r)$ په دایره کې که مرکزي زاویه $\widehat{AOB} = 60^\circ$ وي، د $\widehat{ACB}$ محیطي زاویې مخامخ $\overset{\frown}{AB}$ قوس، یې پیدا کړئ.

حل: په یوه دایره کې د مرکزي زاویې او د هغې د مخامخ قوس له اړیکو څخه لیکلی شو چې:



$\left.\begin{array}{l} \widehat{AOB} = 60^\circ \\ \widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$

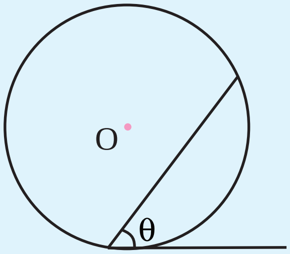
$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB} = 60^\circ \\ \widehat{ACB} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ACB} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

پوښتنې

1 - په یوه دایره کې د 90° په اندازه، محیطي زاویه رسم کړئ.

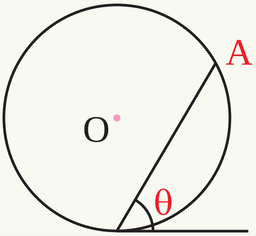
2 - د دایرې پر محیط د A او B دوه ټکي په پام کې ونیسئ. د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس په مقابل کې، څو محیطي زاویې رسمولای شو.

د دايرې مماسي زاويه



شکل ته پام وکړئ، هغو مستقيمو کرښو چې د θ زاويه يې جوړه کړې ده، نوم واخلئ او د زاويې راس چېرته پروت دی؟

تعريف



هغه زاويه چې يوه ضلع يې پر دايره مماس او دويمه ضلع يې د دايرې وتر وي او راس يې د تماس په ټکي کې پروت وي مماسي زاويه بلل کېږي، لکه: د θ زاويه.

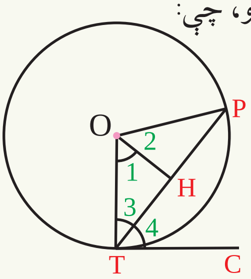
فعاليت

- د $C(0,6)$ دايره رسم کړئ.
- په دې دايره کې يوه مماسي زاويه رسم کړئ.
- د دايرې د وتر انجامونه د دايرې له مرکز سره ونښلوئ، څه ډول مثلث لاسته راځي؟
- د دايرې له مرکز څخه پر وتر عمود رسم کړئ.
- د $\widehat{TOP}$ مرکزي زاويه او د $\widehat{PTC}$ مماسي زاويې سره، څه اړيکي لري؟

د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه ثبوتولی شو.

قضيه: په يوه دايره کې د مماسي زاويې پراخوالی، د هغې د مخامخ قوس نيمايي په اندازه دی.

ثبوت: د $\overset{\Delta}{OHT}$ قايم الزاويه مثلث او $\widehat{OTC}$ قايمې زاويې څخه لرو، چې:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{3}+\hat{1}=90^\circ\\ \hat{3}+\hat{4}=90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{3}+\hat{1}=\hat{3}+\hat{4} \Rightarrow \hat{1}=\hat{4}$$

$$\hat{1}=\frac{\widehat{POT}}{2}=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2} \Rightarrow \widehat{PTC}=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2}$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې چې که د $C(0, r)$ په دایره کې د هغې مرکزي زاویه 45° وي، د محیطي او مماسي زاویو پراخوالی پیدا کړئ.

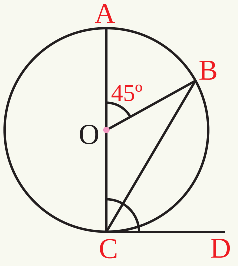
حل: د مرکزي زاویې او دهغې د مخامخ قوس له اړیکو څخه په ګټه لیکلی شو چې:

$$\hat{AOB} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = 45^\circ$$

$$\hat{BOC} = 135^\circ \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{BC} = 135^\circ$$

$$\hat{BCD} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$$

$$\hat{ACB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$$



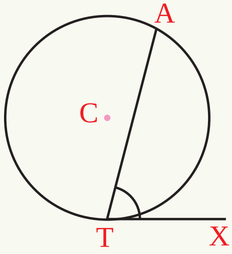
دویم مثال: په لاندې شکل کې د $\overset{\frown}{AT}$ قوس چې د $\hat{ATX}$ زاویې مخامخ ته واقع دی، $(2\alpha - 6)^\circ$ ده، د $\hat{ATX}$ مماسي زاویې اندازه پیدا کړئ.

حل: د مماسي زاویې او دهغې د مخامخ قوس لـه اړیکو څخه دګټې اخیستلو له مخې لیکلای شو، چې:

$$\hat{ATX} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}$$

$$\hat{ATX} = \frac{1}{2}(2\alpha - 6)^\circ$$

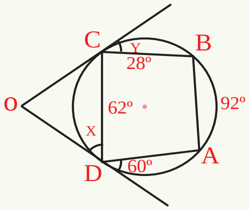
$$= (\alpha - 3)^\circ$$

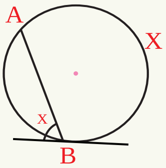


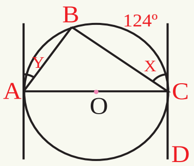
پایله: محیطي او مماسي زاویې چې د عین قوس په مقابل کې پرتې وي، سره مساوي دي. مماسي زاویه، د مخامخ قوس نیمایي ده.

پوښتنې

۱- د مماسي زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې په لاس راوړئ.







د لومړي څپرکي لنډيز

- **دايره**: د هغو ټکو سټ يا هندسي محل چې د يوه ټاکلي ټکي نه مساوي واټن ولري، دايره بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايرې له شعاع څخه کوچنی وي، د دايرې دننه ساحه بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايرې له مرکز څخه د دايرې له شعاع سره مساوي وي، د دايرې محيط يا مخ بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې فاصله يې د دايرې له مرکز څخه نسبت د دايرې شعاع ته لويه وي، د دايرې باندنۍ ساحه بلل کېږي.
- د مستوي هغه برخه چې د منحني او د دايرې د داخلي سطحې په واسطه بېله شوې وي، د دايرې سطحه بلل کېږي.
- **د دايرې شعاع**: هغه کرښه چې د دايرې مرکز او د محيط يو ټکی سره نښلوي، د دايرې شعاع بلل کېږي.
- **د دايرې وتر**: هغه ټوټه کرښه چې د دايرې د محيط دوه ټکي سره نښلوي، ددايرې وتر بلل کېږي.
- **د دايرې قطر**: د دايرې هغه وتر چې له مرکز څخه تيرېږي د دايرې قطر بلل کېږي. هر قطر، د شعاع دوه برابره دی.
- **د دايرې قوس**: د دايرې د محيط يوه برخه چې د دوو ټکو په مرسته بېله شوې وي قوس بلل کېږي.
- **د دايرې مماس**: هغه کرښه چې له دايرې سره يو ګډ ټکی ولري، مماس بلل کېږي.
- د دايرې قطعه: د دايرې هغه برخه چې د دايرې د وتر او اړونده قوس تر منځ پرته وي، د دايرې قطعه بلل کېږي
- **د دايرې قطاع**: د دايرې يوه برخه ده چې د دوو شعاعګانو او اړوند قوس په مرسته، د دايرې له سطحې څخه بېله شوې وي.
- که يو مستقيم له يوې دايرې سره يو ګډ ټکی ولري، د مماس او که چيرې دوه ګډ ټکي ولري، د قاطع په نوم يادېږي.
- په هره دايره کې د دايرې له مرکز څخه پر وتر عمودي کرښه، وتر او مخامخ قوس نيمايي کوي.

- د دایرې شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود ده.
- د یوې دایرې مساوي وترونه، د هغې له مرکز څخه مساوي واټن لري.
- **مرکزي زاویه**: هغه زاویه چې راس یې د دایرې په مرکز پروت او ضلعې یې د دایرې شعاعګانې وي، مرکزي زاویه بلل کېږي.
- د هرې مرکزي زاویې اندازه، د هغې له مخامخ قوس سره مساوي ده.
- د مرکزي زاویې د مخامخ قوس اوږدوالی د دې رابطې $\frac{A\hat{O}B}{360^{o}} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دایرې محیط}}$ څخه په لاس راځي.
- **محیطي زاویه**: هغه زاویه ده چې راس یې د دایرې پر محیط او ضلعې یې د دایرې وترونه وي، محیطي زاویه بلل کېږي.
- د هرې محیطي زاویې پراخوالی، د هغې د مخامخ قوس له نیمایي سره مساوي دی.
- هره محیطي زاویه، د هغې د مرکزي زاویې نیمایي ده چې د عین قوس په مخامخ کې پر ته ده.
- **مماسي زاویه**: هغه زاویه ده چې یوه ضلعه یې په دایرې مماس او بله یې د دایرې وتر او راس یې د تماس په ټکي کې د دایرې پر محیط پروت وي، مماسي زاویه بلل کېږي.
- هره مماسي زاویه د هغې مرکزي زاویې نیمایي ده، چې د عین قوس په مخامخ پرته وي.
- د دوو دایرو حالتونه یو بل ته:

ـ که د دوو دایرو د مرکز ونو د واټن اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له مجموعې څخه لوی وي دایرې غیر متقاطع بلل کېږي.

ـ که د دوو دایرو د مرکزونو د واټن اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له مجموعې سره مساوي وي دایرې خارجاً(د یا له باندې خوا) مماس بلل کېږي.

ـ که د دوو دایرو د مرکزونو اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له اوږدوالي څخه کوچنی او د شعاع ګانو د تفریق حاصل یې د مطلقه قیمت څخه لوی وي، متقاطع بلل کېږي.

ـ که د دایرو د مرکزونو تر منځ واټن، د هغې د شعاعګانو د تفریق حاصل مطلقه قیمت سره مساوي وي دایرې داخلاً(دننه) مماس دی.

ـ که د دایرو د مرکزونو تر منځ واټن صفر وي دایرې متحد المرکز(د یوه مرکز لرونکي) بلل کېږي.

د لومړي څپرکي پوښتنې

• په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره، څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ.

1– د يوې دايرې د قطر اوږدوالی مساوي دی په:

a) 3r b) π c) 2π d) 2r

2– دايره په لاندې ډول ښودل کېږي:

a) 0 b) (1, 2) c) (b, a) d) C(o, r)

3- هغه مستقيمه کرښه چې له دايرې سره يو ګډ ټکی ولري:

a) د وتر په نوم يادېږي. b) د قوس په نوم يادېږي.

c) د مماس په نوم يادېږي. d) د محيط په نوم يادېږي.

4- د هغو ټکو سټ چې فاصله يې د دايرې له شعاع څخه لويه وي:

a) د دايرې مخ بلل کېږي. b) د دايرې خارج بلل کېږي.

c) دايره بلل کېږي. d) د دايرې داخل بلل کېږي.

5- هغه وتر چې د دايرې مرکز ته له نورو وترونو څخه نږدې وي نظر نورو وترونوته:

a) لنډ وتر دی. b) اوږد وتر دی.

c) مساوي دی. d) هيڅ يو.

6- که يوه مستقيمه کرښه، دايره په دوو ټکو کې پرې کړي، هغې ته:

a) عمود وايي. b) قاطع وايي.

c) مماس وايي. d) موازي وايي.

7- که د يوې دايرې مرکزي زاويه 80° وي، د مخامخ قوس اندازه يې مساوي په:

a) 90° b) $70'$ c) $80''$ d) 80°

8- يوه مستقيمه کرښه له يوې دايرې سره څو حالتونه لري:

a) 3 b) 7 c) 4 d) 1

9- هغه زاويه چې راس يې د ايرې پر محيط او ضلعې يې دوه وترونه وي:

a) مرکزي زاويه ده. b) مماسي زاويه ده.

c) محاطي زاويه ده. d) محيطي زاويه ده.

• تش ځایونه په مناسبو کلمو ډک کړئ:

1- د دایرې هغه برخه چې د وتر په واسطه د دایرې له سطحې څخه بېله شوې وي، د دایرې د................. په نوم یادېږي.

2- د دایرې تر ټولو لوی وتر .... بلل کېږي.

3- د هغو ټکو سټ چې .... د دایرې له شعاع څخه لږ وي د دایرې .... بلل کېږي.

4- که مستقیمه کرښه له یوې دایرې سره هیڅ ګډ .... ونلري هغه مستقیمه کرښه له دایرې څخه.................. پر ته ده.

5- په هره دایره کې پر وتر.................. قطر، وتر نیمایي او .... قوسونه د هغې څخه بېلوي.

6- په هر قایم الزاویه مثلث کې د وتر .... د .... ضلعو د مربعاتو له مجموعې سره مساوي ده.

7- په هره دایره کې هغه وتر چې مرکز ته نژدې وي، تر ټولو .... وتر دی.

8- د دایرې شعاع د تماس په ټکي پر .... عمود وي.

9- مرکزي زاویه هغه زاویه ده چې .... یې د دایرې په مرکز او ضلعې یې د دایرې.................. وي.

10- هغه زاویه چې یوه ضلع یې .... په دایره او بله یې د دایرې .... او راس یې د .... په ټکي پروت وي د .... زاویې په نوم یادېږي.

• په لاندې جملو کې سمې او نا سمې جملې د(س) او (ن) د تورو په مرسته په نښه کړئ.

1- ( ) د یوې مستوي د ټولو ټکو سټ چې د(O) د یوه ټاکلي ټکي څخه د(r) مساوي فاصلې ولري، دایره بلل کېږي.

2- ( ) دایره د خپل محیط په نامه یادېږي.

3- ( ) هغه قطعه خط یا ټوټه کرښه چې د دایرې د محیط دوه ټکي سره نښلوي، د دایرې د قطر په نامه یادېږي.

4- ( ) په یوه دایره کې شعاع یا وړانګه د قطر نیمایي ده.

5- ( ) د دایرې قطعه د($\frown$) په نښه ښودل کېږي.

6- (   ) د هغو ټکو سټ چې د دایرې له شعاع سره مساوي فاصله ولري، د دایرې خارجي ساحه بلل کېږي.

7- (   ) په یوه دایره کې عمود قطر په وتر، وتر نیمایي او دوه بېلابېل قوسونه منځ ته راوړي.

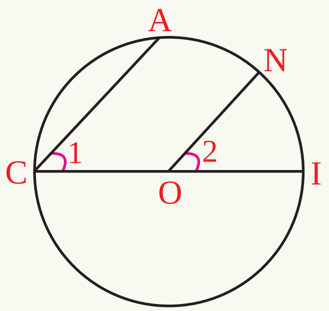
8- (   ) ټوله دایره، د دایرې د قوس په نوم یادیږي.

9- (   ) د $d=\frac{r}{2}$ په رابطه کې d قطر او r د دایرې شعاع ده.

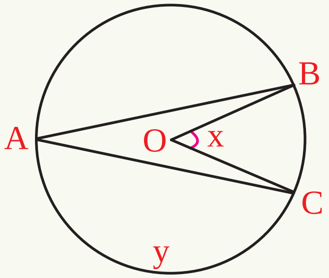
10- (   ) د یوې دایرې شعاع د تماس په ټکي پر مماس عمود وي.

- لاندې پوښتنې په تفصیل سره حل کړئ.

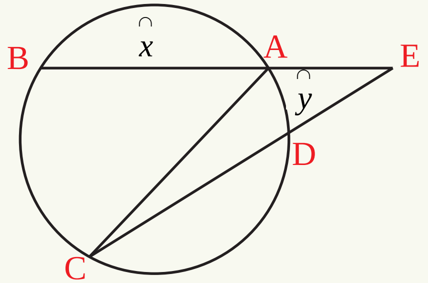
1- په لاندې شکل کې که $\overline{CI}$ د دایرې قطر او $\overline{CA} \parallel \overline{ON}$ وي، ثبوت کړئ چې $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NI}$ دی؟



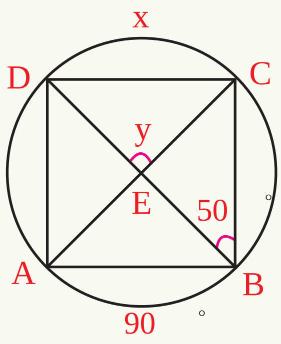
2- په لاندې شکل کې که $y=140^\circ$ او $\overset{\frown}{AB}=48^\circ$ وي، د $\hat{x}$ پیدا کړئ.

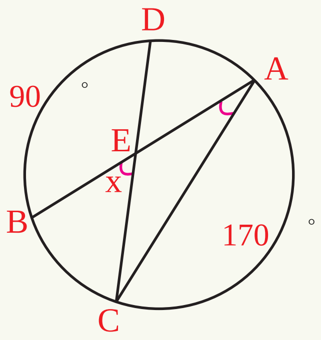


3- په لاندې شکل کې که $\hat{E} = 40^\circ$ او د $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$ او $\overset{\frown}{CD}$ مساوي اندازه اوږدوالی مساوي وي، د $A\hat{C}D$ اندازه معلومه کړئ.

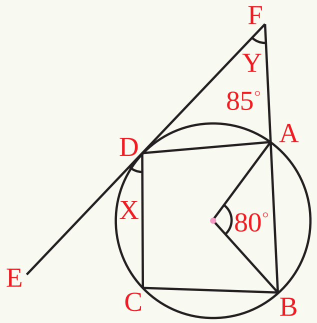


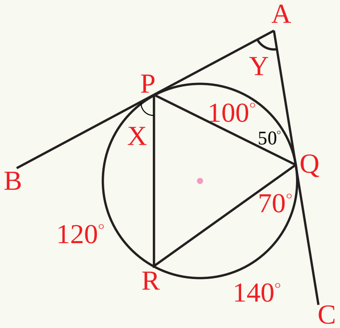
4- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازه وټاکئ.





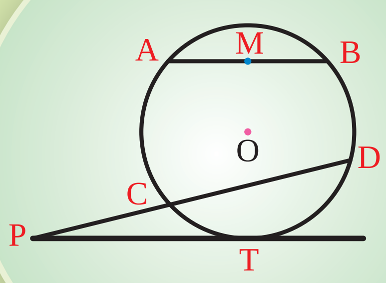
5- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازې پیدا کړئ.





دویم څپـــرکی

په یوه دایره کې د اوږدوالي اړیکې



په دايره کې د اوږدوالي اړيکې

هغه ټوټه کرښې، چې په مخامخ شکل کې وينئ، نوم يې واخلئ.

تعريف

د اوږدوالي اړيکې: په يوه هندسي شکل کې، د کرښو د اجزاوو تر منځ اړيکې د اوږدوالي د اړيکو په نوم يادېږي.

فعاليت

- د P له ټکي څخه چې د $C(O,r)$ دايرې په بهر کې پروت، د $\overline{PAB}$ او $\overline{PCD}$ قاطع کرښې رسم کړئ؟
- د A ټکی له D او د B ټکی له C ټکي سره ونښلوئ؟
- وښيئ، چې د $\overset{\Delta}{PAD}$ او $\overset{\Delta}{PCB}$ مثلثونه، مشابه دي؟
- په پورته دوو مثلثونو کې، د تشابه نسبتونه وليکئ؟

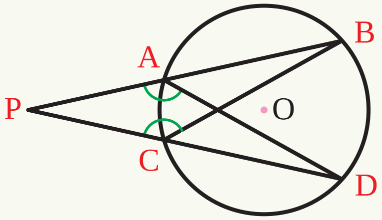
مرسته

- که چيرې په دوه مثلثونو کې دوه زاويې سره مساوي وي، دريمه زاويه يې هم سره مساوي وي.
- په مشابه مثلثونو کې د مساوي زاويو مخامخ ضلعې متناسبې دي.

د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه ښکاري.

قضيه (1-2): که چيرې د يوې دايرې له بهرني ټکي څخه پر دايره دوه قاطع کرښې رسم شي، د يوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دي.

يعني: $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\ \overline{PD}$



ثبوت: د $\overset{\Delta}{PAD}$ او $\overset{\Delta}{PCB}$ مثلثونو تر منځ، لاندې اړیکې شته دي.

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\hat{D}=\hat{B} & \text{د عین قوس محیطي زاویې}\\ \hat{P}=\hat{P} & \text{ګډ}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}$$

د پورتنیو درې زاویو له تساوي څخه پوهېږو، چې د $\overset{\Delta}{PAD}$ او $\overset{\Delta}{PCB}$ مثلثونه مشابه دي، نو لیکلی شو، چې:

$$\overset{\Delta}{PCB}\sim\overset{\Delta}{PAD}\Rightarrow\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}\Rightarrow PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

نتیجه

مثال: په لاندې شکل کې، $\overline{PA}$ او $\overline{PB}$ د $C(O,r)$ د دایرې دوه قاطع کرښې دي. که $\overline{PA}=10cm$, $\overline{PC}=6cm$ او $\overline{PD}=4cm$ اوږدوالی ولري، د $\overline{PB}$ او $\overline{DB}$ اوږدوالی پیدا کړئ؟

حل: هغه قطعات(ټوټه کرښې)، چې د P له ټکي څخه رسمېږي او د(1-2) قضیې په مرسته لیکلای شو، چې:

$\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$

$10\cdot 6=\overline{PB}\cdot 4$

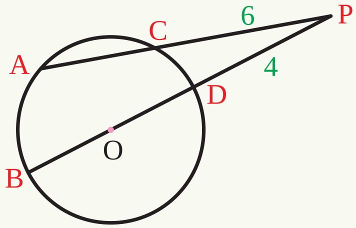
$60=4\overline{PB}$

$\overline{PB}=15cm$

$\overline{DB}=\overline{PB}-\overline{PD}$

$\overline{DB}=15-4$

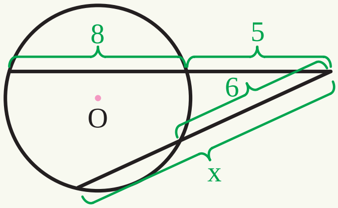
$\overline{DB}=11cm$

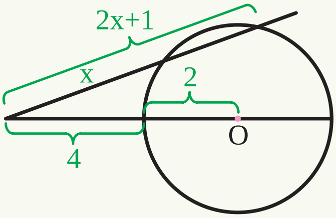


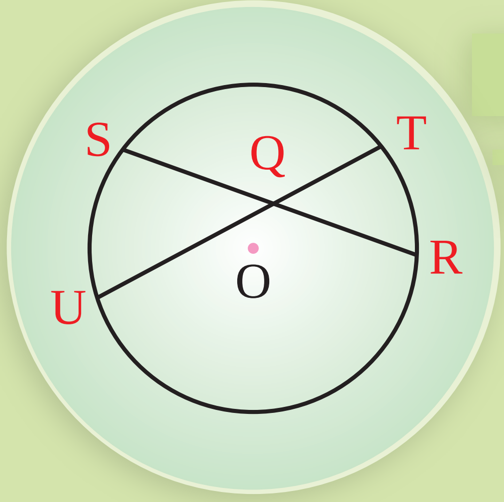
که چیرې د یوې دایرې له بهرنې ټکي څخه، پر دایره دوه قاطع کرښې رسم شي، د یوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې، د x عددي قیمت پیدا کړئ؟



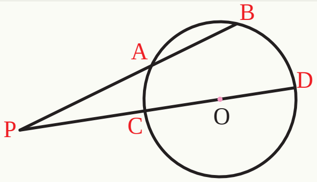




د يو ټکي طاقت، نظر دايرې ته

مخامخ شــکل ته پاملرنه وکړئ، ويلاشــى شــئ چــې، د $\overline{QR}\cdot\overline{QS}=\overline{QU}\cdot\overline{QT}$ مساوات سم دى؟

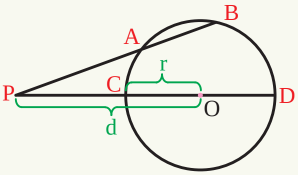
فعاليت



- د P له يوه ټاکلي ټکي څخه، چې C(O,r) د دايرې څخه بهر پروت دى پر هغه د $\overline{PAB}$ قاطع رسم کړئ.
- د P له بهرنى ټکي څخه، د PCD قاطع داسې رسم کړئ، چې د $C(O,r)$ دايرې له مرکز څخه تير شي.
- د $\overline{PAB}$ او PCD د قطعه خطونو ترمنځ اړيکې د (2-1) قضيې له مخې وليکئ.
- په پورتنى اړيکه کې، د $\overline{PC}$ او $\overline{PD}$ اوږدوالى، د دايرې له مرکز څخه وليکئ؟
- که د P ټکي واټن، د دايرې له مرکز څخه په (d) او شعاع يا وړانګه په(r) سره وښيو، پورتنى اړيکه د d او r تر منځ وليکئ.

د پاسنى فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه څرګندېږي.

قضيه(2-2): که ديو ټاکلى ټکي څخه دوې قاطع کرښې، په يوه دايره داسې رسم کړئ چې، دويمه قاطع د دايرې له مرکز څخه تېره شي. دلومړى قاطع د ټوټه کرښو ترمنځ د ضرب حاصل ديو ټاکلى اندازې (d^2-r^2) سره مساوي دى، (d) د ټاکلي ټکي او د دايرې د مرکز تر منځ واټن او(r) د دايرې شعاع يا وړانګه ده.



لومړى حالت: که چيرې ټاکلى ټکى، د دايرې په بهر کې پروت وي.

ثبوت: که چيرې د P ټکى، د دايرې په بهر کې او واټن له مرکز څخه په(d) او دايرې شعاع په(r) سره وښيو، د (2-1)

قضيې له مخې ليکلای شو:

دوه نـور حالتونه چې ټاکلي ټکي يـې، د دايرې پر محيط او دننه په دايره کې پراته وي، دا د ګرانو زده کوونکو کورنی دنده ده.

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}....(2-1)$$

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(\overline{PO}-\overline{CO})(\overline{PO}+\overline{OD})$$

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(d-r)(d+r)$$

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=d^2-r^2$$

تعريف

د $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=d^2-r^2$ رابطه د P د ټکي طاقت، نظر د $C(o,r)$ دايرې ته، وايي چې، ثابته اندازه ده چې د $P_{(o)}=d^2-r^2$ په شکل ښودل کېږي.

لومړی مثال: که د يوې دايرې قطر $10cm$ او د P ټکی د $13cm$ په اندازه، د دايرې له مرکز څخه واټن ولري، د P ټکي طاقت، نظر $C(o,r)$ دايرې ته پيدا کړئ.

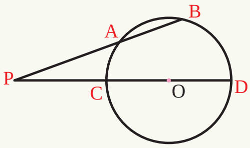
حل: څرنګه چې د دايرې قطر راکړل شوی دی، لومړی د دايرې شعاع يا وړانګه وروسته د P ټکي طاقت، نظر دايرې ته پيدا کړئ.

$$r=\frac{D}{2}=\frac{10}{2}=5cm$$

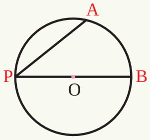
$$P_{(O)}=d^2-r^2$$

$$P_{(O)}=(13)^2-(5)^2$$

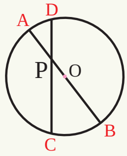
$$P_{(O)}=169-25\Rightarrow P_{(O)}=144$$



• که د يوه ټکي طاقت نظر يوې دايرې ته مثبت وي، ټکی د دايرې نه بهر پروت دی، لکه د(2-2) قضيې شکل $P_{(o)}=d^2-r^2>0\Rightarrow d^2>r^2$



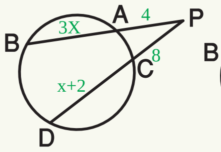
• که د يوه ټکي طاقت، نظر دايرې ته صفر وي، ټکی د دايرې پر محيط پروت دی، يعني $P_{(0)}=d^2-r^2=0\Rightarrow d^2=r^2$

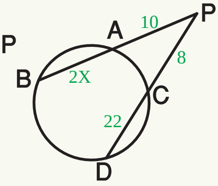


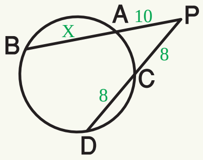
• که د يوه ټکي طاقت، نظر دايرې ته منفي وي ټکی د دايرې دننه پروت دی، يعني $P_{(0)}=d^2-r^2<0\Rightarrow d^2<r^2$

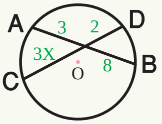
پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې، د x قيمتونه پيدا کړئ.



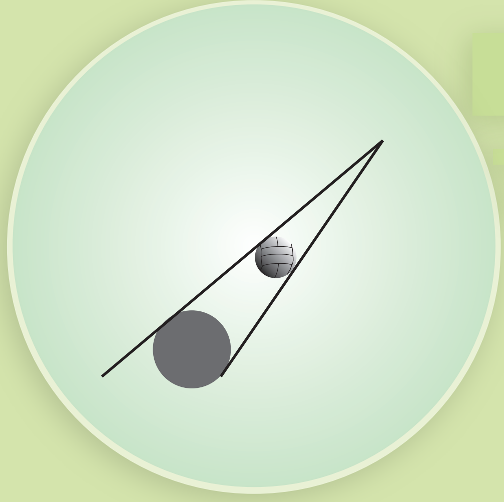






2- په لاندې حالتونو کې، د يوه ټکي طاقت، نظر يوې دايرې ته پيدا کړئ.

الف) که $d=7$ او $r=4$ وي. ب) که $d=3$ او $r=3$ وي. ج) که $d=3$ او $r=5$ وي.



په دايرې مماس کرښه

شکل ته پاملرنه وکړئ.
که چيرې د نور د وړانګو د حرکت مسير مستقيمې کرښې ومنل شي، دغه کرښې نظر توپ او د هغه له سيورى سره څه اړيکې لري؟

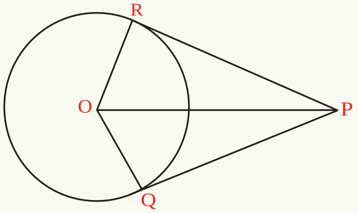
فعاليت

- د P له يوه بهرني ټکي نه د $C(O,r)$ په دايره د $\overline{PR}$ او $\overline{PQ}$ دوه مماسونه رسم کړئ.
- که د Q او R ټکي پر دايره د تماس ټکي وي.ايا د P له ټکي پر دايره بل مماس رسمېدلای شي؟
- د O ټکي د Q، R او P ټکو سره و نښلوئ.
- لاسته راغلي مثلثونه، سره څه اړيکې لري؟
- ايا رسم شوي مماسونه سره برابر دي؟

د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه څرګندېږي.

قضيه(2-3): د يوې دايرې له بهرني ټکي څخه پر دايره دوه مساوي مماسونه، رسمېږي.

ثبوت: په $\overset{\Delta}{POR}$ او $\overset{\Delta}{POQ}$ مثلثونو کې ليکلى شو، چې:



$\overline{OR} = \overline{OQ}$.... د دايرې شعاع يا وړانګه

$\overline{PO} = \overline{PO}$ .... ګډ

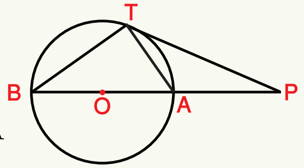
$\hat{R} = \hat{Q}$.............90°

$\overset{\Delta}{POR} \cong \overset{\Delta}{POQ}$

$\overline{PR} = \overline{PQ}$

قضيه(2-4): که د P له ټکي څخه د $\overline{PT}$ مماس او د $\overline{PB}$ يو قاطع پر يوه دايره رسم شي، ثبوت کړئ، چې د يوه ټکي طاقت، نظر دايرې ته، د مماس له مربع سره مساوي دى.

ثبوت: د $C(O,r)$ په دايره کې، $\overline{PT}$ مماس او $\overline{PAB}$ قاطع دی، که د T ټکی له A او B ټکوسره ونښلوو، د $\overset{\Delta}{PTA}$ او $\overset{\Delta}{PTB}$ مثلثونو څخه ليکلای شو، چې:



$P\hat{T}A = P\hat{B}T .....(I)$ د عين قوس مخامخ

$\hat{P} = \hat{P} ....(II)$ (مشترک)

د I او II رابطو له مخې ليکلای شو چې:

$P\hat{T}B = P\hat{A}T$

$\Rightarrow \overset{\Delta}{PTB} \sim \overset{\Delta}{PTA}$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}}$$

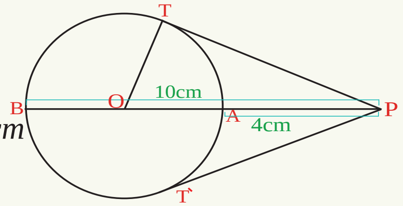
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 \Rightarrow \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

په پايله کې ليکلای شو، چې: $PT = PT'$

مثال: په لاندې شکل کې د $\overline{PT}$ او $\overline{PT'}$ اوږدوالی لاسته راوړئ.

حل:

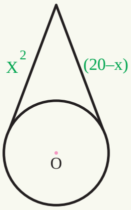
$PA = 4cm$	$PT^2 = PA \cdot PB$
$PB = 10cm$	$PT^2 = 4 \times 10 = 40$
$PT = ?$	$PT = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}cm$

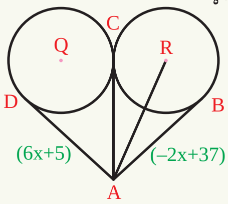


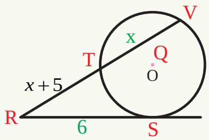
- د يوې دايرې له باندنې ټکي څخه، پر هغې دوه مساوي مماسونه رسمولای شو.
که چيرې د يوې دايرې له بهرنې ټکي څخه پر دايره يو قاطع او يو مماس رسم شي، د يوه ټکي طاقت، نظر دايرې ته، د مماس له مربع سره مساوي دی.

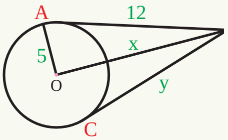
پوښتنې

په لاندې شکلونو کې، د x قيمت لاسته راوړئ.

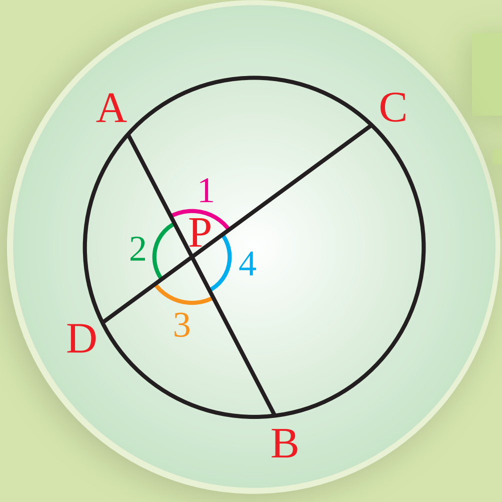








د دايرې دننۍ(داخلي) زاويه



د يوې دايرې په دننه کې، دوه متقاطع وترونه رسم کړئ او ووايئ، چې څو زاويې جوړوې، او څه يې نوموئ؟

تعريف

هغه زاويې، چې د دايرې په دننه کې، د دوو وترونو د تقاطع په مرسته منځ ته راځي، د دايرې دننۍ زاويې بلل کيږي، لکه په پورتني شکل کې، د $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}$ زاويې.

فعاليت

- د $C(O,r)$ دايره رسم کړئ، په هغې کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه وترونه د اسې رسم کړئ، چې د P په ټکي که يو بل پرې کړي، هغه زاويې چې منځ ته راغلې د څه په نامه يادېږي؟
- د D او C ټکي د B سره ونښلوئ د $\hat{CPB}$ زاويه چې د $\overset{\Delta}{PBD}$ باندنۍ زاويه ده، د مثلث د دوو ناګاونډيو زاويو سره څه اړيکه لري.

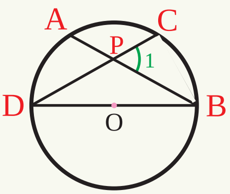
په ياد ولرئ:

- هره محيطي زاويه، د مخامخ قوس نيمايي ده.
- په يوه مثلث کې، د هرې خارجي زاويې پراخوالی د دوو ناګاونډيو زاويو له مجموعې سره برابره ده.

د دې فعاليت له پايلې څخه، لاندې قضيه بيان او ثبوتوو.

قضيه(5-2): د يوې دايرې د هرې ننۍ(داخلي) زاويې پراخوالي، د هغو قوسونو د مجموعې له نيمايي سره مساوي دی، چې د د زاويو د اضلاعو په مرسته، د دايرې له محيط څخه جلا کيږي.

ثبوت: څرنګه چې د $\hat{B}$ او $\hat{D}$ د دايرې محيطي زاويې دي، نو کولای شو چې وليکو:



$\hat{B}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ د محيطي زاويې وسعت

$\hat{D}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ د محيطي زاويې وسعت

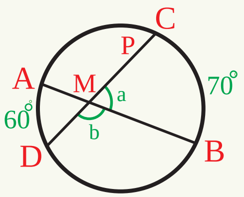
$\hat{CPB}=\hat{B}+\hat{D}$ د هر مثلث خارجي زاويه

$$\Rightarrow \hat{CPB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

$$\hat{CPB}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې د $\hat{a}$ او $\hat{b}$ زاويې پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې، د يوې دايرې دننی زاويې پراخوالی، د هغو قوسونو دمجموعې له نيمايي سره مساوي دی، چې د زاويو په مخامخ کې پراته وي، يعني:



$$C\hat{M}B = \hat{a} = \frac{\hat{AD}+\hat{BC}}{2} = \frac{60^\circ + 70^\circ}{2} = 65^\circ$$

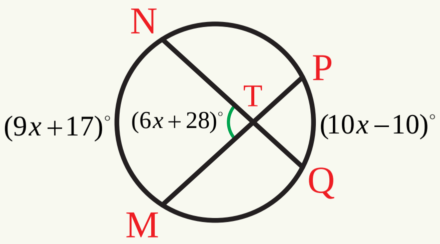
$$\hat{b} = 180^\circ - a = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

دويم مثال: په لاندې شکل کې، د x او $N\hat{T}M$ زاويې پراخوالی وټاکئ.

حل: د يوې دايرې دننی زاويو د اړيکو له مخې ليکلی شو چې:

$$\overset{\frown}{NM} = 9x+17 \quad , \quad \overset{\frown}{PQ} = 10x-10$$

$$N\hat{T}M = 6x+28$$



$$6x+28 = \frac{\overset{\frown}{NM}+\overset{\frown}{PQ}}{2}$$

$$6x+28 = \frac{9x+17+10x-10}{2}$$

$$12x+56 = 19x+7$$

$$-7x = -49$$

$$x = 7$$

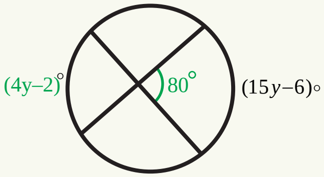
$$N\hat{T}M = 6x+28$$

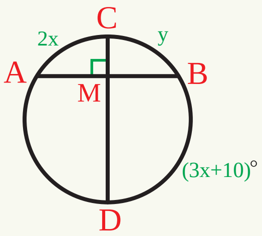
$$= 6\times 7+28 = 42+28 \Rightarrow N\hat{T}M = 70^\circ$$

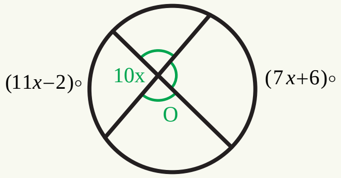
$$N\hat{T}M = 70^\circ$$

پوښتنې

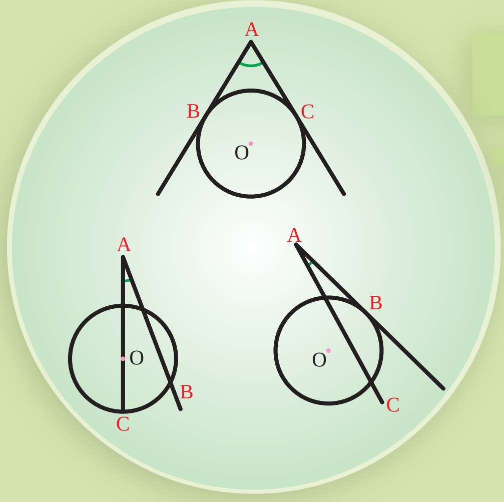
1- په لاندې شکلونو کې، د x او y اندازې معلومې کړئ.







د دایرې باندنۍ زاویه



په مخامخ شکلونو کې، د ټوټه کرښو او د زاویو نومونه واخلئ.

تعریف

هغه زاویه، چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو یا د یو قاطع او یوه مماس له پرېکړې څخه، د دایرې په بهر کې منځ ته راغلې وي، د دایرې باندنۍ زاویه بلل کېږي.

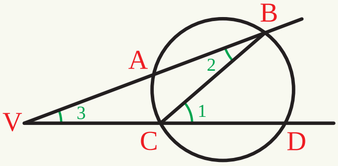
فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه غیر موازي وترونه غزوو، تر څو د $B\hat{V}D$ خارجي زاویه منځ ته راشي د C ټکی له B سره ونښلوئ.
- د $\overset{\Delta}{BVC}$ مثلث باندنۍ زاویه یعنې $(\hat{1})$ د مثلث د دوو ناګاونډیو زاویو سره څه اړیکي لري؟

د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیانېږي.

قضیه (2-6): د یوې دایرې د باندنۍ زاویې پراخوالی، د هغو قوسونو د توپیر له نمایي سره مساوي دی، چې د وترونو د تقاطع څخه منځ ته راغلې وي.

ثبوت: د B ټکی له C سره نښلوو او $\overset{\Delta}{VBC}$ مثلث کې لرو چې:



$\hat{1} = \hat{2} + \hat{3}$ د مثلث خارجي زاویې پراخوالی

$\hat{3} = \hat{1} - \hat{2}$

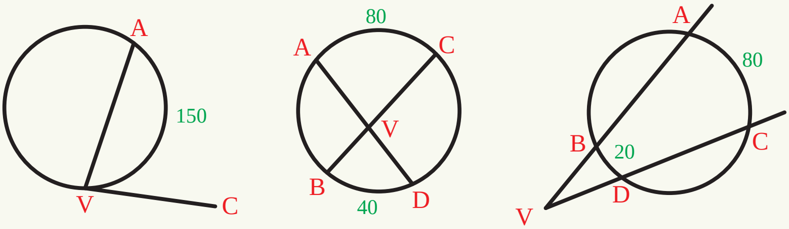
$\hat{1} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ د محیطي زاویې پراخوالی

$\hat{2} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ د محیطي زاویې پراخوالی

$$\Rightarrow \hat{3} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$$

$$B\hat{V}D = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$$

لومړی مثال: په لاندې شکلونو کې، د $\hat{AVC}$ زاویو پراخوالی پیدا کړئ.



حل:په دایره کې د ننني، باندنیو او مماسي زاویو له پراخوالي څخه په ګټې اخستلو سره لیکلای شو، چې:

$$a)\ \hat{AVC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AV}=\frac{1}{2}\cdot(150)^{\circ}\qquad \hat{AVC}=75^{\circ}$$

$$b)\ \hat{AVC}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})=\frac{1}{2}\cdot(80+40)^{\circ}\qquad \hat{AVC}=60^{\circ}$$

$$c)\ \hat{AVC}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})=\frac{1}{2}\cdot(80-20)^{\circ}\qquad \hat{AVC}=30^{\circ}$$

دویم مثال: د لاندې شکل څخه په ګټې اخستو سره، د x او قیمتونه پیدا کړئ.

$$\hat{ANB}=\frac{x+y}{2}\Rightarrow 70=\frac{x+y}{2}\Rightarrow x+y=140......I$$

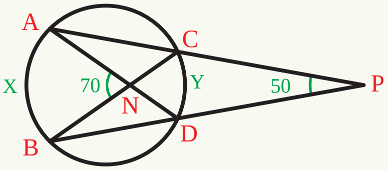
$$\hat{APB}=\frac{x-y}{2}\Rightarrow 50=\frac{x-y}{2}\Rightarrow x-y=100......II$$

که چیرې د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کړو لرو چې:

$$2x=240$$

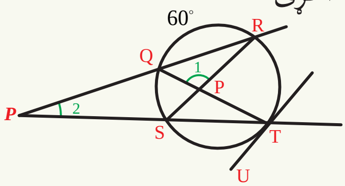
$$x=120^{o}$$

$$y=20^{o}$$



پوښتنې

په لاندې شکلونو کې، نا معلوم کمیتونه پیدا کړئ.

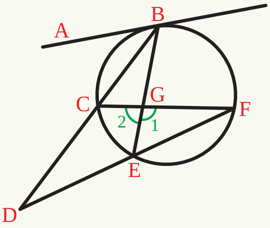


$\overset{\frown}{QR}=60^{\circ}$

$\overset{\frown}{RT}=150^{o}$

$\overset{\frown}{QS}=50^{o}$

$\hat{STU}=?\ ,\ \hat{1}=?\ ,\ \hat{2}=?$



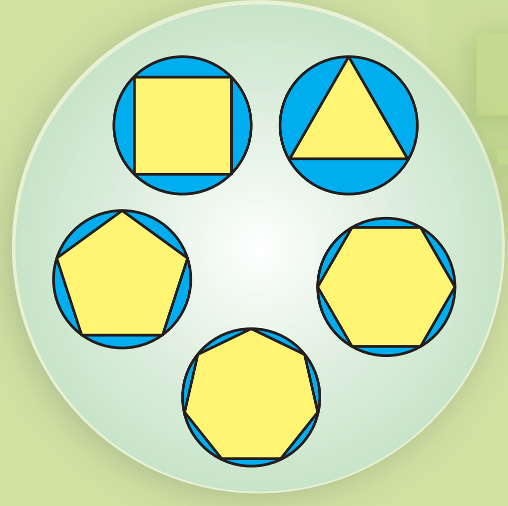
$\overset{\frown}{BC}=70^{\circ}$

$\overset{\frown}{BF}=100^{o}$

$\overset{\frown}{EF}=130^{o}$

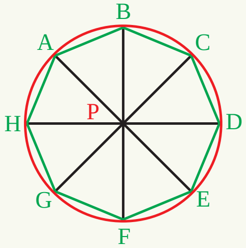
$\hat{1}=?\ ,\ \hat{2}=?\ ,\ \hat{D}=?\ ,\ \hat{ABC}=?$

محیطي دایره



مخامخ شکل ته پاملرنه وکړئ، کوم هندسي شکلونه وینئ نومونه يې واخلئ.

تعریف



هغه دایره، چې د مضلع له راسونو څخه تېره شوې وي محیطي دایره بلل کېږي او مضلع مرسوم په دایره کې بلل کېږي، لکه په مخامخ شکل کې:

د مثلث محیطي دایره: هغه دایره، چې د مثلث له دريو راسونو څخه تېره شوې وي، د مثلث د محیطي دایرې په نامه یادېږي.

فعالیت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ د اضلاعگانو عمودي ناصفونه رسم کړئ؟
- پورتني عمودي ناصفونه په څو ټکو کې پرې کوي؟ د هغې د تقاطع ټکی په O سره وښیئ؟
- د $\overline{OA}, \overline{OB}$ او $\overline{OC}$ اوږدوالی سره پرتله کړئ.
- که چیرې یوه دایره د O په مرکز او د $\overline{OA}$ په شعاع رسم شي ایا د B او C له ټکو تیرېږي او که نه؟
- ایا دا دایره د B او C له ټکو څخه هم تیرېږي؟ ولې؟
- رسم شوې دایره، د مثلث د څه په نامه یادېږي؟

په یاد ولرئ چې: هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تیرېږي، مضلع ته مرسوم په دایره وايي.

ددې فعالیت له پایلې څخه، په لاندې ډول لیکلای شو:

پایله:د اضلاعګانو د وسطي عمودونو د پرېکړې ټکی، د مثلث د محیطي دایرې مرکز دی.

مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ قایم الزاویه مثلث داسې رسم کړئ چې د قایمو څنډو اوږدوالی، په ترتیب سره $8cm$ او $6cm$ وي، د دې مثلث د محیطي دایرې شعاع(وړانګه) لاس ته راوړئ؟

حل: پوهېږو، چې په هر قایم الزاویه مثلث کې، د هغې د محیطي دایرې مرکز پر وتر باندې پروت وي، نو لومړی د قایم الزاویه مثلث د وتر اوږدوالی پیدا کوو، چې د نیمایي ټکي یې د محیطي دایرې مرکز دی.

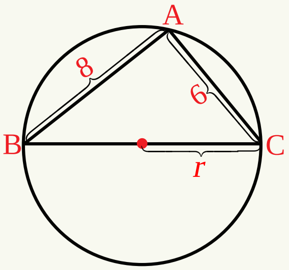
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\overline{BC}^2 = \sqrt{100}$$

$$\overline{BC} = 10cm$$

$$r = \frac{BC}{2} \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5cm$$



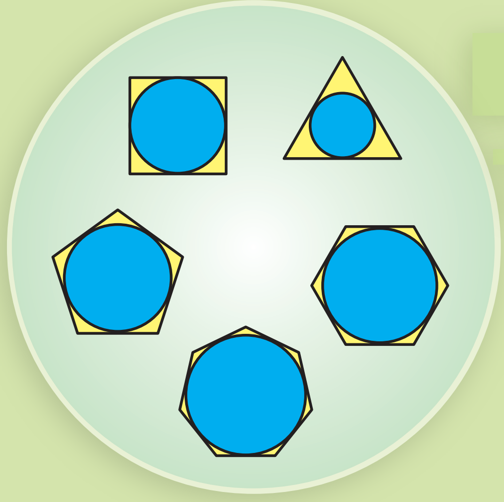
• هغه دایره، چې د مضلع له راسونو څخه تیرېږي، د مضلع محیطي دایرې په نامه یادېږي او مضلع ته مرسوم په دایره وایي.

• د یو مثلث داضلاعو د منځنی(وسطي) عمودونو د پریکړی ټکی، د مثلث د محیطي دایرې مرکز دی.

پوښتنې

1- یو مثلث، چې د اضلاعو اوږدوالی یې، په ترتیب سره $3cm$, $4cm$ او $5cm$ وي، رسم کړئ د هغې د محیطي دایرې شعاع یا وړانګه حساب کړئ.

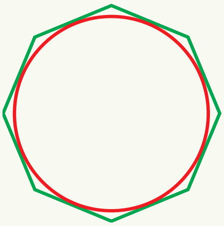
2 - د قایم الزاویه مثلث، متساوي الاضلاع او متساوي الساقین مثلثونو د محیطي دایرو مرکزونه په کومو ځایونو کې پراته دي په شکل کې یې وښیاست.



محاطي دايره

- هغه هندســي شکلونه، چې په مخامخ شکل کې يې وينئ، نومونه واخلئ.
- د شکلونو تر منځ څه اړيکي وينئ؟

تعريف



هغــه دايره، چې محيط يې د مضلع پــر ضلعو باندې مماس وي، د مضلع د محاطي دايرې په نامه يادېږي، لکه مخامخ شــکل، چې د مضلع په واسطه احاطه شوې دی.

د مثلــث محاطي دايره: هغه دايره، چې محيط يې د يو مثلث په درې ضلعو مماس وي، د مثلث محاطي دايره بلل کېږي.

فعاليت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ يو کيفي مثلث رسم کړئ.
- د $\hat{A}, \hat{B}$ او $\hat{C}$ زاويــو ناصفونه رســم او د پرېکړې ټکی په (O) سره وښياست.
- د (O) له ټکي څخه، د مثلث پر اضلاعو د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او $\overline{OP}$ عمود کرښې رسم کړئ؟
- د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او $\overline{OP}$ عمودونو اوږدوالي پرتله کړئ؟
- ايا هغه دايره، چې د(O) په مرکز او د $\overline{ON}$ په شعاع رسم شي، د M او P له ټکو څخه تيرېږي؟ ولې؟
- رسم شوې دايره، د څه په نامه يادېږي؟

> **مرسته:**
> د يــوه مثلــث وســطي عمودونه د مثلث دننه په يوه ټکي کې پرېکوي

د پورتني فعالیت پایله کولای شو، چې په لاندې توګه څرګنده کړو.

د هر مثلث د ننني ناصف الزاویو ترمنځ د پرېکړې ټکی، د مثلث د محاطي دایرې له مرکز څخه عبارت دی.

د مثلث محاطي دایره

فعالیت

د مثلث محاطي دایره رسم کړئ؟

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم کړئ او $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعو ته امتداد ورکړئ؟
- د مثلث د $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاویو باندنی ناصف الزاویې رسم او د پرېکړې ټکی په (O) سره وښیئ؟
- ایا د (O) ټکی، د مثلث د محاطي دایرې مرکز کېدلی شي؟ ولې؟
- د (O) له ثابت ټکي څخه د $\overline{OP}, \overline{OM}$ او $\overline{ON}$ عمودونه کرښې، د مثلث په یوه ضلعه او د هغه په امتداد رسم او وښیئ، چې د O دایرې شعاع ګاني دي.

فکر او څېړنه وکړئ:

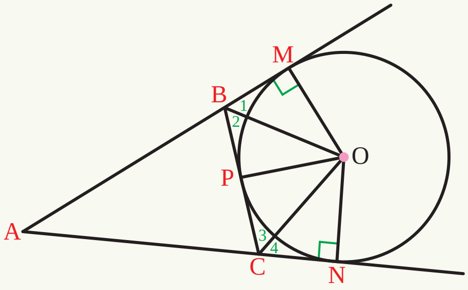
- که چیرې د یوې څلور ضلعي د مخامخ زاویو مجموعه 180° وي څلور ضلعي په دایره مرسوم دی.

په یاد ولرئ:

- هر منظمه مضلع محیطي او محاطي دایره لري.

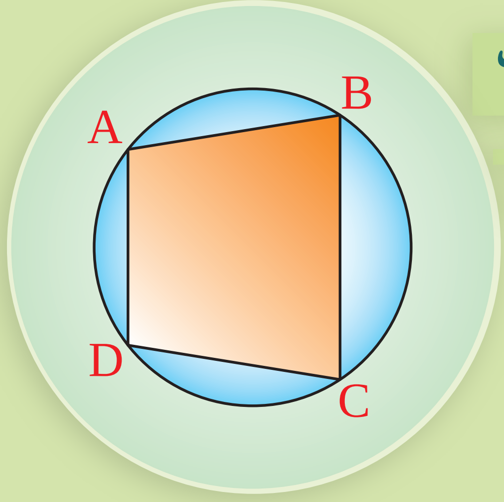
د پورتني فعالیت پایله کولای شو، په لاندې توګه څرګنده کړو.

هغه دایره چې د یوه مثلث په یوه ضلع او د دوو ضلعو پر امتداد مماس وي، د هغه مثلث محاطي دایره بلل کیږي.



پوښتنې

1– په کومو مثلثونو کې د محیطي دایرې او محاطي دایرې مرکزونه منطبق دي، رسم او په شکل کې یې وښیئ.



په دايره کې د مرسوم څلورضلعي ځانګړتياوې(خواص)

په مخامخ شکل کې، دايره د څلور ضلعي له راسونو سره څه اړيکه لري.

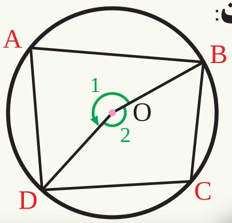
فعاليت

- د $ABCD$ يو کيفي څلور ضلعي مرسوم په دايره رسم کړئ؟
- د محيطي دايرې منځ ته راغلې زاويې څه نوميږي؟
- د دايرې مرکز، د څلور ضلعي د دوو مخامخ راسونو سره ونښلوئ، د منځ ته راغلې مرکزي زاويې مجموعه څو درجې ده؟
- د مرکزي او محيطي زاويو اړيکې چې د عين قوس مخامخ پرتې وي د پورته مرکزي زاويو لپاره وليکئ؟

د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه بيانولای شی:

قضيه: په يوه دايره کې، د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه 180° ده.

ثبوت:



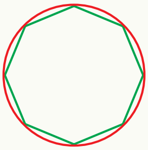
$$\hat{O}_1+\hat{O}_2=360^\circ$$

$$D\hat{C}B=\frac{1}{2}\hat{O}_1$$

$$D\hat{A}B=\frac{1}{2}\hat{O}_2$$

$$D\hat{C}B+D\hat{A}B=\frac{1}{2}(\hat{O}_1+\hat{O}_2)=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

فعاليت



- منظم درې ضلعي، د څه په نامه يادېږي، د هرې زاويې پراخوالی څو درجې دی؟
- منظم څلور ضلعي څرنګه ونوموو؟
- د هغې د هرې زاويې پراخوالی څو درجې دی؟

تعریف

هغه مضلع، چې اضلاع او زاويې يې يو له بل سره مساوي وي، منظمه مضلع بلل کېږي.

فعاليت

- په خپله خوښه، يوه پنځه ضلعي رسم کړئ.
- يو راس چې د هغې له ناګاونډه راس سره ونښلوئ، څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د دې مثلثونو دننيو زاويو مجموعه څو درجې ده؟
- د پنځه ضلعي دننيو زاويو مجموعې په هکله، څه فکر کوئ؟
- دغه فعاليت د يو شپږ ضلعي په هکله تکرار کړئ.
- که چيرې n ضلعي مضلع ولرو، د هغې دننی زاويو مجموعه به يې، څو درجې وي؟

که چيرې د يوې مضلع د ضلعو شمېر، په n او د هغې دننيو زاويو مجموعه په S_n وښيو نو د هر n ضلعي دننيو زاويو مجموعه $S_n = (n-2)180^\circ$ درجې ده.

مثال: د يوه څلور ضلعي او لس ضلعي دننيو زاويو مجموعه پيدا کړئ.

حل: د هر مضلع دننيو زاويو مجموعه، د $S_n = (n-2)180^\circ$ اريکې له مخې ټاکل کېږي.

$$S_n = (n-2)(180^\circ)$$

$$S_4 = (4-2)(180^\circ) \Rightarrow S_4 = 360^\circ$$

$$S_{10} = (10-2)(180^\circ) \Rightarrow 8\times 180 \Rightarrow S_{10} = 1440^\circ$$

په ياد ولرئ چې:

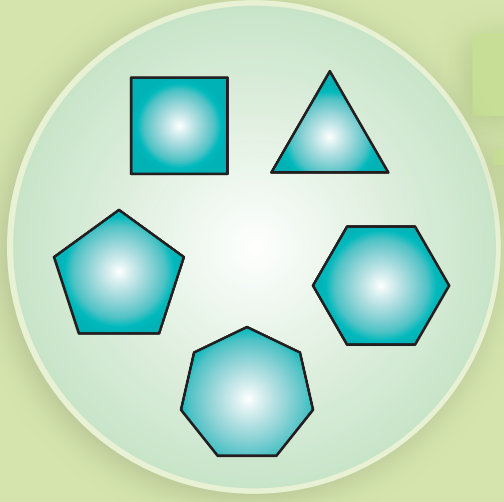
- د قطرونو شمېر د n ضلعي له يو راس څخه، د $n-3$ اړيکې په مرسته لاس ته راځي.
- له يوه راس څخه، د مضلع په منځ کې د مثلثونو شمېر، د $n-2$ اړيکې په مرسته لاسته راځي.
- په يوه دايره کې د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه 180° ده.
- هغه مضلع چې د ضلعو اوږدوالی يې سره مساوي وي، منظم مضلع بلل کېږي.

پوښتنې

1- د يوې منظمې شپږ ضلعي مضلع، د زاويو پراخوالی څو درجې دي؟

2- د يوې منظمې n ضلعي مضلع، د زاويو اندازه څو درجې ده؟

3- په يوه لس ضلعي مضلع کې، د قطرونو په مرسته له يوه راس څخه څو مثلثونه منځ ته راځي؟

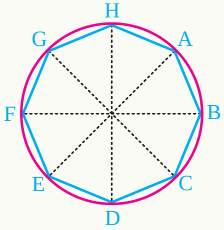


د منظمي مضلع ترسيم

- پاملرنه وکړئ.
- په شکل کې، څه ډول مضلع ګانې ګورئ.
- ستاسې په نظر، دغه مضلع ګانې په څه ډول رسم شوې دي؟

فعالیت

- د $C(O,r)$ دایره رسم کړئ، د هغې په مرکز کې (8) مساوي مرکزي زاویې رسم کړئ.
- که چیرې n د مضلع د اضلاعو شمېر او θ د مخامخ ضلعې مرکزي زاویه وي، ایا د $\hat{\theta} = \frac{360^o}{n}$ اړیکه سمه ده؟
- یو 8 ضلعي مضلع، د $C(O,r)$ په دایره کې رسم کړئ.
- د دایرې محیط سره د مرکزي زاویو د ضلعو د پرېکړې ټکي ونښلوئ.
- ایا د منځ ته راغلي مضلع ضلعې، سره مساوي دي؟ ولې؟
- منځ ته راغلي مضلع څه ډول ده؟ د مضلع د هرې ضلعې د مخامخ مرکزي زاویې پراخوالی څو درجې ده؟



د یو منظم n ضلعي مضلع، د هر ضلع مخامخ د مرکزي زاویې پراخلوالی مساوي په $\hat{\theta} = \frac{360^o}{n}$ دی.

فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې یوه منظمه شپږ ضلعي رابنده ده.
- د دایرې مرکز د مضلع له شپږو راسونو سره نښلوو، څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د شپږ ضلعي د مخامخ ضلعو د مرکزي زاویو پراخوالی څو درجې دی؟
- منځ ته راغلي مثلثونه څه ډول مثلثونه دي؟

د پورتني فعالیت پایله کولی شو، په لاندې توګه څرګنده کړو.

د یوې شپږ ضلعي، د هرې ضلعې اوږدوالی، د هغې د محیطي دایرې له شعاع سره مساوي دی.

مثال: هغه دایره، چې شعاع یې $2cm$ دی، خرنګه کولی شو چې هغه په یوه منظم شپږ ضلعي مضلع محاط کړو؟

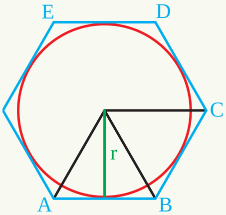
حل: پوهیږو، چې د هرې منظمې شپږ ضلعي مضلع هره ضلع، د هغې د محیطي دایرې له شعاع سره مساوي ده، نو د پرکار خوله د $2cm$ په اندازه خلاصوو او په پرله پسې توګه، د دایرې له محیط څخه مساوي قوسونه جلاکوو. د ټاکل شویو ټکو له نښلولو څخه منظم شپږ ضلعي منځ ته راځي؟

د محاطي دایرې د شعاع له مخې، د منظمې مضلع مساحت

فعالیت

- د $C(O,r)$ محاطي دایره او د $ABCDEF$ منظمه مضلع رسم کړئ؟
- د O ټکی د B,A او C راسونو سره ونښلوئ. د $\overset{\Delta}{OAB}$ او $\overset{\Delta}{OBC}$ مثلثونه، چې منځ ته راغلي دي، انطباق منونکي دي؟ ولې؟
- د $\overset{\Delta}{AOB}$ په مثلث کې، د $\overline{AB}$ د ضلعې جګوالی(ارتفاع)، د محاطي دایرې له شعاع سره مساوي دی. ولې؟
- د پورتنی مثلثونو مساحت له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- ایا د منظمې n ضلعي مضلع مساحت د n انطباق منونکو مثلثونو څخه جوړ دی؟
- د منظمې مضلع محیط د $P = AB \cdot n$ اړیکی یا رابطې څخه لاسته راځي. ولې؟

که چیرې د منظمې مضلع مساحت په A، محیط یې په P او د یوې منظمې n ضلعي مضلع د محاطي دایرې شعاع، په r سره وښیو، نو د مضلع مساحت عبارت دی له: $A = \frac{1}{2}P \cdot r$ چې په لاندې ډول ثبوتیږي:



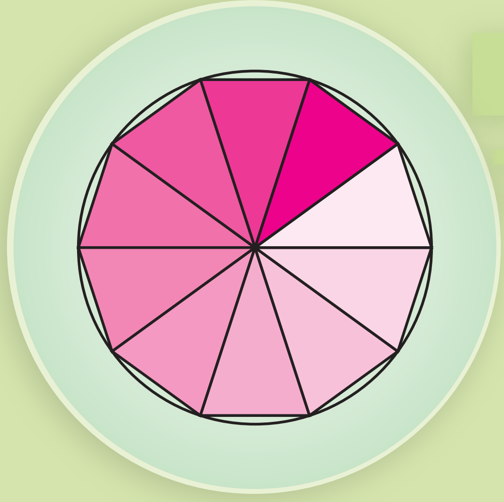
$$A = \frac{1}{2}AB \cdot r \cdot n$$

$$P = AB \cdot n \text{ د مضلع محیط } \Rightarrow A = \frac{1}{2}P \cdot r$$

پوښتنې

1- په یوه دایره کې، چې شعاع یې $3cm$ وي، یو متساوي الاضلاع مثلث داسې رسم کړئ، چې محاط په دایرې وي؟

د دايرې محيط او مساحت



په راکړل شوي شکل کې، د مثلثونو مجموعي مساحت د دايرې او د مثلثونو د يو شمېر ضلعو د مجموع اوږدوالی، د دايرې له محيط سره پرتله کړئ.

د $C(O,r)$ په دايره کې، که قطر په (d) او محيط يې د (C) په توروو ښودل شي، د دايرې د دې دوو غړو تر منځ لاندې اړيکه شته؟

$$\frac{\text{د دايرې محيط}}{\text{د دايرې قطر}} = \frac{c}{d} = \text{constant}$$

$$\frac{c}{d} = \pi \Rightarrow c = \pi d \; .... \; (I) \quad [\pi \approx 3.14159\cdots]$$

پوهېږو، چې $r = \frac{d}{2}$ يا $d = 2r$ که چېرې په(I) اړيکه کې د (d) پر ځای د (2r) قيمت وليکو، د دايرې محيط له لاندې اړيکې څخه لاسته راځي:

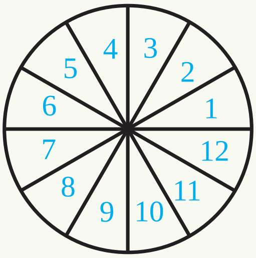
$$C = \pi d$$

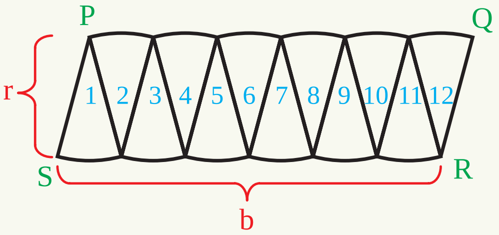
$$C = 2\pi r$$

د دايرې د مساحت د ثبوت او محاسبې لپاره، پرمختللې رياضي ته اړ يو، نو په دې ډول، د دايرې د مساحت د محاسبې لپاره، په لاندې توګه عمل کوو:

يوه دايره د هغې د قطرونو په مرسته په(12) مساوي برخو وېشو او هره برخه يې، د 1 څخه تر 12 پورې شمېرو سره ونښيو، که چېرې د دايرې دغه مثلثي ټوټې غوڅ او بيا هغوی څنګ په څنګ د لاندې شکل په څېر ترتيب کړو.

په روښانه ډول ليدل کېږي، چې متوازي الاضلاع ته ورته شکل منځ ته راځي.





پوهېږو، چې د b قاعده د دايرې د محيط نيمايي ده، ولې؟ نو:

جګوالی $\times$ قاعده $=$ د متوازي الاضلاع مساحت

$\frac{1}{2}Cr =$ د متوازي الاضلاع مساحت

له بلې خوا پوهېږو، چې $(C = 2\pi r =$ د دايرې محيط) دی، نو لرو چې:

$A = \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r = \pi r^2 =$ د متوازي الاضلاع مساحت

پوهېږو، چې د متوازي الاضلاع مساحت او دايرې سره ډېر نږدې دي، نو ليکلای شو: $A = \pi r^2$

په پايله کې ويلی شو، چې د دايرې مساحت، $A = \pi r^2$ د اړيکې او محيط يې $C = 2\pi r$ د اړيکې په مرسته په لاس راځي.

لومړی مثال: د يوې دايرې وړانګه(شعاع) $14cm$ ده، د دايرې مساحت پيدا کړئ.

حل: د دايرې د مساحت له اړيکې څخه په ګټې اخستو سره يعنې $A = \pi r^2$ لرو چې:

$$A = \pi r^2$$

$$A = (3.14159)$$

$$A = (3.14159)\cdot 196cm^2 \Rightarrow A = 615.75\ cm^2$$

دويم مثال: که چيرې د دايرې قطر $70cm$ وي، د دايرې شعاع او مساحت پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دايرې محيط راکړل شوی دی، نو اول شعاع، وروسته مساحت پيدا کوو.

$$r = \frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{70}{2} = 35$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14159(35)^2 \Rightarrow A = 3848.4\,cm^2$$

دريم مثال: که چيرې د دايرې محيط، $14\pi cm$ وي، د دايرې شعاع او مساحت پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې، د دايرې محيط راکړل شوی دی، نو د مساحت پيدا کولو لپاره، اول شعاع پيدا کوو.

$$C = 14\pi cm$$

$$2\pi r = 14\pi \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow (3.14159)\cdot 7\cdot 7 \Rightarrow A = 153.93\,cm^2$$

- د يوې دايرې مساحت، د r په شعاع د $A = \pi r^2$ له اړيکې څخه لاس ته راوړو.
- د يوې دايرې محيط، د r په شعاع د $C = 2\pi r$ له اړيکې څخه لاس ته راوړو.

پوښتني

1- که چيرې دايرې محيط $41cm$ وي، د دايرې شعاع يې لاس ته راوړئ.

2- د يوې دايرې محيط، چې شعاع يې د اوږدوالی يو واحد وي، لاس ته راوړئ.

3- د يوې دايرې مساحت، چې شعاع يې د اوږدوالي يو واحد وي لاس ته راوړئ.

په دايره کې د اوږدوالي اړيکې:

- هغه اړيکې، چې د يو هندسي شکل د کرښو د اجزاوو تر منځ موجودې وي، د اوږدوالي د اړيکو په نامه يادېږي.
- که چيرې د يوې دايرې له يوه بهرنی ټکي څخه، پر دايره دوه قاطع کرښې رسم شي، د يوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

يعنې: $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\ \overline{PD}$

- که چيرې ديوې دايرې له بهرني ټکي څخه، دوه قاطع کرښې، پر يوه دايره داسې رسم شي، چې دويم قاطع د دايرې له مرکز څخه تير شي، نو د قاطع او د هغه د بهرنۍ قطعې د ضرب حاصل، له يوې ټاکلې اندازې يعنې: $d^2 - r^2$ سره مساوي دی.
- له يوه باندني ټکي څخه، پر يوې دايرې دوه مساوي مماسونه رسمېدلای شي.
- که چيرې $d^2 - r^2 > 0$ يا $d^2 > r^2$ وي ټکی د دايرې په بهر کې پراته دی.
- که چيرې $d^2 = r^2 = 0$ يا $d^2 = r^2$ يا $d = r$ وي، ټکی د دايرې پر محيط پروت وي.
- که چيرې $d^2 - r^2 < 0$ يا $d^2 < r^2$ وي، ټکی د دايرې په دننه کې پروت دی.

د دايرې داخلي زاويې: هغه زاويې چې دقاطع کرښو په مرسته، د دايرې په دننه کې منځ ته راځي، د دايرې دننۍ زاويې بلل کېږي.

- د يوې دايرې د هرې دننۍ زاويې پراخوالی، د هغې د مخامخ قوسونو د مجموعې له نيمايي سره مساوي دی. $\hat{\alpha} = \dfrac{\overset{\frown}{a} + \overset{\frown}{b}}{2}$

باندنۍ(خارجي) زاويې:

- هغه زاويه چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو، يا يو قاطع او يو مماس له پرېکړې څخه د دايرې په بهر کې منځ ته راغلې وي، د دايرې باندنۍ زاويه بلل کېږي.

- د يوې دايرې د هرې باندنۍ زاويې پراخوالی، د هغې د مخامخ قوسونو، تفاضل له نيمايي سره مساوي دی، يعنې: $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{a} - \overset{\frown}{b}}{2}$

مضلع:

- هغه شکل، چې د څو ټوټه کرښو په مرسته احاطه شوی وي، مضلع بلل کېږي.

په دې شرط چې:

- دوه ضلعې یې یوازې په خپلو انجامونو کې سره پرېکړې.
- دوه ګاونډې ضلعې، د یوې مستقیمې کرښې په اوږدوالی پرتې نه وي.
- هغه مضلع چې ضلعې او زاویې یې سره مساوي وي، منظم مضلع بلل کېږي.

د مضلع محیطي دایره: هغه دایره، چې د مضلع له رأسونو څخه تیره شي، د مضلع محیطي دایره بلل کېږي.

د مضلع محاطي دایره: هغه دایره، چې د مضلع پر ضلعو مماس وي، د مضلع محاطي دایره بلل کېږي.

د مثلث محاطي دایره: هغه دایره، چې د مثلث پر یوه ضلعه او د دوو نورو ضلعو په امتداد مماس وي، د مثلث محاطي دایره بلل کېږي.

- د دوو متقاطع دایرو د مرکزونو ترمنځ کرښه په ګډه وتر عمود ده.
- که چیرې یوه څلور ضلعې مرسوم په دایره وي، د هغې د مخامخ زاویو مجموعه 180° دی.
- د دایرې محیط، د مخامخ اړیکې په مرسته لاس ته راځي: $C = 2\pi r$
- د دایرې مساحت، د مخامخ اړیکې په مرسته لاسته راځي: $A = \pi r^2$

د دويم څپرکي پوښتنې:

- په لاندې پوښتنو کې، د هرې پوښتنې لپاره، څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه دايره تاو کړئ.

1- که چيرې د P ټکی، د دايرې پر محيط پروت وي، د يوه ټکي طاقت نظر دايرې ته عبارت دی له:

a) 1   b) 2

c) 0   d) درې واړه ځوابونه سم دي.

2- که چيرې د P يو ټکی د دايرې په دننه کې پروت وي، د دې نقطې طاقت، نظر يوې دايرې ته عبارت دی، له:

a) د P دټکي طاقت مثبت دی.   b) د P ټکي طاقت منفي دی.

c) د P ټکي طاقت صفر دی.   d) درې واړه ځوابونه سم نه دي.

3-که دP ټکی له دايرې څخه د باندې پروت وي، دP ټکي طاقت نظريوې دايرې ته، عبارت دی، له:

a) $d-r$ b) d^2-R^2

c) $r-d$ d) R^2-d^2

4– که چيرې د يوې دايرې شعاع R او د دايرې دننی ټکي او مرکز واټن، په d سره وښيو، د نوموړي ټکي طاقت نظر دايرې ته، عبارت دی، له:

a) $R^2=d^2$ b) $d^2=R^2$

c) دواړه ځوابونه سم دي.   d) دواړه ځوابونه نا سم دي.

5– يو ټکی د $13cm$ په اندازه د $C(O,r)$ دايرې له مرکز څخه واټن لري، که د دايرې قطر $10cm$ وي، د قاطع د بهرنی برخې اوږدوالی له نوموړي ټکي په لاندې ځوابونو کې وښيئ:

a) 13 cm   b) 10 cm

c) 12 cm   d) 8 cm

6–که چيرې د P له ټکي څخه، د يو مماس اوږدوالی، د $C(O,r)$ په دايرې $12cm$ او قطر يې $10cm$ وي، د P او O د ټکو تر منځ واټن عبارت دی، له:

a) 13 cm   b) 12 cm

c) 10 cm   d) 5 cm

7– که چيرې د $C(O,r)$ د دايرې د $\overline{AB}$ وتر ته، تر P ټکي پورې امتداد ورکړو، داسې چې: $\overline{AP}=8cm$ او $\overline{BP}=2cm$ وي، د $\overline{PT}$ د مماس اوږدوالی عبارت دی، له:

a) 4 cm   b) 8 cm

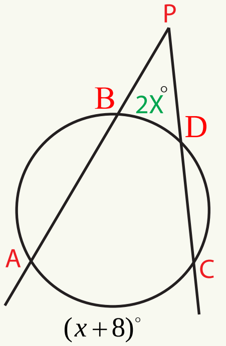
c) 2 cm   d) درې واړه ځوابونه نا سم دي.

● په لاندې پوښتنو کې تش ځایونه په وړ کلمو ډک کړئ:
1- d^2-r^2 د یوه ټکي .... نظر یوې دایرې ته دی.
2- که چیرې $\overline{PT}$ ، د $C(O,r)$ پر دایره مماس وي، د P د ټکي طاقت نظر $C(O,r)$ دایرې ته، عبارت دی له .... $\overline{PT}^2$ دی.
3- که چیرې د P ټکي د دایرې پر محیط پروت وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.
4- که ټکی د دایرې په دننه کې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.
5- که ټکی د دایرې څخه د باندې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.
6- که $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ وي، د C,B,A او D د .... پر محیط پرتې وي او د P ټکی د .... په دننه او یا بهر پروت دی.
7- که د B,A او T ټکي د دایرې پر محیط پراته وي، B,A او P د یوې کرښې په امتداد دی او د P ټکی د دایرې په بهر کې دی. په دې توګه $\overline{PT}^2$ =................... دی.

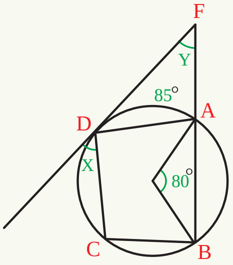
● د سمو جملو په مخامخ کې د(س) او د ناسمو جملو مخامخ کې د(ن) توری ولیکئ.
1- (   ) د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته، د ټکې او د دایرې مرکز واټن له مربع سره مساوي دی.
2- (   ) که ټکی د دایرې پر محیط پروت وي، د ټکي طاقت نظر دایرې ته صفر دی.
3- (   ) که ټکی د دایرې په دننه کې وي، د ټکي طاقت نظر دایرې ته منفي دی.
4- (   ) که ټکی د د دایرې په بهر کې وي، دټکي طاقت نظر دایرې ته مثبت دی.
5- (   ) د یوه ټکي طاقت، نظر هرې دایرې ته مثبت دی.
6- (   ) د یوه ټکي طاقت، نظر دایرې ته d^2-r^2 دی که د d د ټکي واټن دایرې ته او r د دایرې وړانګه وي.
7- (   ) که دوه دایرې مماس وي، د هغوی طاقت نظر ګډ مماس ته په هر ټکي کې مساوي وي.

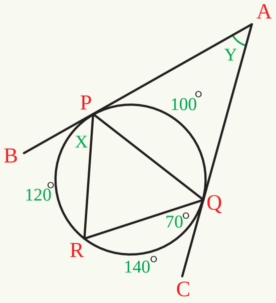
• لاندې پوښتنې په تفصیل سره حل کړئ:

1 - په لاندې شکل کې $\hat{P}=(x+11)^\circ$ او مخامخ قوسونه يې، په ترتيب سره $(2x)^0$ او $(x+8)^0$ وي د $A\hat{P}C$ د زاويې پراخوالی پيدا کړئ.

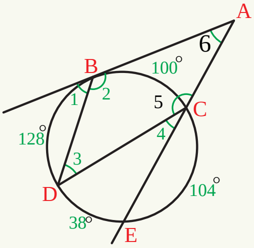


2 - د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ د زاويو پراخوالی، په لاندې شکلونو کې پيدا کړئ.

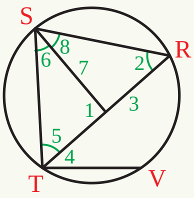




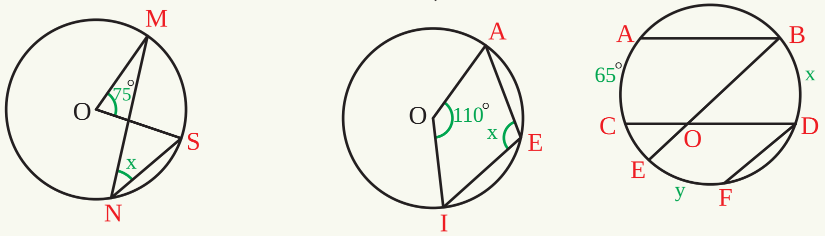
3– په لاندې شــکل کې $\overline{AB}$ پر دايره مماس دی، که $\overset{\frown}{DB}=128^0$ او $\overset{\frown}{CE}=104^0$ وي، د $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}$ او $\hat{6}$ زاويو پراخوالی پيدا کړئ.



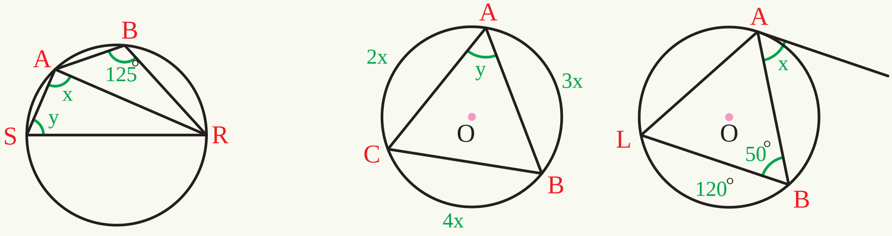
4– د $C(O,r)$ پــه دایــره کــې، $RS \,//\, TV$ ، $\hat{RTS} = 70^\circ$ او RT د دایــرې قطر دی، د $\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6},\hat{7}$ او $\hat{8}$ زاویو اندازه پیدا کړئ.



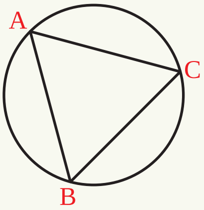
5– د $\hat{x},\hat{y}$ زاویو اندازه، په لاندې شکلونو کې وټاکئ.



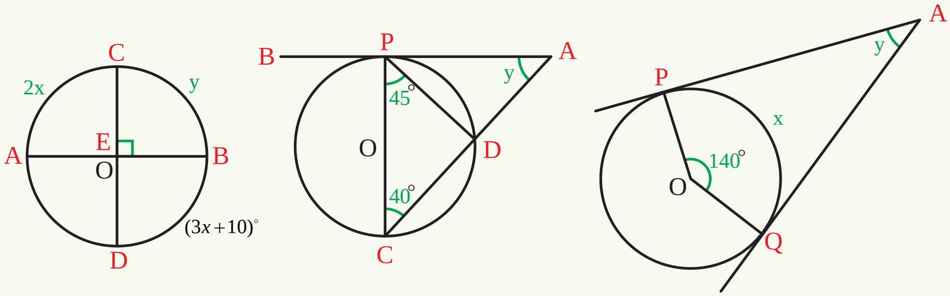
6– د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ زاویو اندازه، په لاندې شکلونو کې پیدا کړئ.



7– د محاطي دایرې د تعریف له مخې وښیئ، چې د هر مثلث دننني زاویو مجموعه 180° وي.



8– په لاندې شکلونو کې، د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ زاویو اندازه پیدا کړئ.



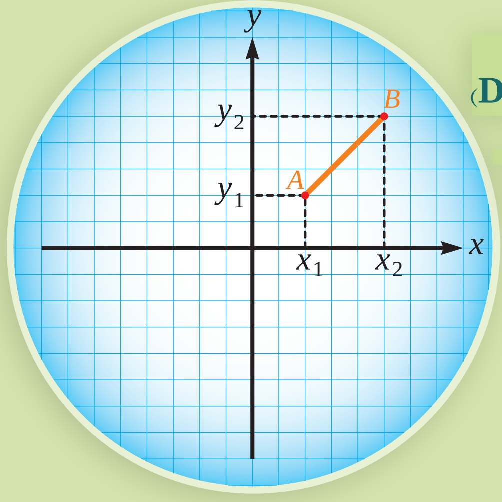
دريم څپـــركى

تحليلي هندسه

تحليلي هندسه

(Analytic Geometry)

د الجبر ا و هندسې تر منځ اړيکې، له تحليلي هندسې څخه عبارت دی، چې د الجبري معادلو او هندسې شکلونو په مرسته تر بحث لاندې نيول کېږي، فرانسوي رياضي پوه ديکارت، د لومړي ځل لپاره، د ټاکلو هندسي اشکالو او الجبري معادلو ترمنځ، اړيکه و څېړله، ويې ويل: چې ځينې الجبري معادلې، يو ټاکلی هندسي شکل لري. څرنګه چې، د هندسې د علم بنسټ ټکی او دالجبري معادلو بنسټ عدد جوړوې، نو لدې کبله، لومړی د ټکي او عدد ترمنځ اړيکي تر څېړنې لاندې نيسو، ديکارت د عدد او ټکي ترمنځ د اړيکو د څېړنې لپاره، د قايم مختصاتو د محورونو داسې يو سيستم راوپيژاند چې تراوسه د ديکارت په نامه يادېږي.



د دوو ټکو ترمنځ واټن

(**Distance between twoPoint**)

د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوه ټکي د وضعيه کمياتو په سيستم کې، د AB يوه قطعه خط ټاکي. ستاسې په اند، څرنګه کولای شوچې، د A او B ټکو ترمنځ واټن(فاصله) حساب کړو.

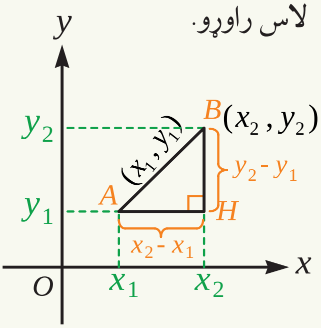
فعاليت

- د A(3,5) او B(5,4) ټکي، د وضعيه کمياتو په سيستم کې وښياست؟
- د AB کرښه رسم کړئ؟
- د A او B ټکو ترمنځ واټن(فاصله) حساب کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه کولای شو، په عمومي ډول، د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوو ټکو ترمنځ واټن په لاندې ډول په لاس راوړو.

په لاندې شکل کې $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث يوقايم الزاويه مثلث دی. ولې؟

د فيثاغورث د قضيې په مرسته کولای شو، د A او B ټکو ترمنځ واټن په لاندې ډول په لاس راوړو.



د فيثاغورث د قضيې .... $\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AH} = x_2 - x_1 \\ \overline{BH} = y_2 - y_1\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

لومړی مثال: د $A(1,7)$ او $B(5,4)$ ټکو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

حل: د دوو ټکو د فاصلې له فورمول څخه په ګټې اخستنې سره لیکلای شو، چې:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$\overline{AB} = 5\ unit$$

دویم مثال: د $A(3,4)$ ټکي واټن له مبدأ څخه حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې د مبدا مختصات $O(0,0)$ دي، نو د دوو ټکو ترمنځ د واټن د فورمول $\overline{0A} = \sqrt{x^2 + y^2}$ څخه په لاس راځي:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \Rightarrow \overline{OA} = 5$$

د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ واټن عبارت دی، له: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

د $P(x, y)$ یو اختیاري ټکی واټن، د قایمو کمیاتو له مبدا څخه عبارت دی، له:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

پوښتنې

1- د $A(0,3)$ او $B(2,0)$ ټکو ترمنځ واټن پیداکړئ؟

2- که $A(4,6)$ ، $B(-2,4)$ او $C(-8,2)$ د یوه مثلث دراسونو مختصات وي، د مثلث ډول وټاکئ؟

3- د K عددي قیمت داسې وټاکئ، هغه توپه کړښه، چې له $A(2,3)$ او $B(5K,6)$ ټکو څخه تېرېږي، اوږدوالی یې د $\overline{AB}$ پنځه برابره شي.

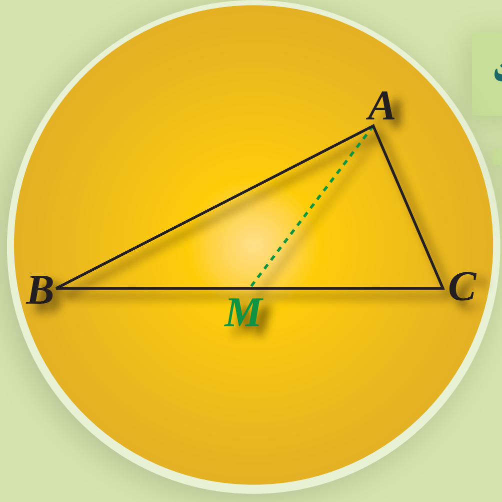
4- د $P(1,\sqrt{3})$ او $Q(-1,1+\sqrt{3})$ ترمنځ واټن پیداکړئ.

5- که $A(-1,4)$، $B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یوه مثلث د راسونومختصات وي، د مثلث محیط حساب کړئ.

6- د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې راسونه یې، د $A(2,0)$ ، $B(6,2)$ او $C(1,2)$ په ټکوپراته وي؟

7- که $A(10,5)$ ، $B(3,2)$ او $C(6,-5)$ د یوه مثلث د څوکو(راسونه) مختصات وي، د مثلث ډول وټاکئ.

د يوه قطعه خط د منځني ټکي مختصات



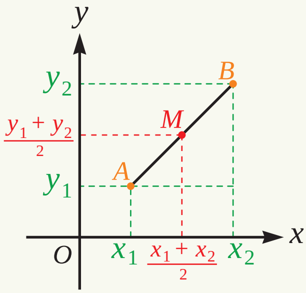
د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې د $\overline{AM}$ قطعه خط د مثلث میانــه ده، د میانــې ځانګړتیا بیان کړئ.

فعالیت

- د $D(2,0)$ او $E(6,0)$ ټکي، دوضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ؟
- که چیرې د C ټکی، د $\overline{DE}$ قطعه خط منځنی ټکی وي، د هغې مختصات ولیکئ؟
- د C ټکي مختصات د D او E ټکو له مختصاتوسره څه اړیکه لري؟
- د $P(0,1)$ او $Q(0,4)$ ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- که چیرې د R ټکی، د $\overline{PQ}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی وي، د هغې مختصات په لاس راوړئ.
- د R ټکي مختصات، د P او Q ټکو له مختصاتوسره څه اړیکه لري؟

د پورتنی فعالیت پایله کولای شــوچه په بشپړډول داسې بیان کړو: که $A(x_1,0)$ او $B(x_2,0)$ دوه ټکــو د x پــه محورو پراته وي نو د M ټکي مختصات، چې د $\overline{AB}$ ټوټه کرښــې منځنی ټکی دی داسې په لاس راځي : $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$

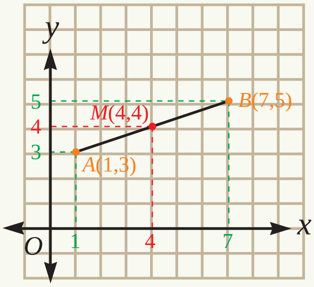
که $P(0,y_1)$ او $Q(0,y_2)$ دوه ټکي، د y په محور پراته وي، د M د ټکي مختصات، چې د $\overline{PQ}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی دی داسې په لاس راوړو: $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$



په بشپړډول $A(x_1,y_1)$ ، $B(x_2,y_2)$ دوضعیه کمیاتو په سیستم کې دوه ټکي، او M د $\overline{AB}$ کرښې منځنی ټکی وي، نو د M ټکي مختصات داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

لومړی مثال: که چیرې $A(1,3)$ او $B(7,5)$ د $\overline{AB}$ ټوټه کرښې د پیل اوپای مختصات وي، د ټوټه کرښې د منځنی ټکي مختصات په لاس راوړئ؟

حل: دیوې ټوټه کرښې د منځنی ټکي له مختصاتوڅخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو، چې:



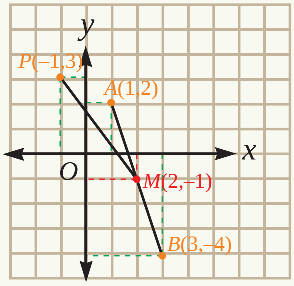
$$M(\frac{x_1+x_2}{2} \ , \ \frac{y_1+y_2}{2})$$

$$M(\frac{1+7}{2} \ , \ \frac{3+5}{2})$$

$$M(4,4)$$

دویم مثال: د $P(-1,3)$ ټکي واټن، د هغې مستقیمې کرښې له منځنی ټکي څخه پیداکړئ چې د $A(1,2)$ او $B(3,-4)$ ټکو څخه تیرشي.

حل: د AB د مستقیمې کرښې، له منځني ټکي څخه د P ټکي د واټن د پیدا کولو لپاره لومړی د AB منځني ټکي مختصات، په لاس راوړو، نولیکلای شو، چې:



$$M_{\overline{AB}} = (\frac{x_1+x_2}{2} \ , \ \frac{y_1+y_2}{2})$$

$$= (\frac{1+3}{2}, \frac{2-4}{2}) = (2,-1) \Rightarrow M_{\overline{AB}} = (2,-1)$$

$$\overline{PM} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}$$

$$\overline{PM} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$\overline{PM} = 5 \text{ unit}$$

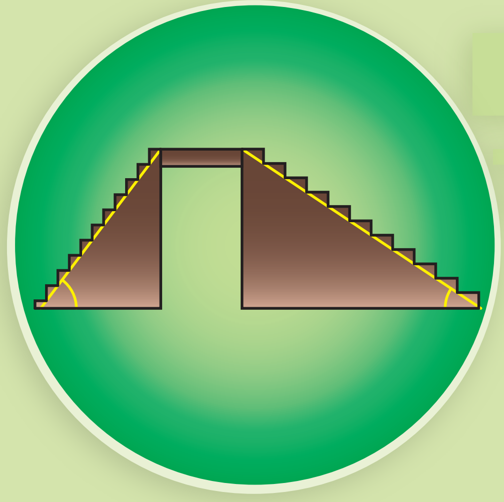
پوښتنې

1- د یوه مثلث درې راسونه $A(5,-2)$, $B(3,-1)$ او $C(1,5)$ راکړل شوي دي، د $\overline{AM}$ د میانې اوږدوالی پیداکړئ.

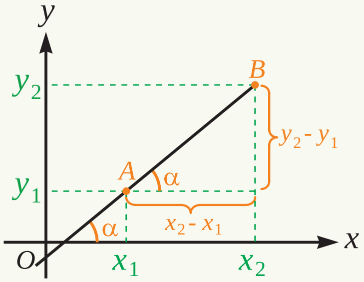
2 - که چیرې $A(2,4)$, $B(5,9)$, $C(14,9)$ او $D(11,4)$ ټکي د یوه متوازي الاضلاع راسونه وي، د متوازي الاضلاع د قطرونو د پریکړې د ټکو مختصات پیداکړئ.

3 - که چیرې $A(-1,4)$, $B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یوه مثلث راسونه وي، د هغه د میانې یا منځنی کرښې اوږدوالی پیداکړئ، چې د BC په ضلع رسمیږي.

د مستقیمې کرښې میل



شکل ته وګورئ، په کومه زینه، په اسانۍ سره ختلی شئ، ولې؟ دلیل یې بیان کړئ؟



که $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2 y_2)$ د $\overline{AB}$ مستقیمې کرښې دوه اختیاري ټکي وي، د $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت ته د مستقیمې کرښې میل وایي او په لاندې ډول یې لیکي: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې میل پیداکړئ، چې د $A(3,5)$ او $B(4,6)$ ټکو څخه تېرشي.

حل: پوهېږو، چې د مستقیمې کرښې میل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ اړیکې څخه لاسته راځي، نولرو چې:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-5}{4-3} = 1$$

دویم مثال: هغه مستقیم، چې د $A(2,5)$ او $B(4,k)$ ټکو څخه تېرېږي، د k قیمت په هغه کې داسې وټاکئ، چې د مستقیمې کرښې میل ۳ وي.

حل: د k قیمت د لاسته راوړلو لپاره ددې رابطې $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ څخه په لاندې ډول ګټه اخلو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$3 = \frac{k-5}{4-2}$$

$$k - 5 = 6 \quad \Rightarrow k = 11$$

دریم مثال: د هغې مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ، چې د $P(2,3)$ ټکي او د وضعیه کمیاتو له مبدآ څخه تېرشي.

حل: څرنګه چې، مستقیه کرښه د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي، نود مبدا مختصات $O(0,0)$ دی او میل یې په لاندې ډول په لاس راورو:

$$m_{\overline{PO}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{PO}} = 1.5$$

فعالیت

- د $A(2,3)$ او $B(4,6)$ ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښیئ؟
- هغه مستقیم، چې د A او B ټکوڅخه تېرېږي، رسم کړئ او په Δ_1 سره یې وښیئ؟
- د Δ_1 مستقیم میل په لاس راوړئ؟
- د Δ_1 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي.
- د $M(1,5)$ او $N(4,2)$ ټکي په همغه وضیعه کمیاتوکې په بل رنګ وټاکئ؟
- هغه مستقیم، چې د M او N ټکوڅخه تیرېږي هغه ته Δ_2 ووایئ.
- د Δ_2 مستقیم میل په لاس راوړئ؟
- د Δ_2 مستقیم د x محور د مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- د تشکیل شویو زاویو او کرښوترمنځ، څه ډول اړیکه شته؟

له پورتني فعالیت څخه، لاندې پایلې په لاس راځي.

د هرې مستقیمې کرښې میل، په هغه زاویه پورې اړه لري، چې مستقیمه کرښه یې، د x د محور له مثبت لورې سره جوړوي.

که یوه مستقیمه کرښه، د x محور له مثبت جهت سره حاده زاویه جوړه کړي، میل یې یومثبت عدد دی.

که یوه مستقیمه کرښه، د x محور له مثبت جهت سره، منفرجه زاویه جوړه کړي، میل یې یو منفي عدد دی.

پوښتنې

1 - د هغې مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ چې د $A(1,1)$ او $B(-1,-1)$ ټکوڅخه تېرشي.

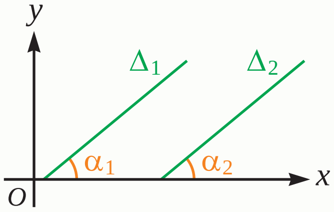
2 - هغه مستقیم، چې د $A(-2,2\sqrt{3})$ او $B(1,a)$ ټکوڅخه تېرېږي، د a عددي قیمت داسې و ټاکئ، چې د مستقیم میل $\sqrt{3}$ وي.

3 - که چیرې $B(3,-1), A(5,-2)$ او $C(1,5)$ ټکي، د یوه مثلث راسونه وي، د نوموړي مثلث د $\overline{BC}$ ضلعې د میانې میل پیدا کړئ.

د موازي کرښو میل

په ورکړل شوي شکل کې، زینه په پام کې ونیسئ، د هغې د بازوګانو تر منځ څه ډول اړیکه شتون لري؟

فعالیت



- د راکـړل شـویو وضیعه کمیاتو په سیسـتم کې د Δ_1 او Δ_2 موازی کرښې له یوې بلې سره داسې رسم کړئ، چې د x محور له مثبت جهت سره حاده زاویې جوړې کړي.
- د Δ_1 او Δ_2 کرښـو میلونه حساب او له یو بل سره یې پرتله کړئ، کرښې له یوه له بلې سره څه اړیکې لري؟
- که چیرې د Δ_1 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره د α_1 زاویه د Δ_2 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره د α_2 زاویه جوړه کړې نو α_1 او α_2 یو له بل سره څه اړیکه لري.

په عمومي ډول، د پورتني فعالیت پایله، په لاندې ډول بیانوو:
موازي کرښې، د مساوي میلونو لرونکې دي.
که چیرې دوه مستقیمه کرښې مساوي میلونه ولري، په پایله کې هغه زاویې، چې د x محور له مثبت جهت سره یې جوړوي، یو له بل سره مساوي دي.

مثال: که چیرې د Δ_1 مستقیم، د $A(2,5)$ او $B(-6,-11)$ ټکو او د Δ_2 مستقیم، د $C(-4,-6)$ او $D(3,8)$ ټکو څخه تیرشي، د Δ_1 او Δ_2 کرښې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

$$\left.\begin{array}{l} m_{\overline{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\Delta_1} = \dfrac{-11-(5)}{-6-2} = \dfrac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\Delta_2} = \dfrac{8+6}{3+4} = \dfrac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

خرنگه چې، د Δ_1 او Δ_2 میلونه سره مساوي دي، نو نوموړي کرښې یوه له بلې سره موازي دي.

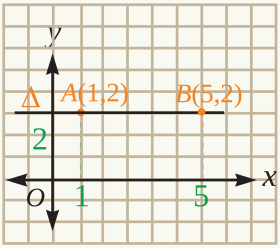
فعالیت

- د $A(1,2)$ او $B(5,2)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه، چې له A او B ټکوڅخه تېرېږي، رسم کړئ او په Δ یې ونوموئ.
- د Δ مستقیم د x محور له مثبت جهت سره، څه ډول زاویه جوړوي.
- د Δ مستقیم میل حساب کړئ.

د پورتني فعالیت پایله، په لاندې ډول بیانوو:

که چیرې A او B دوه اختیاري ټکي او مساوي ترتیبونه ولري، لکه: $B(x_2,a), A(x_1,a)$

هغه کرښې، چې د A او B ټکوڅخه تېرېږي، د x له محورسره موازي دي. اومیل یې، له صفرسره مساوي دی. یعنې: $m = \dfrac{a-a}{x_2 - x_1} = 0$



فعالیت

- د $M(3,2)$ او $N(3,5)$ ټکي، د وضیعه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ؟
- هغه مستقیمه کرښه، چې له M او N ټکوڅخه تیرېږي، رسم کړئ او په Δ یې ونوموئ؟
- د Δ مستقیمه کرښه، د x له محور سره څه ډول زاویه جوړ وي، د Δ مستقیمې کرښې د میل په اړه څه ویلای شئ؟

له پورتني فعالیت څخه، دې پایلې ته رسیږو، هغه مستقیمه کرښه، چې د x له محورسره قایمه زاویه جوړه کړي، نشو کولای، د هغې میل حساب کړو، په دې حالت کې ویل کېږي، چې د Δ مستقیم خط ټاکلی میل نه لري.

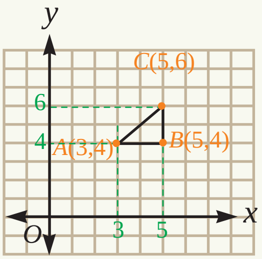
مثال: که چیرې د $A(3,4)$ ، $B(5,4)$ او $C(5,6)$ ټکي، د یوه مثلث راسونه وي، د مثلث ډول وټاکئ اوهغه د وضیعه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ؟

حل: څرنګه چې، د AB مستقیمه کرښه، د x له محور سره موازي ده، نو میل یې صفر دی.

$$m_{\overline{AB}}=\frac{4-4}{5-3}=\frac{0}{2}=0$$

په همدې ډول، د BC مستقیمه کرښه، د y له محور سره موازي ده، نومیل یې نامعین دی (نه دی تعریف شوی).

$$m_{\overline{BC}}=\frac{6-4}{5-5}=\frac{2}{0}=\infty$$



$$\overline{AB}^2=(5-3)^2+(4-4)^2=4$$
$$\overline{BC}^2=(5-5)^2+(6-4)^2=4$$
$$\overline{AC}^2=(5-3)^2+(6-4)^2=8$$

په پایله کې:

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$$

څرنګه چې، د فیثاغورث قضیه پکې تطبیق کېږي، نو د $\overline{AB}$ مستقیمه کرښه، د $\overline{AC}$ په مستقیمې کرښې عمود ده، نود $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قایمه الزاویه دی.

هغه مستقيمه کرښه، چې د x له محور سره موازي او يا د y په محور عمود وي، ميل يې صفردی.

هغه مستقيمه کرښه، چې د x په محور عمود يا د y له محور سره موازي وي، ميل يې نه دی تعريف شوی.(معين عدد نه دی)

پوښتني

1- که د $A(3,0)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-3,0)$ او $D(0,-5)$ د يوې څلورضلعي راسونه وي:

الف: د څلورضلعي مخامخ ضلعې يوه له بلې سره څه اړيکې لري؟

ب: د قطرونو ميلونه پيدا کړئ؟

۲- $A(3,4)$, $B(-3,4)$, $C(3,-4)$ او $D(-3,-4)$ ټکی په پام کې ونيسئ.

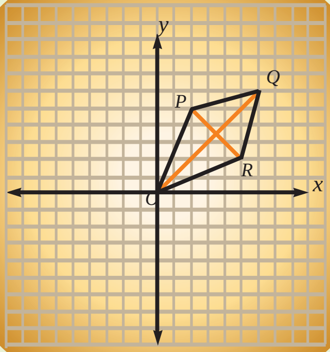
الف: هغه مستقيمه کرښه، چې د A او B له ټکو څخه تېرېږي، له هغې کرښې سره چې د C او D ټکوڅخه تېرېږي، څه اړيکې لري؟

ب: هغه مستقيمه کرښه، چې د A او B ټکو اوهغه کرښه، چې د C او D ټکو څخه تيرېږي څه اړيکه لري؟

ج: د $ABCD$ څلورضلعي، څه ډول څلور ضلعي ده؟

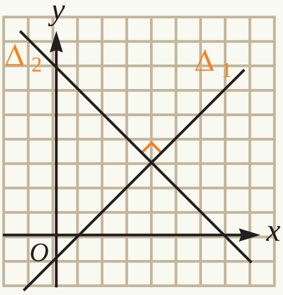
د: د قطرونو ميل يې پيدا کړئ.

د یو پر بل عمود مستقیمو کرښو میل



OPQR خلورضلعي یولوزي دی. کولای شئ، د لوزی خانګړتیا، د هغې د راسونو د مختصاتو په مرسته بیان کړئ.

تعریف



د Δ_1 او Δ_2 دوه مستقیمې کرښې، چې میلونه یې m_1 او m_2 دي، هغه وخت یو پربل عمود دي، چې لاندې رابطه د هغوی ترمنځ موجوده وي. $m_1 \cdot m_2 = -1$

لومړی مثال: هغه مستقیمه کرښه، چې د $A(7,5)$ او $B(1,1)$ او هغه چې، د $C(0,5)$ او $D(2,2)$ ټکو څخه تیرېږي، له یوبل سره څه اړیکه لري؟

حل:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{1-7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{CD} = \frac{2-5}{2-0} = \frac{-3}{2}$$

$$m_{AB} \cdot m_{CD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$$

په پایله کې، د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ مستقیمې کرښې، یو پربل عمود دي.

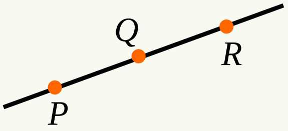
فعالیت

- د $C(4,4), B(1,3), 0(0,0)$ او $D(3,1)$ ټکي، د وضعیه کمیاتو په سیستم کی ونښیاست.
- د OBCD شکل رسم کړئ.
- د $\overline{CD}, \overline{BC}, \overline{OB}$ او $\overline{DO}$ ضلعو اوږدوالی پیدا کړئ.

• د $\boxed{OBCD}$ خلورضلعي، څه ډول خلورضلعي ده؟
• وښيئ چې د $\overline{OC}$ او $\overline{BC}$ قطرونه، يو پر بل عمود دي؟
پوهېږو، چې په يوه مستوي کې، د دوو ټکوڅخه، يوازې يو مستقيم تېرېږي، په کوم حالت کې له درېو ټکو څخه، يومستقيم خط تېرېدلای شي؟

تعريف

د Q, P او R ټکي، هغه وخت پر يوه مستقيم پراته دي، چې د $\overline{PQ}$ ميل د $\overline{QR}$ له ميل سره مساوي وي.



دويم مثال: د $A(0,-1)$, $B(2,3)$ او $C(-1,-3)$ درې ټکي په پام کې ونيسئ، دا وښيئ، چې دا درې واړه ټکي په يوه مستقيمه کرښه پراته دي؟

حل: د AB ميل عبارت دی له:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{3+1}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_{\overline{AC}} = \frac{-3-(-1)}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

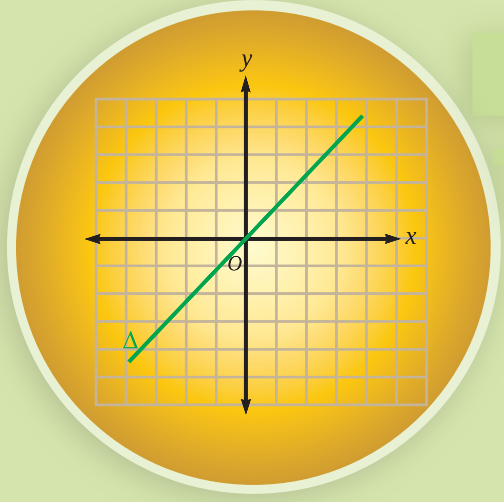
د AC ميل عبارت دی، له : $m_{\overline{BC}} = \frac{-3-3}{-1-2} = \frac{-6}{-3} = 2$

څرنګه چې، د $\overline{AB}, \overline{AC}$ او $\overline{BC}$ کرښو ميلونه سره مساوی دي، نوبه پايله کې د B, A او C ټکي په يوه مستقيمه کرښه پراته دي.

• که چيرې د دوو کرښو د ميلونو د ضرب حاصل (-1) وي، نو کرښې يوپربل عمودي دي.
• درې ټکي، هغه وخت په يوه کرښه پراته وي، چې د ټوټه کرښو ميلونه سره مساوي وي.

پوښتنې

1– که د $A(6,1)$ ، $B(8,3)$ او $C(6,5)$ ټکي، د يوه مثلث څوکې يا راسونه وي، دا وښيئ، چې نوموړی مثلث قايم الزاويه دی.
2 - هغه ټوټه کرښې، چې د $(7,5)$ او $(1,1)$ ټکو څخه تېرېږي له هغې ټوټه کرښې سره، چې د $(0,5)$ او $(2,2)$ ټکوڅخه تېرېږي، اړيکې يې يو له بل سره وڅېړئ.
3 - يوه کرښه چې د $(2,4)$ او $(7,5)$ ټکو اوبله د $(1,-4)$ او $(-3,-5)$ ټکوڅخه تېرېږي، د دواړو کرښوحالت، يو له بل سره بيان کړئ.



د مستقيمي کرښې معادله

په مخامخ شکل کې، د مستقيمې کرښې پرمخ څو ټکي وټاکئ، د کرښې پرمخ د ټاکل شویو ټکو د فاصلې اوترتیب ترمنځ کومه اړيکه وينئ؟

فعاليت

- د $A(1,-1)$، $B(-2,2)$، $C(4,-4)$ او $D(-3,3)$ ټکي د وضيعه کمياتو په سيستم کې وټاکئ؟
- ددې ټکو له ترلوڅخه کوم شکل لاسته راځي؟
- د $A(1,1)$ او $B(0,0)$ ټکي د شکل پرمخ پراته دي اوکه نه؟ ولې؟

د پورتني فعاليت پايله، په عمومي ډول داسې بيانوو:

د $y=x$ او $y=-x$ رابطې، چې د یوې کرښې پرمخ د ټکو د فاصلې اوترتیب ترمنځ اړيکه رانبيي، د مستقيمې کرښې معادله بلل کيږي.

پوهيږو، چې د هرو دوو ټکو څخه، چې په يوه مستوي کې پرتې وي، يوازې او يوازې يوه مستقيمه کرښه تيريږي. اوس غواړو چې د هغې مستقيمې کرښې معادله پيدا کړو چې له دوو اختياري ټکو څخه تيريږي.

فعاليت

- د $A(1,3)$ او $B(3,5)$ دوه ټکي، د وضيعه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.
- هغه مستقيمه کرښه رسم کړئ، چې له A او B ټکوڅخه تيره شي.

ددې لپاره چې، د $M(x,y)$ اختياري ټکئ د $\overline{AB}$ کرښې پر مخ پروت وي، کوم شرط لازمي دی.
د $\overline{AM}$ او $\overline{AB}$ ټوټه کرښو ميلونو له مساويتوب څخه کومه اړيکه لاسته راځي.

د پورتني فعاليت پايله کولای شو، په عمومي ډول داسې بيان کړو.

د هغې کرښې معادله، چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ له دوو ټکو څخه تېره شي، داسې په لاس راځي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ، چې د $A(3,4)$ او $B(2,-1)$ له ټکوڅخه تېره شي.

حل: د هغې مستقیمې کرښې د معادلې په مرسته، چې دوه ټکي يې معلوم وي، لیکلای شو، چې:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-4}{x-3}=\frac{-1-4}{2-3}\Rightarrow\frac{y-4}{x-3}=\frac{-5}{-1}=5$$

$$y-4=5(x-3)$$

$$y=5x-15+4=5x-11$$

دويم مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ، چې د x محور په فاصله، د $x=-3$ ټکي کې او د y محور په ترتیب د $y=4$ ټکي کې پرې کړي؟

حل: څرنګه چې، مستقیمه کرښه د x محور په $x=-3$ ټکي کې پرې کوي، نو د مختصاتو په سیستم کې، ددې ټکي د پرېکړې مختصات $(-3,0)$ دی. په همدې ډول، د y له محور سره د پرېکړې د ټکو د مختصات د وضعیه کمیاتو په سیستم کې $(0,4)$ دی، اوس دیوه مستقیم د دوو ټکو پېژندلو په مرسته کولای شو، د مستقیمې کرښې معادله داسې ولیکو:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-0}{x-(-3)}=\frac{4-0}{0-(-3)}$$

$$\frac{y}{x+3}=\frac{4}{3}\Rightarrow 3y=4(x+3)$$

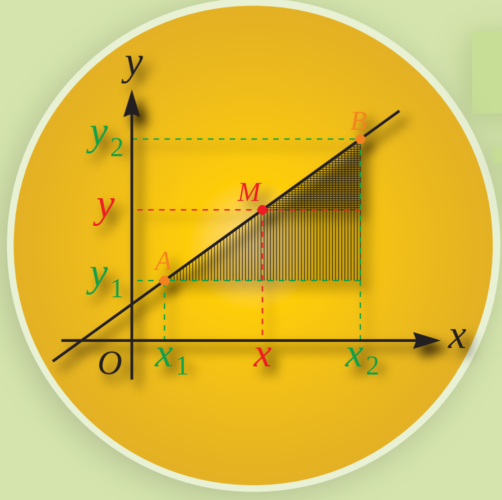
$$3y-4x=12$$

پوښتنې

1- د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ، چې د $A(2,-1)$ او $B(3,4)$ له ټکو څخه تېره شي.

2- د هغه مثلث د $\overline{AM}$ میانې معادله ولیکئ، چې راسونه يې $A(1,3)$، $B(-1,4)$ او $C(5,6)$ وي؟

3- د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې د x محور په $A(3,0)$ او د y محور په $B(0,-2)$ ټکي کې پرې کړي؟



د هغې مستقیمې کرښې معادله، چې میل اویو ټکی یې معلوم وي

په مخامخ شکل کې، د $\overline{AB}$ میل، د $\overline{MA}$ له میل سره څه اړیکه لري؟
بله هره ټوټه کرښه، چې ددې ټوټه کرښې پرمخ وټاکو، د $\overline{AB}$ له میل سره برابر میل لري، ولې؟

پوهیږو، چې د هغې کرښې معادله، چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوه ټکي ښکاره کوي عبارت ده، له:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

یا

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

څرنگه چې، $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ د مستقیمې کرښې میل راښیي، نو پورتنی معادله لاندې شکل غوره کوي. $y-y_1=m(x-x_1)$

وروستنی معادله، د هغې کرښې معادله ده، چې میل یې (m) او د $A(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تیریږي.

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ، چې د $(2,3)$ ټکي څخه تیره اومیل یې $\frac{1}{2}$ وي.

حل: څرنگه چې د مستقیمې کرښې میل اویو ټکی راکړل شوي دي نو د $y-b=m(x-a)$ معادلې څخه لیکلای شو:

$$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$2(y-3)=(x-2)$$

$$2y-6=x-2$$

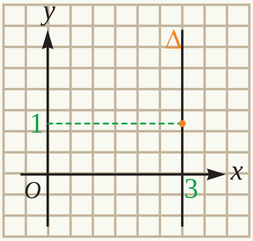
$$2y-x=4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2$$

دويم مثال: هغه مستقيمه کرښه، چې د $(3,1)$ ټکي څخه تېره او د x له محور سره موازي وي، وليکئ؟

حل: څرنګه چې، مستقيمه کرښه، د x له محور سره موازي ده، نوميل يې صفر دی. په پايله کې يې معادله، په لاندې ډول ده .

$$y-b=m(x-a)$$
$$y-1=0\ (x-3)$$
$$y-1=0 \Rightarrow y=1$$

درېم مثال: د هغې مستقيمې کرښې معادله وليکئ، چې د $(3,1)$ ټکي څخه تېره او د y له محور سره موازي وي؟



حل: څرنګه چې، مستقيم د y له محور سره موازي ده، نوميل يې نه دی تعريف شوی (معين ميل نه لري)، څکه پوهيږو چې، ددې کرښې پرمخ، دهر ټکي واټن د $(3,1)$ ټکي سره مساوي ده، چې معادله يې په دې ډول $x=3$ ده.

په عمومي ډول، هغه کرښه، چې د (a,b) ټکي څخه تېره او د x له محور سره موازي وي، عبارت له $y=b$ سره ده.

هغه کرښه، چې د (a,b) ټکي څخه تېرېږي او د y له محور سره موازي وي، عبارت له $x=1$ سره ده.

څلورم مثال: د Δ توټه کرښې، د عمودي ناصف معادله پيدا کړئ، چې د $A(2,-4)$ او $B(-2,4)$ ټکوڅخه تېره شي.

حل: د عمودي ناصف د معادلې د پيداکولو لپاره، لومړې د $\overline{AB}$ توټه کرښې ميل په لاس راورو او بيا د هغې د منځ د $\overline{AB}$ د منځنۍ ټکي مختصات په لاس راورو.

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4+4}{-2-2}=-2 \quad\Rightarrow\quad m_\Delta=-\frac{1}{m_{\overline{AB}}}=\frac{1}{2}$$

$$(x,y)_{\overline{AB}}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{0}{2},\frac{0}{2}\right)=(0,0)$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad\Rightarrow\quad y-0=\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

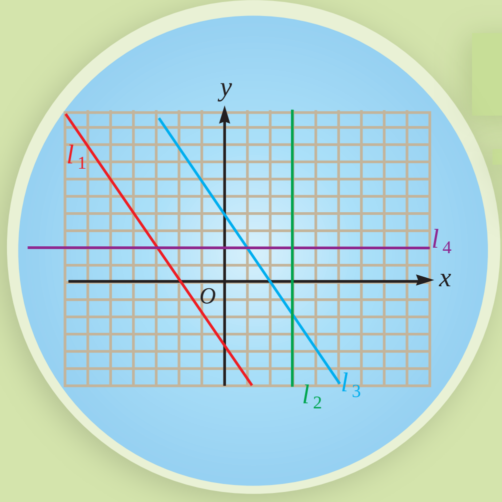
پوښتنې

1- د هغې مستيمې کرښې معادله پيدا کړئ، چې ميل يې 4 او y محور د 3 په ټکي کې پرې کړي.

2- د هغې مستقيمې کرښې معادله پيدا کړئ، چې د $P(5,-4)$ ټکي څخه تېره او ميل يې 2- وي.

3- د $3x+4y-7=0$ معادله کې، د مستقيم ميل او د y له محور سره يې د تقاطع ټکي پيدا کړئ.

د مستقیمې کرښې عمومي معادله



د l_1 ، l_2 ، l_3 ، l_4 خلورکرښې، نسبت یوې بلې ته، کوم وضعیتونه لري؟

د یوې کرښې الجبري معادله، د هغه ټکي د مختصاتو اړیکه، چې په مستقیمه کرښه پروت دی راښیي، په عمومی ډول د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول بیانوو:

په معیاري یا ستندرډ ډول، د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول ده.

$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ یا $ax + by + c = 0$ ، b, a او c حقیقي عددونه او $b \neq 0$ دی.

په پورتنی معادله کې $\frac{-a}{b}$ د کرښې میل او $\frac{-c}{b}$ د y له محور سره د پریکړې ټکی یا تقاطع بلل کیږي.

نو ویلای شوچې، د هرې کرښې معادله، په یوه مستوي کې په لاندې ډول ده:

$y = mx + h$ چې m د مستقیمې کرښې میل او h د y محور سره د پریکړې ټکي یا ترتیب دی په عمومي ډول، هره خطي اړیکه، د x او y له جنسه، چې په هغه کې د x او y توان یو وي، د مستقیمې کرښې معادله بلل کیږي.

فعالیت

- د $2x + 3y - 6 = 0$ او $y - x = 2$ دوې مستقیمې کرښې، د وضیعه کمیاتو په مستوي کې رسم کړئ.
- د هریوه مستقیم میل پیدا کړئ؟
- دا دوې کرښې یوه له بلې سره څه وضعیتونه لري؟

له پورتني فعالیت څخه، پایله په لاندې ډول بیانوو:

که د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي، نوکرښو یوه بله پرې کړې دی.

په عمومي ډول، که د $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ او $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ دوې کرښې یوه بله پرې کړې. نو میلونه یې سره مساوي نه دي له دې نه داسې پایله په لاس راځي.

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \quad \text{یا} \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

فعالیت

- د $-3x+y-5=0$ او $6x-2y+1=0$ مستقیمي کرښې، د قایمو وضیعه کمیاتو په مستوي کې رسم کړئ،
- ددې مستقیمي کرښې میل په لاس راوړئ؟
- دا دوې مستقیمي کرښې، نسبت یوه بلې ته څه حالت لري؟ ولې؟

په عمومي ډول، د $a_1x+b_1y+c_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2=0$ دوه مستقیمي کرښې، هغه وخت موازي دي، چې میلونه یې سره مساوي وي، له دې ځایه دا پایله په لاس راځي، چې د هغوی د متحولینو د ضریبونوترمنځ، لاندې اړیکه موجوده ده.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

که د متحولینو د ضریبونو ترمنځ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_1}=\frac{c_1}{c_2}$ اړیکه وي، په دې حالت کې کرښې یو پر بل پرتې(منطبق) دي.

لومړی مثال: د $3x+4y=5$ او $4x-3y=-1$ د مستقیمو اړیکې، نظر یو بل ته بیان کړئ؟

حل: د دوو کرښو د معادلاتو د ثابتوضریبونو نه په ګټې اخیستنې سره لروچې:

$a_1=3$ $\quad b_1=4$ $\quad c_1=-5$

$a_2=4$ $\quad b_2=-3$ $\quad c_2=1$

1- څرنګه چې، $\frac{3}{4}\neq\frac{4}{-3}$ نو $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ دی په دې حالت کې کرښې یوبل غوڅوي.

2- څرنګه چې، $\frac{3}{4}\times\frac{4}{-3}=-1$ نو $\frac{a_1}{a_2}\times\frac{b_1}{b_2}=-1$ دي، نو د کرښو د پرېکړې په ټکي کې، یوپربل عمود دي.

دویم مثال: په لاندې معادلوکې د k عددي قیمت داسې وټاکئ، چې مستقیمونه له یوبل سره عمودي وي، $2x-6y+3=0$ او $kx+3y-1=0$

حل: د عمودیت شرط څېرو:

$$kx+3y-1=0\ ,2x-6y+3=0$$
$$a_1.a_2+b_1.b_2=0$$
$$2\cdot k+(-6)3=0\ \Rightarrow k=9$$

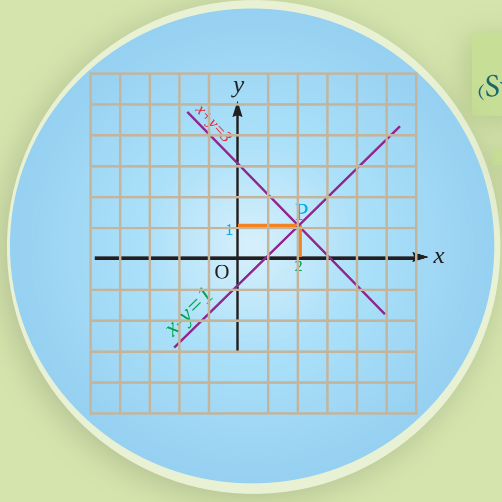
پوښتنې

1- د $4x+3y-1=0$ او $8x+6y+5=0$ کرښوحالت، یوبل ته بیان کړئ.

1 - د $8x-4y+10=0$ او $4x-2y+5=0$ کرښو حالت یو بل ته بیان کړئ.

3 - د $(k+1)x+ky=0$ او $2x-3y+5=0$ معادلوکې د k قیمت داسې وټاکئ، چې کرښې یوه له بلې سره موازي وي.

د خطي معادلو سیستم
(System of liear equation)



شکل ته پام وکړئ، ایا د P ټکي مختصات، د کرښو په دواړو معادلو کې صدق کوي؟

فعالیت

- د $y = 4x - 2$ او $y = 3x + 5$ کرښو میلونه پیدا کړئ؟
- دا کرښې نظر یوې بلې ته څه اړیکی لري؟ ولې؟
- پورتنی دواړې کرښې، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ؟ د رسم شویو کرښو تر منځ څه اړیکه لیدل کیږي؟

په پورتني فعالیت کې لیدل کیږي، د هغو دوو کرښو، چې میلونه یې مساوي نه وي، یو بل د P په ټکي کې پرې کوي.
څرنګه چې، پرېکړي ټکي د دواړو کرښو په مخ پراته دي، نو د هغه ټکي مختصات، د کرښو په معادلو کې صدق کوي. که د پرېکړي د ټکي مختصات، په P(x,y) وښیو نو:
$y = -3x + 5$ او $y = 4x - 2$ معادلو څخه لیکلای شو، چې:

$$4x - 2 = -3x + 5$$
$$7x = 7$$
$$x = 1$$

د کرښو په معادلو کې، د x قیمت په وضع کولو سره، د y قیمت په لاس راوړلای شو:

$$y = 4x - 2 \Rightarrow y = 4(1) - 2 \Rightarrow y = 2$$

نو د پرېکړي ټکي مختصات عبارت دي، له $P(1,2)$ په پایله کې ویلای شو چې $P(1,2)$

ټکی داسې ټکی دی، چې په دواړو معادلو کې حقیقت لري، چې د $\begin{cases} y=4x-2 \\ y=-3x+5 \end{cases}$ خطي معادلو د سیستم حل دی.

فعالیت

- مخامخ، د خطي معادلو سیستم په پام کې ونیسئ. $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \quad .... \quad I \end{cases}$
- a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 او c_2 د څه په نامه یادېږي؟
- په پورتنیو معادلو کې x او y ته څه ویل کېږي؟
- ایا ددې دوو کرښو د پرېکړې د ټکي، د مختصاتو د سیستم یو حل کیدای شي؟

د خطي سیستم د حل لپاره، د (I) سیستم داسې لیکو، چې په هغه حالت کې، چې b_1 او b_2 د صفر خلاف وي.

$$\begin{cases} y=-\dfrac{a_1}{b_1}x+\dfrac{c_1}{b_1} \\ y=-\dfrac{a_2}{b_2}x+\dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

نو لاندې درې حالتونه لرو:

1- که چیرې، د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي، نو دا کرښې یوه او بله، په یوه ټکي کې پرې کوي.

2- که چیرې د کرښو میلونه مساوي وي اما د y محوره یې د پرېکړې ټکي مساوي نه وي هغه وخت دا دوه کرښې سره موازي دي.

3- که چیرې د کرښومیلونه او د y محور سره، د پرېکړې ټکي مساوي وي، نو هغه دوه کرښې سره منطبق وي.

لومړی مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

حل: د دې سیستم د حل لپاره، نوموړی سیستم په دې ډول لیکو:

$$\begin{cases} y=7-x \quad \Rightarrow y=-x+7 \\ y=5-2x \Rightarrow y=-2x+5 \end{cases}$$

ليدل کېږي، چې د پورتنيو کرښو د معادلو ميلونه، 1- او 2- دي، څرنګه چې، د دوو خطونو ميلونه مساوي نه دي نو کرښې يوه او بله په يوه ټکي کې پرې کوي، چې د پرېکړې د ټکي د مختصاتو د پيداکولو لپاره، په لاندې ډول عمل کوو:

$$-x+7=-2x+5$$
$$-x+2x=5-7 \quad \Rightarrow x=-2$$

د کرښو په يوه معادله کې، د x پر ځای د 2- په وضع کولو سره لرو، چې:

$$y=-x+7$$
$$y=-(-2)+7 \quad \Rightarrow y=9$$

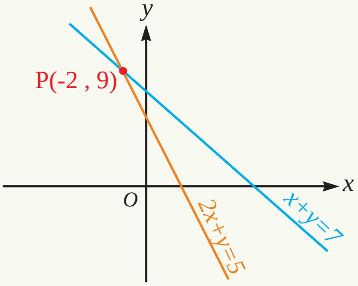
نو $(-2,9)$ د کرښو د معادلو د سيستم حل او د پرېکړې ځای دی، چې په شکل کې ليدل کېږي.

$x+y=7$

x	0	7
y	7	0

$2x+y=5$

x	0	5/2
y	5	0



دويم مثال: د لاندې خطي معادلو سيستم حل کړئ.

حل: لومړی معادلې په لاندې ډول ليکو:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 6y=-6x+12 \end{cases}$$

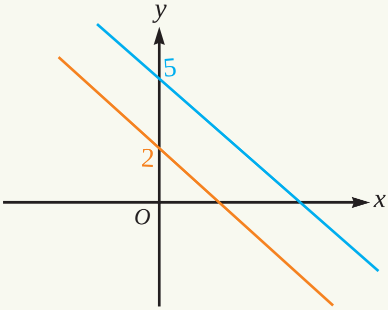
$$\begin{cases} y=-x+5 \\ y=-\frac{6}{6}x+\frac{12}{6} \end{cases}$$

$y=-x+5$

x	0	5
y	5	0

$y=-x+2$

x	0	2
y	2	0



څرنګه چې، د دواړو کرښو ميل 1- دی، په پايله کې کرښې، په خپل منځ کې موازي دي او يوه بله نه پرې کوي، يعنې د موازي کرښو د معادلو سيستم حل نه لري.

دریم مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x+y=7 \\ -28=-4x-4y \end{cases}$$

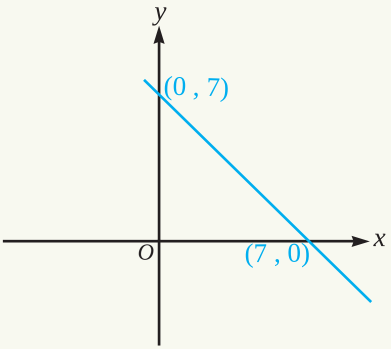
حل: لومړی د معادلاتو سیستم په لاندې ډول لیکو:

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ y=\dfrac{-4}{4}x+\dfrac{28}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ \\ y=-x+7 \end{cases}$$

x	0	7
y	7	0

x	0	7
y	7	0



لیدل کېږي، چې د کرښو میل او د y په محور د پرېکړې ټکي سره برابر دي نو دواړه کرښې سره منطبق دي، په دې حالت کې کرښې ډېر ګڼ ټکي لري، په پایله کې د خطي معادلو سیستم ډېر حلونه لري.

که a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 او c_2 حقیقي عددونه او x او y مجهولونه وي، په دې حالت کې، د خطي معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ دی.

- که چیرې کرښې، یوه له بلې په یوه ټکي کې پرې کړي، معادلې یو حل لري.
- که چیرې کرښې یوه له بلې سره موازي وي، معادلې حل نه لري.
- که چیرې کرښې یو پر بل منطبق وي، معادلې بې نهایت حلونه لري.

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ:

1) $\begin{cases} y=2x+5 \\ y=4x-3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x-2=y \\ 3x-y=2 \end{cases}$

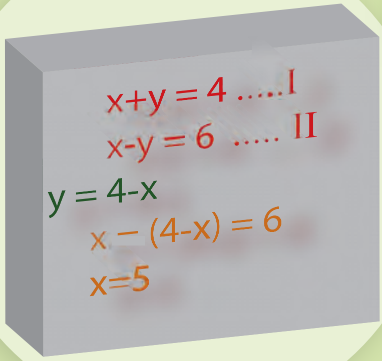
3) $\begin{cases} y=-x+3 \\ y=2x-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x-y=6 \\ 8x-2y=6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x-y=6 \\ -6x+2y=-10 \end{cases}$

د خطي معادلو سیستم حل، په تعویضي لاره(طریقه)



د خطي سیستم د معادلو حل ته پام وکړئ د x مجهول عددي قیمت، ستاسو په هاند څنګه په لاس راغلی دی؟

فعالیت

- د یوه مثلث د دوو زاویو مجموعه، 100° او د تفریق حاصل یې، 20^0 دی، الجبري معادلې یې ولیکئ.
- د معادلاتو دا سیستم څو مجهوله لري؟ د هر یوه عددي قیمت پیدا کړئ؟
- په لاس راغلي قیمتونه، د معادلاتو په سیستم کې وازمایئ؟

له پورتني فعالیت څخه، د مسألې حل او د خطي، معادلو سیستم د حل لاره، په لاندې ډول داسې لیکو:

حل: که چیرې د مثلث زاویې، په $\hat{A}$ او $\hat{B}$ ونوموو پورتنی عبارت، د الجبري معادلو په بڼه داسې لیکو:

$$\hat{A}+\hat{B}=100^0 \ ....I$$
$$\hat{A}-\hat{B}=20^\circ \ ....II$$

او د $\hat{A}$ زاویې قیمت، د $\hat{B}$ زاویې له جنسه، له لومړۍ معادلې څخه په لاس راوړو $\hat{A}=100^\circ-\hat{B}$ دا قیمت په دویمه معادله کې د A په عوض وضع کوواو معادله حلوو:

$$100^0-\hat{B}-\hat{B}=20^0 \quad \Rightarrow -2\hat{B}=-80^0 \quad \Rightarrow \hat{B}=40^0$$

اوس د $\hat{B}$ قیمت، د خطي معادلاتو په سیستم کې وضع کوو، چې د $\hat{A}$ قیمت په لاس راځي:

$$\hat{A}-\hat{B}=20^0$$
$$\hat{A}-40^0=20^0 \quad \Rightarrow \hat{A}=20^0+40^0 \quad \Rightarrow \hat{A}=60^0$$

دويم مثال: لاندې د دوه مجهوله معادلو سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$$

حل: لومړی د یوه مجهول قیمت، د بل مجهول له جنسه، د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او په بله معادله کې یې وضع کوو:

$$2x+3y=0 \quad \Rightarrow 2x=-3y \quad \Rightarrow x=-\frac{3}{2}y$$

$$\left.\begin{aligned} &3x+2y=10 \\ &3(-\frac{3}{2}y)+2y=10 \\ &-\frac{9}{2}y+2y=10 \\ &\frac{-9+4}{2}y=10 \\ &-5y=20 \quad \Rightarrow y=-4 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} &x=-\frac{3}{2}y \\ &x=-\frac{3}{2}(-4) \\ &x=-3(-2) \\ &x=6 \end{aligned}$$

د دوه مجهوله، لومړۍ درجو معادلو سیستم د حل لپاره، په لاندې ډول عمل کوو:
- د یوه مجهول قیمت، د بل مجهول له جنسه، د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او هغه په بله معادله کې، د هغه په عوض وضع کوو.
- په لاس راغلې یو مجهوله لومړۍ درجه معادله حلوو او د مجهول قیمت په لاس راوړو.
- دا په لاس راغلی مجهول قیمت، د سیستم په معادلو کې وضع او د بل مجهول قیمت، په لاس راوړو.
- په لاس راغلې قیمتونه، د سیستم په معادلو کې وضع کوو که سم له لاسه، په دواړو معادلو کې یې حقیقت ولري، د معادلې حل سم او پرته له هغه، د معادلې حل نه او سم نه دی.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو حل، په تعویضي طریقه په لاس راوړئ:

1) $\begin{cases} y=2x \\ x+y=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x-2y=15 \\ 6x-y=10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a+2b=2 \\ 2a-3b=25 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3}+\frac{y+2}{4}=4 \\ \frac{x+3}{3}=\frac{x-y}{3} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{5}{x}-\frac{3}{y}=1 \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=7 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{2x}{3}+\frac{y}{5}=6 \\ \frac{x}{6}-\frac{y}{2}=-4 \end{cases}$

د خطي معادلو سیستم حل، د افنا په لاره(طریقه)

$$x + y = ?$$
$$\frac{1}{3}x + y = ?$$
$$x = ?$$
$$y = ?$$

حمیرا، زحل ته وویل: که ته خپلې پیسې ما ته راکړې، زه د 15 افغانیو خښتنه کېږم، زحل حمیرا ته وویل: که ته د خپلو پیسو دریمه برخه ما ته راکړې، زه د 5 افغانیو خښتنه کېږم، هره یوه څو افغانی لري؟

فعالیت

- د معادلو یو سیستم ولیکئ، چې دوه معادلې او دوې مجهوله ولري؟
- نوموړی سیستم، د ګراف په مرسته حل کړئ؟
- نوموړې معادلې، په تعویضي طریقه حل کړئ.
- ایا بله طریقه شته، چې نوموړې معادلې پرې حل شي؟

یوه بله لاره، چې د دوه مجهوله معادلو سیستم پرې حلولای شو، د افنا طریقه یا لاره ده، چې په لاندې مثال کې یې څېړو.

مثال: د خطي معادلو دا سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 41 \text{ .... I} \\ 5x - 2y = 7 \text{ .... II} \end{cases}$$

حل: لومړی معادلو ته داسې بدلون ورکوو، چې که هغوی خوا په خوا سره جمع یا تفریق کړو نو له مجهولونو څخه یو مجهول افنا یا له منځه لاړ شي، که د x مجهول وغواړو چې افنا یې کړو، د لومړی معادلې دواړه خواوې، د دویمې معادلې د x په ضریب یعنې(5) کې ضربوو او د دویمې معادلې دواړه خواوې، د لومړی معادلې د x په ضریب یعنې (7) کې ضربوو.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 205 & \Rightarrow \quad 35x + 25y = 205 \\ 5x - 2y = 7 & \Rightarrow \quad 35x - 14y = 49 \end{cases}$$

په لاس راغلي معادلې، چې په هغه کې د x ضریبونه مساوي دي، یو له بل څخه تفریقوو.

$$\begin{array}{r} 35x + 25y = \ 205 \\ 35x - \ 2y = \ 49 \\ - \quad + \quad - \\ \hline 39y = 156 \end{array} \qquad \Rightarrow y = \frac{156}{39} \Rightarrow \ y = 4$$

د y په لاس راغلی قیمت، د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو، تر څو د بل مجهول قیمت په لاس راشي:

$$5x-2y=7$$
$$5x-2(4)=7 \quad \Rightarrow \quad 5x=15 \quad \Rightarrow x=3$$

دویم مثال: د معادلو لاندې سیستم، د افنا په طریقه حل کړئ:

$$\begin{cases}3x+2y=4\\2x-3y=-1\end{cases}$$

حل: لومړی یو مجهول له منځه وړو، لکه: y، نو لومړی معادله، په 3- کې او دویمه معادله په 3- کې ضربوو، په لاس راغلي معادلې خوا په خوا سره جمع کوو:

$$\begin{array}{ll}3x+2y=4 & \Rightarrow -9x-6y=-12\\ 2x-3y=-1 & \Rightarrow \underline{\ _-4x_{+}^{-}6y=_{+}^{-}2}\\ & -13x+0=-10\\ & x=\frac{10}{13}\end{array}$$

$$3(\frac{10}{13})+2y=4 \quad \Rightarrow \frac{30}{13}+2y=4$$
$$2y=4-\frac{30}{13} \quad \Rightarrow 2y=\frac{52-30}{13}$$
$$2y=\frac{22}{13} \quad \Rightarrow y=\frac{11}{13}$$

د دوه مجهوله معادلو سیستم د افنا په طریقه داسې حلوو:

- هر مجهول چې وغواړو، هغه افنا کړو، د هغې ضریبونه په پام کې نیسو. لومړی معادله د دویمې معادلې د افنا شوي مجهول په ضریب کې او دویمه معادله، د لومړۍ معادلې د افنا شوي مجهول په ضریب کې ضربوو.
- په لاس راغلې معادلې، یوه له بلې څخه تفریق یا جمع کوو چې د یوه مجهول قیمت په لاس راځي، دا په لاس راغلی قیمت، د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو، چې د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

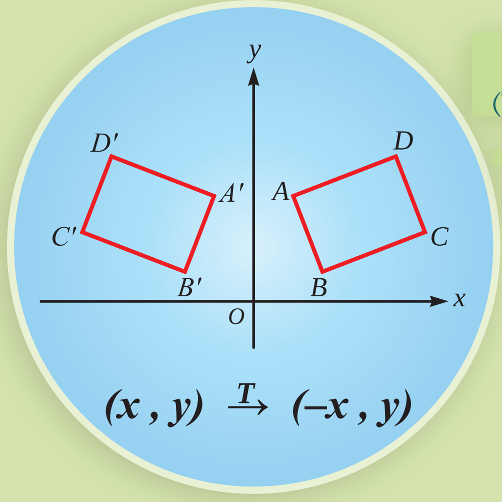
پوښتنې

د معادلو لاندې سیستم د افنا په طریقه حل کړئ.

1) $\begin{cases}x+y=3\\2x-y=10\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=-39\\x-y=9\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+2y=2\\x-4y=1\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=5\\\frac{3}{x}+\frac{10}{y}=18\end{cases}$ 5) $\begin{cases}y+x-1=0\\2x+y-9=0\end{cases}$ 6) $\begin{cases}10x+3y=26\\8x+3y=18\end{cases}$

د ځای بدلون (تغییرمکان)
(Transformation)



په مخامخ شکل کې کوم توپیرونه اوخه ډول یووالی وینئ؟

فعالیت

په مخامخ شکل کې، کوم توپیرونه او څه ډول یووالی وینئ

- د $A(1,2)$, $B(-2,3)$ او $C(2,-4)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- ددې ټکو د x په مختصه باندې، ۲ واحد ورزیات کړئ.
- په لاس راغلی ټکي، د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وښيئ.

په پورتني فعالیت کې ولیدل شول، چې هراختیاري ټکی (x, y) په یوه مستوي کې کولای شو د $(x+2, y)$ ټکي ته په دې ډول بدلون ورکړو، په دې حالت کې ویلای شو، چې په لاس راغلی ټکی د راکړل شوی ټکي څېرې یا تصویر د $(x+2, y)$ تر بدلون لاندې دی، هغه اړیکه، چې د مستوي د هر ټکي د وضیعه کمیاتو په مستوی کې یوازې او یوازې، یوه نوي ټکي ته نسبت ورکړئ په مستوي کې د ځای یا ټکي بدلون بلل کیږي.

لومړی مثال: د $D(1,2)$, $E(4,1)$ او $C(2,4)$ ټکو څېرې یا تصویر، د لاندې بدلون پر بنسټ د وضیعه کمیاتو په مستوي کې په لاس راوړئ.

$a: \quad (x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$ $\qquad b: \quad (x, y) \xrightarrow{T_2} (x, -y)$

$c: \quad (x, y) \xrightarrow{T_3} (y, x)$ $\qquad d: \quad (x, y) \xrightarrow{T_4} (x+2, y+3)$

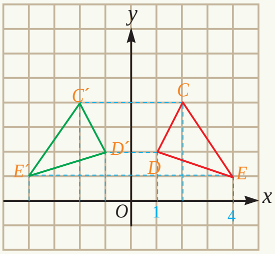
حل: لومړی راکړل شوی ټکی د وضیعه کمیاتو په سیستم کې ټاکو.

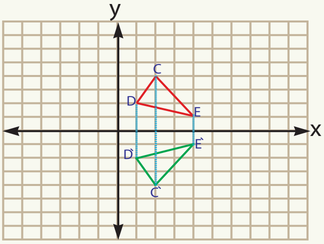
a: د $(x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$ تربدلوني لاندې لرو چې:

$T(4,1) = (-4,1)$

$T(1,2) = (-1,2)$

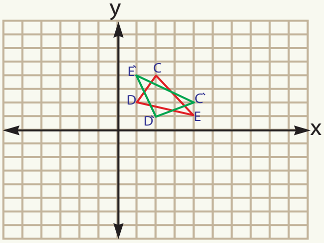
$T(2,4) = (-2,4)$





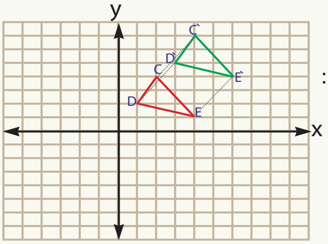
b: د $(x,y)\xrightarrow{T_2}(x,-y)$ تربدلون لاندې لرو، چې:

$R(4,1)=(4,-1)$
$R(1,2)=(1,-2)$
$R(2,4)=(2,-4)$



c د $(x,y)\xrightarrow{T_3}(y,x)$ تربدلون لاندې لرو، چې:

$M(4,1)=(1,4)$
$M(1,2)=(2,1)$
$M(2,4)=(4,2)$



d: د $(x,y)\xrightarrow{T_4}(x+2,y+3)$ تربدلون لاندې لرو، چې:

$S(4,1)=(6,4)$
$S(1,2)=(3,5)$
$S(2,4)=(4,7)$

په پورتنیو مثالونوکې ښودلای شو، چې د ځای په بدلونونو سره د ټکو ترمنځ فاصله، توپیرنه کوي.

د مثال په ډول: که $T(c)=c'$ او $T(E)=E'$ وي، نو $EC=E'C'$ ده.

هغه بدلونونه، چې د ټکوترمنځ واټن(فاصله) ساتی، ایزومتری (*Isometry*), بلل کیږي.

که یوشکل دایزومتري په ډول، خپل ځای بدل کړي، نو د اصل څېرې یا شکل سره انطباق منونکي دي.

پوښتني

1- د $(1,-1),(-2,-2),(-3,1)$ او $(3,3)$ ټکو تصویر د لاندینیو بدلونونو پر بنسټ د وضیعه کمیاتو په سیستم کې په لاس راوړئ.

a: $(x,y)\xrightarrow{T}(x-1,y+2)$

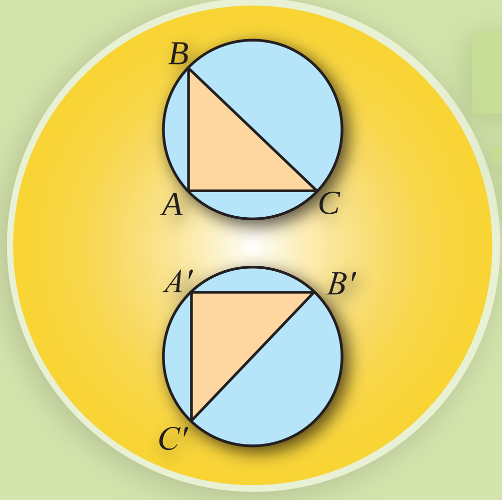
b: $(x,y)\xrightarrow{D}(2x,y)$

c: $(x,y)\xrightarrow{K}(x+5,0)$

d: $(x,y)\xrightarrow{R}(0,y-2)$

e: $(x,y)\xrightarrow{P}(3x-1,\ y+2)$

انتقال
(Translation)



په مخامخ شکل کې، د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث چي پـه مسـتوي کې يـې، لـه لومړي حالتـه، دوم حالـت، $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ غـوره کړی دی،تاسـوکولای شـئ، چي ددې حرکت د ځای بدلون شرح کړئ؟

• د وضيعه کمياتو په مستوي کې، د

فعاليت

$\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم او مختصات يې وليکئ.

• د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث راسونه د محور په مثبت جهت، د (2) واحد په اندازه او د y محور په مثبت جهت د (1) واحد په اندازه حرکت ورکړئ، نويوحاصل شويو ټکوته A', B' او C' ووايئ.

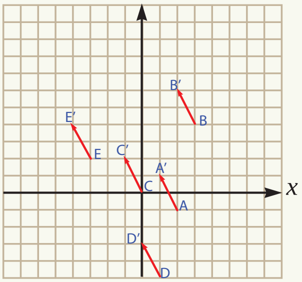
• د A', B' او C' ټکي يو له بل سره وتړئ او د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ مثلثونه، د اضلاعو د اوږدوالي اوظاهري شکل له مخې پرتله کړئ.

که چيرې، د يوه شکل ټول ټکي، په يوه ټاکلې جهت(لورى) او يو واټن(فاصل) حرکت ورکړو په لاس راغلى شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکي دي، دې حرکت ته انتقال وايي او هغه په دی ډول ښودل کيږي: $T(x, y) = (x+h, y+K)$
په داسې حال کې چې h او k حقيقي عددونه دي.

لومړى مثال: د $A(2,-1), B(3,4), C(0,0), D(1,-5)$ او $E(-3,2)$ ټکي د وضيعه کمياتو په سيستم کې د $T(x, y) = (x-1, y+2)$ انتقالي رابطې په اساس وښيئ.

حل: لومړى راکړل شوي ټکي د وضيعه کمياتو په سيستم کې وښيئ اوبيا هغه ټکي چې د $T(x, y) = (x-1, y+2)$ اړيکې خخه لاسته راځي په لاس راوړئ.

$A(2,-1), T_A(2-1,-1+2)=(1,1)$
$B(3\ ,\ 4), T_B(3-1\ ,\ 4+2)=(2,6)$
$C(0\ ,\ 0), T_C(0-1\ ,\ 0+2)=(-1,2)$
$D(1\ ,-5), T_D(1-1\ ,-5+2)=(0,\ -3)$
$E(-3\ ,2), T_E(-3-1\ ,2+2)=(-4,\ 4)$



پــه پورتنــي مثــال کې، د ټکــو له ترلوڅخه، د شــکل څېره لاســته راځــي، ليدل کېــږي چې، د $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ او $\overline{EE'}$ يو له بل سره موازي او مساوي دي.

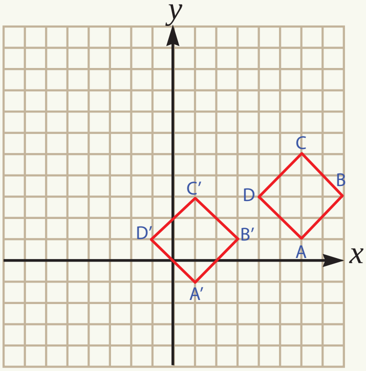
دويم مثال: که چيرې $A(6,1)$, $B(8,3)$, $C(6,5)$ او $D(4,3)$ د يوې مربع راسونه وي، هغه د وضعيه کمياتو په سيستم کې ترديې $T(x,y)=(x-5,y-2)$ اړيکې لاندې رسم کړئ.

الف: د مربع د اضلاعگانو اوږدوالي اوتصوير، نظر يوبل ته پرتله کړئ.

ب: د مربع د اضلاعگانو ميل اوڅېره يې، نظر يوبل ته پرتله کړئ؟

حل: د ABCD منطقه مربع ترانتقال لاندې د $\boxed{A'B'C'D'}$ خلور ضلعي ده.

$A(6,1), T_A=(6-5\ ,1-2) \quad \Rightarrow A'=(1,-1)$
$B(8,3), T_B=(8-5\ ,3-2) \quad \Rightarrow B'=(3,1)$
$C(6,5), T_C=(6-5,5-2) \quad \Rightarrow C'=(1,3)$
$D(4,3), T_D=(4-5,3-2) \quad \Rightarrow D'=(-1,1)$



د (الف) او (ب) جزونو د زده کوونکو کورنی دنده ده.

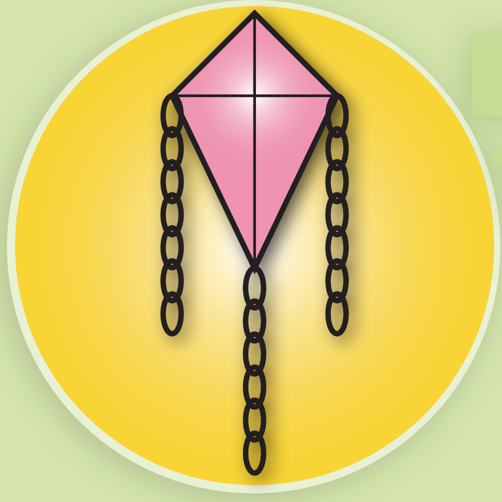
انتقال يو ايزومتري رابطه ده.

پوښتنې

۱- که د $M(1,-1)$, $N(2,-5)$، $O(2,5)$ او $P(3,3)$ يوه خلور ضلعي وي، خلور ضلعي او د هغې تصوير تر دې رابطې $T(x,y)=(x+9,-y)$ لاندې رسم کړئ؟

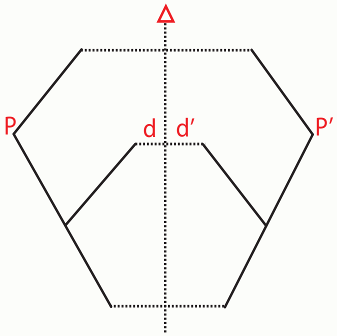
۲- که $L(7,0)$, $I(5,0)$ او $0(5,3)$ د يوه مثلث راسونه وي، مثلث او د هغې تصوير ياڅېره د $F(x,y)=(-y+3,x-3)$ بدلون پربنسټ رسم کړئ.

انعـکاس
(Reflection)



د کاغذباد(کاغـذ پـران) څېرې تـه پاملرنه وکړئ، ستاســو په نظر دا کاغذپران نسبت کوم یوه قطر ته متناظردی؟

فعالیت



- د یوې صفحې په نیمایي کې یوشکل رسم کړئ.
- د شکل ټولې کرښې په داسې رنګ رسم کړئ، چې په کاغذ کې ژر جذب نه شي.
- کاغذ په منځ داسې قات کړئ، چې د قات شوې لیکې یوې خوا ته شکل پروت وي.
- صفحه خلاصه کړئ، ووایئ چې، کوم شکل، د اصلي شکل مخامخ پروت او د دوی ترمنځ څه توپیر دی؟

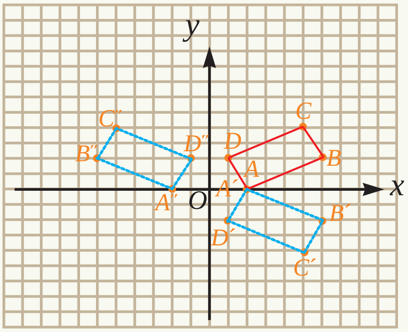
تعریف

که چیرې د P شکل یا څیرې هر ټکی، د p' شکل یاڅېرې په هر ټکی کې داسې بدل شي چې د P شکل یاڅیرې د هر ټکي فاصله، نظر Δ محورته د p' د شکل د هر ټکي واټن سره مساوي وي، دې تبدیل ته نظر Δ محورته انعکاس وایي او Δ محور ته، د انعکاس محوروایي.

لومړی مثال: که چیرې د A(2,0) ,B(6,2) C(5,4) او D(1,2) ټکي د یوه مستطیل راسونه وي، د وضیعه کمیاتو په سیستم کې، مستطیل رسم، څېره او تصویر یې نظر x او y محورته رسم کړئ.

حل:که چیرې د $\overline{ABCD}$ مستطیل څیره نظرد y محور ته رسم، کړو په دې حالت کې یوازې د x مختصه یې په $(-x)$ بدلیږي او که چیرې څیره یا تصویر یې نسبت x محورته

رسم کړو یوازې د y مختصه یې، په $(-y)$ بدلیږي، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي.



نظر y محور ته انعکاس $(-x, y)$	نظر x محورته انعکاس $(x, -y)$	ټکی (x, y)
$A''(-2, 0)$	$A'(2, 0)$	$A(2, 0)$
$B''(-6, 2)$	$B'(6, -2)$	$B(6, 2)$
$C''(-5, 4)$	$C'(5, -4)$	$C(5, 4)$
$D''(-1, 2)$	$D'(1, -2)$	$D(1, 2)$

د $T(x, y) = (-x, y)$ لیږدونه، نسبت y محورته یو انعکاس دی.

د $T(x, y) = (x, -y)$ لیږدونه، نسبت x محورته یو انعکاس دی.

د $T(x, y) = (x, y)$ لیږدونه، نسبت $y = x$ مستقیم ته یو انعکاس دی.

پوښتنې

1- که $(A(3,1)$، $B(7,1)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، مثلث او د هغې تصویر یاخیره د لاندې ورکړل شویو د انعکاسي اړیکو پر بنسټ رسم کړئ.

$a:\ R_1(x,y) = (-x, y)$ $b: R_2(x,y) = (x, -y)$

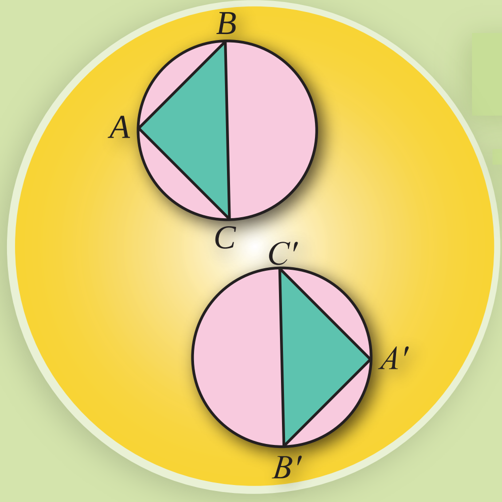
$c:\ R_3(x,y) = (y, x)$ $d: R_4(x,y) = (-y, -x)$

2- که چیرې $(A(0,2)$، $B(-5,0)$، $C(-3,-5)$ او $D(2,-3)$ د یوې مربع راسونه وي، مربع او د هغې تصویر د $R(x, y) = (-x, -y)$ انعکاسي اړیکې په اساس رسم کړئ؟

۳- د $(A(1,4)$، $B(3,-2)$ او $C(5,1)$ دیوه مثلث راسونه وي، د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث تصویریاخیره، تر انعکاس لاندې نسبت لاندې کرښو ته:

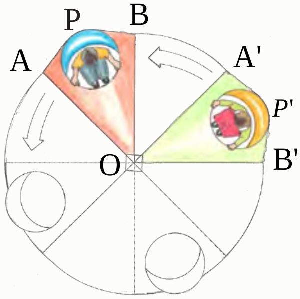
- $x + 2 = 0$ رسم کړئ او په $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ یې ونوموئ؟
- $y + 3 = 0$ رسم کړئ او په $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ یې ونوموئ؟

دوران
(Rotations)



په مخامخ شــکل کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په مســتوي کې حرکت کړی او د $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ نوی ځای یې نیولی دی، تاسې کولای شئ د دې ډول بدلون حرکت شرح کړئ؟

فعالیت



مخامخ مدل د ماشومانو د لوبو د خرخ دوه بېلابېل ځایونه راښیي.

- له شکل څخه لیدل کېږي، چې A' د A تکي متناظر او B' د B تکي متناظر دی، د $\hat{AOA'}$ او $\hat{BOB'}$ زاویې اندازه کړئ او یوه له بلې سره یې پرتله کړئ؟
- اوس د خرخ د چوکۍ په لومړي ځای یوټکی وټاکئ اوهغه په P ونوموئ.
- د P تکي متناظر ټکی، د څوکۍ په دویم ځای کې پیدا کړئ او هغه p' ونوموئ.
- د $\hat{POP'}$ زاویه اندازه کړئ.

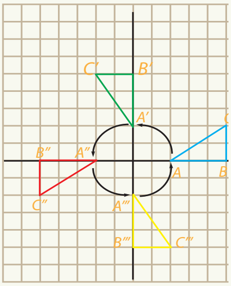
د پورتنی فعالیت په پام کې نیولو سره، دوران په مستوي کې د لیږدونې په عنوان داسې تعریفوو:

که یوشکل په یوه مستوي کې د یوټاکلي ټکي په شاوخوا د $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دواران وکړي ټول ټکی یې، د $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دوران کوي، په دې حالت کې، د O ثابت ټکی د دوران مرکز اود $\hat{\alpha}$ ثابته زاویې ته د دوران زاویه وایي.

مثال: د B(5,0), A(2,0) او $C(5,2)$ د یوه مثلث راسونه دي، د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث او د هغه خیره یاتصویر د لاندې د تبدیل د ورکړ شویو اړیکو په اساس رسم او بیا هریو بدلون شرح کړئ.

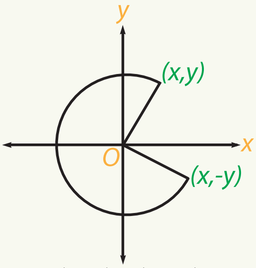
الف: $R_1(x, y) = (-x, y)$ ب: $R_2(x, y) = (-x, -y)$ ج: $R_3(x, y) = (x, -y)$

حل:



تکی	خیره تصویر		
(x,y)	(-y,x)	(-x,-y)	(y,-x)
A(2,0)	A'(0,2)	A''(-2,0)	A'''(0,-2)
B(5,0)	B'(0,5)	B''(-5,0)	B'''(0,-5)
C(5,2)	C'(-2,5)	C''(-5,-2)	C'''(2,-5)

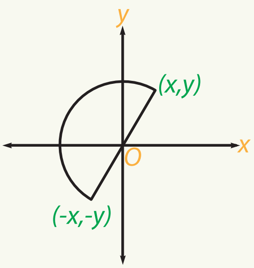
له شکل څخه لیدل کېږي، چې د R_1, R_2 او R_3 بدلونونه، د وضعیه کمیاتو د مبدأ په مرکز دورانونه، په ترتیب د $90°, 180°$ او $270°$ زاویوسره دي.



R(x,y)=(y,-x)

(0,0) د دوران مرکز

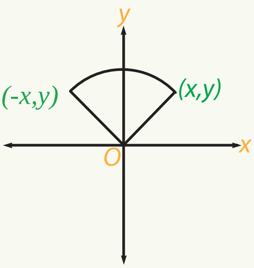
270° د دوارن زاویه



R(x,y)=(-x,-y)

(0,0) د دوران مرکز

180° د دوارن زاویه



R(x,y)=(-y,x)

(0,0) د دوران مرکز

90° د دوارن زاویه

پوښتنې

1– که $A(0,0)$ $B(6,-2)$ او $C(7,1)$ د یوه مثلث راسونه وي.

الف: د $R(x, y) = (-y, x)$ ترتبدیل لاندې د ABC مثلث شکل اوتصویر رسم کړئ.

ب: د مثلث د اضلاعگانو اوږدوالی د هغه له تصویر یا خیرې سره پرتله کړئ. ایا دا دوران یو ایزومتري دی؟

2– که $(A(-1,-2)$, $B(7,2)$, $C(5,6)$ او $D(-3,2)$ د یو مستطیل راسونه وي.

الف: $R(x, y) = (-y, -x)$ تر دوران لاندې مستطیل او د هغه تصویریا خیره رسم کړئ.

ب: د مستطیل د اضلاع گانو اوږدوالی اومساحت، د هغه له تصویر یاخیرې سره پرتله کړئ؟

د درېم څپرکي لنډيز:

- په يوه مستوي کې، چې دوه افقي اوعمودي محورونه، يو بل عموداً پرې کړي، د وضيعه کمياتو د سيستم په نامه يادېږي.
- د وضيعه کمياتو په سيستم کې افقي محورته، د فاصلې يا واټن محور اوعمودي محورته، د ترتيب محور اوډ پرېکړې ټکي ته يې مبدا وايي.
- د A او B دوو ټکوترمنځ واټن، د $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ اړيکې څخه لاسته راځي.
- د يوې کرښې د منځ ټکي مختصات د $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ څخه لاسته راځي.
- هغه کرښه، چې دy مختصه يې صفروي د منځ د ټکی مختصات يې $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$ دی.
- هغه کرښه، چې د x مختصه يې صفر وي، د منځ د ټکي مختصات يې $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$

د هرې مستقيمې کرښې ميل د $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ رابطې څخه لاسته راځي.
- د هر مستقيم خط ميل، په هغه زاويه پورې اړه لري، چې مستقيم يې، د x محور له مثبت جهت سره جوړه وي.
- هر مستقيم، چې د x محور د مثبت جهت سره حاده زاويه جوړه کړي ميل يې مثبت او که منفرجه زاويه جوړه کړي، ميل يې منفی دی.
- موازي مستقيمونه، د مساوي ميلونو لرونکي دي.
- هر مستقيم خط، چې له x محور سره موازي وي ميل يې صفر او هر مستقيم خط چې د x پر محور عمود وي ميل يې نه دی تعريف شوی.
- دوه مستقيم خطونه، هغه وخت يو پربل عمود دي چې د ميلونو د ضرب حاصل يې (-1) وي.
- درې ټکي، هغه وخت په يوې کرښې پراته دي، چې د هر قطعه خط ميلونه يې سره مساوي وي.
- د وضيعه کمياتو په مستوي کې، د يوه ټکي، هغه اړيکه چې يوازې او يوازې يوه نوي ټکي ته نسبت ورکړي، يوه ليږدونه ياتغيير مکان بلل کيږي.
- که چيرې د يوه شکل ټولو ټکو ته، په يوه ټاکلي جهت او يوه فاصله حرکت ورکړو، په لاس راغلی شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکی دی او دې حرکت ته انتقال وايي.
- که يوشکل، په يوه مستوي کې د يوه ټاکلي ټکي، په شاوخواد $\hat{\alpha}$ زاويې په اندازه دوران وکړي ټول ټکي يې په عين زاويه دوران کوي دې حرکت ته دوران وايي.

د دريم څپرکی پوښتني

• په لاندې پوښتنوکې، هرې پوښتنې ته څلورځوابونه ورکړ شوي دي، سم ځواب وټاکئ.

1- د دوو عمودي کرښو د ميلونو د ضرب حاصل:

a) (1) دی. b) صفر دی. c) ∞ دی. d)منفي يو دی.

2- د مستقيمې کرښې معادله، چې د y محور سره يې د پرېکړې ټکی او ميل يې ښکاره وي، عبارت له:

a) $y = mx + c$ b) $y = b$ c) $y = mx + b$ d) $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

3- د هغې کرښې معادله، چې دوه ټکي يې ښکاره وي، عبارت له:

a) $y = mx + b$ b) $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ c) $\dfrac{y - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x - x_1}$ d) $y = mx$

4- د $A(0, y_1)$ او $B(0, y_2)$ دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت له:

a) $M(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ b) $M(\dfrac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ c) $M(0, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

٥- د $A(x_1,0)$ او $B(x_2,0)$ دووټکو د منځني ټکي مختصات عبارت دي له :

a) $M(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ b) $M(\dfrac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ c) $M(0, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

6- د A او B دوو ټکو ترمنځ واټن، عبارت دی له:

a) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ b) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

c) $AB = \sqrt{(x_2 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$ d) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

7- د يوه ټکي او د وضيعه کمياتو د مبدا ترمنځ فاصله، عبارت ده له:

a) $AB = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ b) $AB = \sqrt{y_1^2 + y_1^2}$

c) $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$ d) $AB = \sqrt{x^2 - y^2}$

8- د يوې مستقيمې کرښې ميل عبارت دی، له:

a) $m = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ b) $m = \dfrac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$ c) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ d) $m = \dfrac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

9- دوه مستقيمونه، هغه وخت يو له بل سره موازي وي چې:

a: د هغو ميلونه سره مساوي وي. b: ميلونه يې مساوي نه وی.

c: د ميلونو د ضرب حاصل يې منفي يو وي. d: ټول ځوابونه سم دی.

• لاندې خالي ځايونه، په مناسبوکلماتو ډک کړئ:

۱- د وضیعه کمیاتو په سیسـتم کې، د x محورته، د .... او محورته د .... وايي.

۲- پـه دویمــه ناحیــه کې، هغه ټکي پراتــه دي، چې x یــې .... او y یې .... دی.

۳- په دریمه ناحیه کې، هغه ټکي پراته دي، چې x او y دواړه .... دي.

٤- هغه مستقیم، چې د x محور له مثبت جهت سره مساوي حاده زاویه جوړه کړي، میل یې .... دی.

٥- دوه موازي مستقیمې کرښې، چې د x محورد مثبت جهت سره مساوي .... جوړه وي.

٦- د x له محورسره د هر موازي مستقیم میل .... دی.

۷- درې ټکي، هغه وخت په یوه مستقیمه کرښه پراته وي، چې د ټوټه کرښو .... سره مساوي وي.

۸- که د دووکرښو میلونه، له یوبل سره مساوي نه وي، دا کرښې .... دي.

• لاندې جملې، کومې سمې اوکومې یې ناسمې دي، د سمویه مخ کې د(س) توری اود ناسمې په مخ کی، د(ن) توری ولیکئ.

1- ( ) که د وضیعه کمیاتو په مستوي کې، د هر ټکي لپاره یوازې او یوازې یوه نوي ټکي ته نسبت ورکړئ، په مستوي کې بدلون بلل کیږي.

2- ( ) که د p شکل هر ټکي د P' شکل په یوه ټکي داسې تبدیل شي، چې د p د شکل د هر ټکي واټن، نظر یوه محورته، د P' د شکل له هر ټکي سره مساوي وي، دې بدلون ته انعکاس وایي.

3- ( ) د $T(x, y) = (-x, y)$ بدلون، نسبت y محورته، یوانعکاس دی.

4- ( ) د $T(x, y) = (x, -y)$ بدلون، نسبت x محورته، یو انعکاس دی.

5- ( ) د $T(x, y) = (y, x)$ بدلون، نسبت $y = x$ مستقیم ته، یوانعکاس دی.

6- ( ) انتقال هغه تغییرمکان یالیږدونه ده چې په هغه کې د واټنونو اود زاویو پراخوالی ثابت پاتې شي.

7- ( ) که په مستوي کې یوشکل(O) د ټاکلي ټکي په شاوخوا، د $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دوران وکړي، د هغې ټول ټکي په عین زاویه دوارن کوي.

• لاندې سوالونه حل کړئ:

1- لاندې ټکي، چې وضعیه کمیات یې ورکړ شوي دي، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

$1:\ (0,1)$ $2:\ (2,3)$ $3:\ (0,-4)$ $4:\ (5,0)$

2- د لاندې ټکو د جوړو ترمنځ واټن چې وضیعه کمیات یې ورکړی شوی ښکاره کړئ.

$1:\ (0,9),(-5,4)$ $2:\ (4,1),(3,-2)$ $3:\ (-7,4),(1,-11)$

3-دارا وښیئ چې لاندې ټکي، د یوه قایم الزاویه مثلث راسونه دي او هم د مثلث مساحت پیدا کړئ.

$1:\ (0,9)\ ,\ (-4,-1)\ \ ,\ (3,2)$ $2:\ (3,-2)\ ,\ (-2,3)\ ,\ (4,-4)$

4-دا څرګند کړئ، چې لاندې ورکړی شوی ټکي، په یوه مستقیمه کرښه دپاسه پراته دي.

$1:\ (0,4)\ ,\ (3,-2)\ \ ,\ (-2,8)$ $2:\ (1,2)\ ,\ (-3,10)\ ,\ (4,-4)$

5-د یوې مستقیمې کرښې میل اویو ټکی، په لاندې ډول ورکړل شوی، د هغې معادله په لاس راوړئ.

$1:\ (2,3)\ ,\ m=-\dfrac{1}{2}$ $2:\ (-4,1)\ ,\ m=-\dfrac{2}{3}$ $3:\ (-1,-4)\ ,\ m=-2$

6- که د یوه مستطیل راسونه $(-3,1)$, $(-1,3)$, $(3,-1)$ او $(-3,1)$ وي، مساحت یې پیدا کړئ.

7- که د یوه متوازي الضلاع راسونه $(2,4)$, $(5,9)$, $(4,9)$ او $(1,4)$ وي د قطرونو اوږدوالی یې پیدا کړئ.

8- دارا وښیاست چې د $(-3,1)$, $(-9,4)$, $(12,0)$ او $(6,3)$ د یوه متوازي الاضلاع راسونه دي.

9- که $(5,0)$, $(-3,2)$ او $(-3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي د اضلاعګانو د منځنی ټکي کمیات وضیعه په لاس راوړئ.

10- ثبوت کړئ:

الف: چې د مربع قطرونه یو پربل عمود دي.

ب: چې د مستطیل قطرونه یوبل نیمایي کوي.

11- هغه مستقیم، چې د $A(3,-1)$ او $B(5,3)$ ټکوڅخه تیرېږی د وسطي عمود معادله یې پیدا کړئ.

12- د هغه مستقیم معادله پیدا کړئ، چې $P(4,5)$ ټکي څخه تېر شي او په ترتیب سره، د x او y له محورونو سره موازي وي.

13- که چیرې $A(5,0)$, $B(7,0)$ او $C(5,3)$ د یوه مثلث راسونه وي.

الف: د $T(x,y)=(-y+3,x-3)$ ترتیب لاندې مثلث او د هغه تصویر یاځېره رسم کړئ؟

ب: د ABC مثلث تصویر، د $R\ (x,y)=(-x,y)$ تر دوران لاندې پیدا کړئ او هغه ته $A'B'C'$ ووایئ، وروسته د $T(x,y)=(x+3,y-3)$ تصویر یا ځېره د ترانتقال یالیږدونې لاندې وټاکئ.

څلورم څپرکی

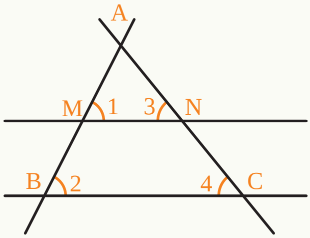
مثلثات

په مثلث کې د تالس قضیه

دوه زده کوونکي، له یو بل سره خبرې کوي چې د یوې ونې جګ والی څنګه اندازه کړي، په دوی کې یو په ځمکه اوږد پربوت او له خپل ملګري څخه یې وغوښتل، چې دومره، حرکت وکړي چې د ده سر او د ونې څوکه په یوه مستقیمه کرښه سره ووینې. د زده کوونکي په غوښتنه سوچ وکړئ.

فعالیت

• د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې، $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ دی. د هرې ټوټه کرښې اندازه، د خط کش په واسطه پیدا او په تشو ځایونو کې ولیکئ؟



$\overline{MN} =$ ____ $\overline{AN} =$ ____ $\overline{AM} =$ ____

$\overline{BC} =$ ____ $\overline{AC} =$ ____ $\overline{AB} =$ ____

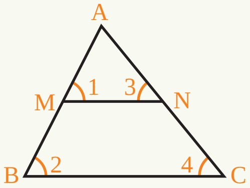
• هغه زاویې، چې یوه له بلې سره مساوي ده وښیئ؟

• د $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$ ، $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ او $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ نسبتونه پیدا او یو له بل سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه د تالس قضیه داسې بیانوو؟

قضیه: که د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث، په یوې ضلعې یا ځنډې، موازي کرښه رسم کړو، د تشکیل شوي مثلث د اضلاعو نسبت، د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث پر اضلاعو یو له بل سره مساوي دي. دا قضیه په مثلث کې، د تالس قضیې په نامه یادیږي.

ثبوت: څرنګه چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ دي نو کولای شو ولیکو چې:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{1} = \hat{2} \ldots\ldots \text{متوافقه} \\ \hat{3} = \hat{4} \ldots\ldots \text{متوافقه} \\ \hat{A} = \hat{A} \ldots\ldots \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AMN}$$

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$

لومړی مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قایم الزاویه مثلث کې، که $\overline{EF}$ له $\overline{BC}$ سره موازي دي، په پام کې ونیسئ، د قایمو اضلاعو اود $\overline{EF}$ موازي کرښې اوږدوالی پیدا کړئ؟

حل: څرنګه چې، د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې، $\overline{EF}//\overline{BC}$ سره دي نو د تالس د قضیې پربنسټ ادا دوه مثلثونه سره ورته یا مشابه دي، نو کولای شو ولیکو، چې:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$AC^2=BC^2+AB^2$$

$$5^2=BC^2+3^2$$

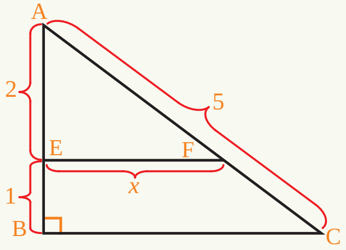
$$BC^2=25-9=16$$

$$\boxed{BC=4}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{x}{4}$$

$$x=\frac{8}{3}=2.6$$

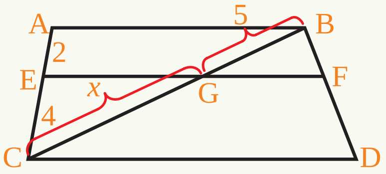


دویم مثال: په لاندې ذوذنقه کې، $\overline{EF}//\overline{BA}$ دي، د x مقدار وټاکئ.

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \quad \text{یا} \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{GB}}{\overline{AE}}$$

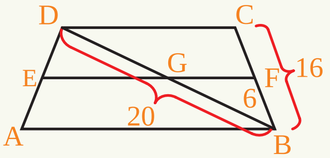
$$\frac{x}{4}=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{4\cdot 5}{2}=\frac{20}{2}$$

$$x=10$$

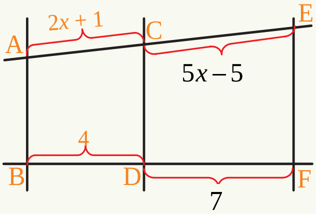


پوښتنې

1- د ذوذنقو په لاندې شکلونو کې، د x مقدار وټاکئ؟



2- په لاندې شکل کې، که $\overline{CD}//\overline{EF}$ او $\overline{AB}//\overline{CD}$ وي، د x مقدار وټاکئ؟

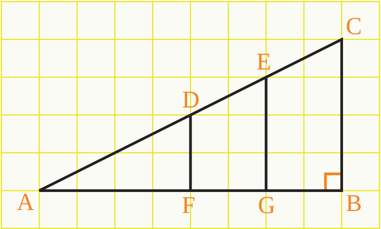


د یوې حاده زاویې ساین

که یو کاغذ پران په هوا کې د الوتلو په حالت کې وي، کولای شئ واټن یې له ځمکې څخه په لاس راوړئ؟

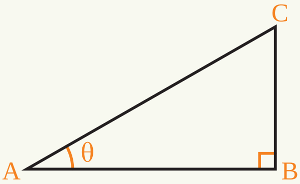
فعالیت

- په قایم الزاویه مثلث کې، د $\overline{AC}$ په وتر باندې د D او E ټکي ټاکل شوي دي. له دې ټکو څخه د مثلث په $\overline{BC}$ ضلعه موازي رسم کړئ او د پرېکړې ټکي یې، په وار سره F او G نوموو.
- له خط کش څخه په ګټې اخیستنې سره، د مثلث اضلاعو اندازه او د $\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$ او $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ نسبتونه محاسبه او پرتله یې کړئ؟



- ایا د D او E ټکو د ځای په بدلون سره د $\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$ او $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ نسبتونه هم بدلون کوي؟ دیوه ټکي په ټاکلو سره هغه وڅېړئ.
- د AC د ځای په بدلون، د $\hat{A}$ زاویې په مقدار کې بدلون رامنځ ته کېږي.
- اوس $\overline{AC}$ ثابت پرېږدئ او د $\hat{A}$ زاویې ته زیاتوالی ورکړئ. سوچ وکړئ، چې په پورتنیو مساوي نسبتونو کې څه پیښېږي؟ ویې څېړئ؟

تعریف

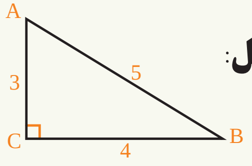


په هر قایم الزاویه مثلث کې، د یوې حاده زاویې د مخامخ ضلعې اوږدوالی، دوتر پر اوږدوالي تل مساوي له یو ثابت مقدار سره دی، چې د حاده زاویې په اندازې پورې اړه لري. دې نسبت ته، $Sin\theta$ (د حاده زاویې ساین) ویل کېږي.

$$\sin\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ حاده زاویې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{BC}{AC}$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې، $SinA$ او $SinB$ په لاس راوړئ.

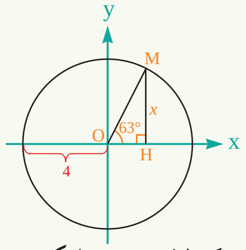
حل:



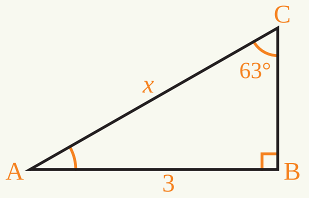
$$\sin A = \frac{\text{د A زاويې د مخامخ څنډې يا ضلعې اوږدوالى}}{\text{دوتر اوږدوالى}} \frac{\overline{BC}}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \hat{A} = 0.8$$

$$\sin B = \frac{\text{د B زاويې د مخامخ څنډې يا ضلعې اوږدوالى}}{\text{دوتر اوږدوالى}} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = 0.6$$

دويم مثال: که $Sin63^o$ مساوي په 0,891 وي، په لاندې شکلونو کې د x اندازه پيدا کړئ.



شکل (ب)



شکل (الف)

حل:

د الف جز: د يوې حاده زاويې له تعريف څخه، په ګټې اخيستنې کولای شو، وليکو چې:

$$\sin 63^{\circ} = \frac{AB}{AC}$$

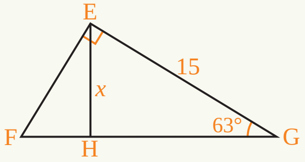
$$0.891 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{0.891} \quad \Rightarrow \quad x \approx 3.37$$

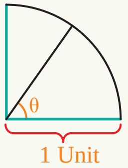
د ب جز:

$$\sin 63^{\circ} = \frac{MH}{OM}$$

$$0.891 = \frac{x}{4} \Rightarrow x \approx 3.56$$

پوښتنې





1– که $Sin63^o$ مساوي، په 0,891 وي، په مخامخ شکل کې، د x عددي قيمت پيدا کړئ.

2- د دايرې د څلورمې برخې شکل په پام کې ونيسئ.

الف: که د θ زاويه لويه شي، $Sin\theta$ څرنګه بدلون مومي؟

ب: که د θ زاويه صفر ته نژدې شي، $Sin\theta$ کوم عدد ته نږدې کيږي؟

ج: که زاويه 90° ته نږدې شي، $Sin\theta$ کوم عدد ته نږدې کيږي.

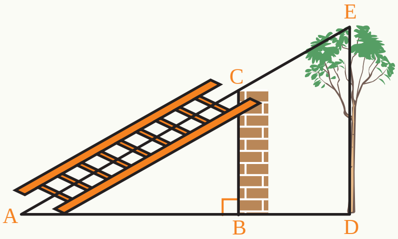
3- د 40°، 80° او 65° زاويې، په وار سره رسم او بيا هره زاويه، يو قايم الزاويه مثلث کې رسم کړئ، د کربنې يا خط کش څخه په ګټې اخيستنې سره، د مثلث اضلاعوې اندازه او $Sin80^o, Sin65^o$ او $Sin40^o$ پيدا کړئ او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

4- يو متساوي الساقين، مثلث چې قاعده يې 8 واحده او $\hat{B} = 54^{\circ}$ وي، رسم کړئ. که يوه څنډه يا ضلعه يې 5 واحده وي د B زاويې Sin ساين پيدا کړئ.

د يوې حاده زاويې کوساين

ديوه ديوال شاته د ناجو يوه ونه ولاړه ده. يو زده کوونکی غواړي و پوهېږي چې ونه له ديواله څومره واټن لري. د دې کار لپاره يې يوازې يوه لنډه زينه درلوده. فکر وکړئ هغه څه سوچ کوئ؟

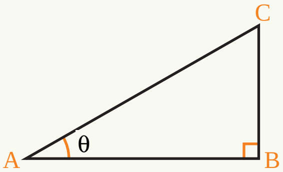
فعاليت



- په مخامخ شکل کې د تشکيل شويو مثلثونو نومونه واخلئ.
- $\overline{BC}$ او $\overline{DE}$ يو له بل سره څه اړيکه لري؟ ولې؟
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{ADE}$ مثلثونه يو له بل سره څه اړيکه لري.
- د زينې واټن تر ديوال او بيا يې تر ونې پورې پيدا کړئ.
- د تالس د قضيې په مرسته لاندې مساوات تکميل او د $\overline{AE}$ اوږدوالی په لاس راوړئ.
- دا مقدار په څه پورې تړلی دی.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{....}{AE}$$

په عمومي ډول د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قايم الزاويه مثلث کې چې يوه حاده زاويه يې θ ده، د دې زاويې د ګاونډې يا مجاورې ضلعې د اوږدوالي او دوتر د اوږدوالي نسبت ته کوساين وايي.

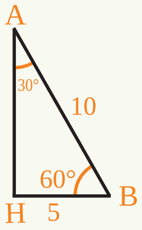


$$\cos\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ زاويې د ګاونډې ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

مثال: د AHB پـه مثلـث كـې، كـه $\hat{A}=30^\circ$ او $\hat{B}=60^o$ وي، وښيـاسـت چـې

$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ او $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ، $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ دی.

حل: د فیثاغورث له قضیې څخه، په ګټې اخیستنې سره، د AH جګوالی کولای شو ولیکو، چې:



$$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{HB}^2$$

$$10^2=\overline{AH}^2+5^2 \quad\Rightarrow \overline{AH}^2=100-25=75$$

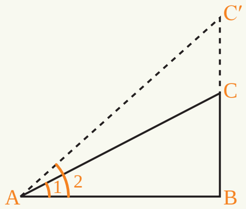
$$\overline{AH}=\sqrt{75}\ \Rightarrow \overline{AH}=5\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad , \quad \cos 60^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\quad , \quad \cos 30^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پوښتنې

1- که یوه حاده زاویه لویه شي، د کوساین په اندازه کې څه بدلون راځي؟ ولې؟
د مخامخ مثلث او مثلثاتي دایرې په مرسته خپل نظر بیان کړئ.



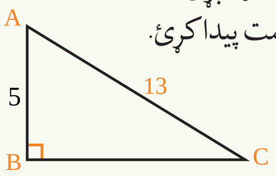
- د $CosA_1$ لپاره یو نسبت ولیکئ.
- د $CosA_2$ لپاره یو نسبت ولیکئ.
- په تشو ځایونو کې مناسبې علامې ولیکئ.

AC ☐ AC'

$\cos A_1$ ☐ $\cos A_2$

2- د 30°, 45° او 60° زاویو لپاره $Sin^2A+Cos^2A=1$ اړیکه وخېړئ؟

3- په لاندې قایم الزاویه مثلث کې، د $SinA$ او $CosA$ عددي قیمت پیدا کړئ.



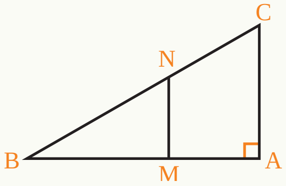
4- د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې، چې د اضلاعو اوږدوالی یې 8،6 او 10 واحده وي، د $SinA$ او $CosA$ مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ؟

د حاده زاويې تانجنت

يو زده کوونکی، د بيرغ مخکې ولاړ دی.
سوچ کوي، چې د بيرغ د ميلې اوږدوالی
څنګه پيدا کړي؟

فعاليت

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث، چې د $\hat{A}$ زاويه يې قايمه ده، د $\hat{B}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه $(\cos\hat{B}, \sin\hat{B})$ په پام کې ونيسئ، چې د $\overline{MN}$ ټوټه کرښه، په $\overline{AC}$ موازي رسم شوې ده.



- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نيولو سره، $\sin\hat{B}$ او $\cos\hat{B}$.

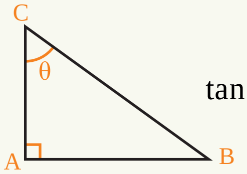
د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث د اضلاعو له مخې وليکئ.

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث د اضلاعو له مخې د $\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ نسبت وليکئ.
- د $\overset{\Delta}{BMN}$ مثلث څخه، په ګټې اخيستنې سره د اضلاعو له مخې $\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ وليکئ.

د $\overline{MN}, \overline{BC}, \overline{AC}$ او $\overline{BN}$ کرښو د مخامخ اندازه کولو په مرسته پورتني دوه نسبتونه سره پرتله کړئ.

- فکر وکړئ، که چېرې $\dfrac{CosB}{SinB}$ پيدا کړو، نو دا نسبت د مخامخ اضلاعو له اوږدوالي سره تړاو لري يا يوازې د زاويې په مقدار پورې تړاو لري؟

لومړۍ پايله: په يوه قايم الزاويه مثلث کې، د يوې حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی او د هغې زاويې د ګاونډې ضلعې د اوږدوالي نسبت، يو ثابت مقدار دی، چې (د حاده زاويې تانجنت) په نامه يادېږي.

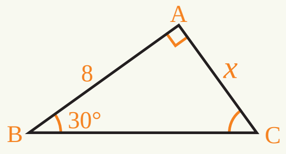


$$\tan\theta = \frac{\text{د } \hat{\theta} \text{ زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{د } \hat{\theta} \text{ زاويې د ګاونډې ضلعې اوږدوالی}} = \frac{AB}{AC}$$

دويمه پایله: د θ حاده زاويې تانجنت، د حاده زاويې ساين پر کوساين له نسبت سره مساوي دی:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

دريمه پایله: $\frac{Cos\theta}{Sin\theta}$ يو بل مقدار دی، چې د حاده زاويې کوتانجنت $(Cotangent\theta)$ يا د θ زاويې دګاونډی يا مجاورې ضلعې اوږدوالي، د θ زاويې د مخامخ څنډې يا مقابلې ضلعې پراوږدوالي ته کوتانجنت $Cot\theta$ وايي. دا نسبت، د نورو نسبتونو په څير يواځې د زاويې په پراخوالي پورې اړه لري.



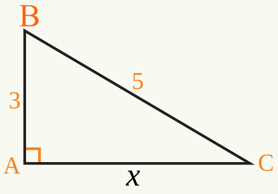
لومړی مثال: په لاندې مثلث کې، که $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ وي، د $\tan 30^\circ$ عددي قيمت په لاس راوړئ؟

حل: د $\tan\theta$ تعريف څخه په ګټې اخيستنې سره کولای شو وليکو، چې:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

دويم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلثې چې لاندې رسم شوی دی، په دې مثلث کې $\tan c, \cos c, \sin c$ او $\cot c$ په لاس راوړئ او د $\tan c$ رابطه د $\cos c$ او $\sin c$ نسبتونو سره پرتله کړئ؟

حل: لومړی د فيثاغورث د قضيې په مرسته، د ABC په مثلث کې، د AC اوږدوالی پيدا کوو.



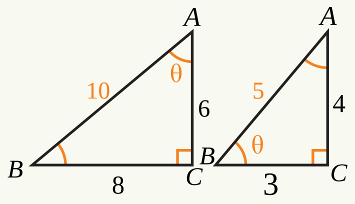
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\sin C = \frac{3}{5} \qquad \cos C = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan C = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot C = \frac{4}{3}$$

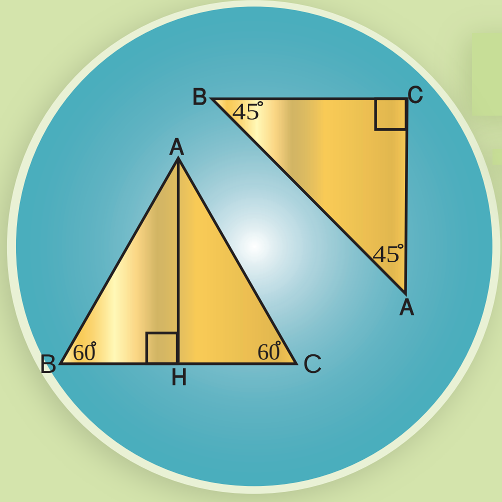
پوښتنې



1- په مخامخ شکلونو کې، $Sin\theta, Cos\theta, \tan\theta$ او $Cot\theta$ پیدا کړئ.

2- د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې، چې ضلعې يې سره مساوي دي، $\tan A$ او $\tan B$ پيدا کړئ؟

3- که د يوه قايم الزاويه مثلث قاعده ثابته وساتو او حاده زاويه يې لويه شي، د $\tan\theta$ په نسبت کې څه بدلون پيښيږي؟



د ځانګړو زاويو مثلثاتي نسبتونه
($30°$، $60°$، $45°$ او $90°$)

مخامـخ مثلثونه، څـه ډول مثلثونه دي، د اضلاعو اوږدوالى يې وټاکئ.

فعاليت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ يو متساوي الاضلاع مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AH}$ ارتفاع رسم کړئ، په دې ډول مثلثونو کې، ارتفاع کومې ځانګړتياوې لري؟
- د فيثاغورث له قضيې څخه په ګټې اخيستنې سره، د مثلث ارتفاع پيدا کړئ؟
- ايا کولاى شئ چې د 30° او 60° زاويو مثلثاتي نسبتونو عددي قيمت پيدا کړئ.
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ يو متساوي الساقين، قايم الزاويه مثلث رسم کړئ، چې د هرې ضلعې اوږدوالى يې يو واحدوي؟
- هره حاده زاويه څو درجې ده؟ ولې؟ د وتر د اوږدوالي اندازه يې حساب کړئ.
- د 45° زاويې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړئ؟

له پورتني فعاليت څخه، لاندې جدول جوړ ولاى شو:

زاويې / مثلثاتي نسبتونه	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ناټاکلى (نا معين)

مثال: په لاندې اړیکو (رابطو) کې، د x او y عددي قیمت پیدا کړئ.

1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$ 2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$

3) $\tan 60^\circ - \sin 30^\circ = ?$ 4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ$

5) $\tan 45^\circ - \sin 45^\circ = ?$ 6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ$

حل: په پورتنیو اړیکو کې، د هر مثلثاتي نسبت پر ځای، عددي قیمت وضع کوو:

1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

3) $x = \tan 60^\circ - \sin 30^\circ = \sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$

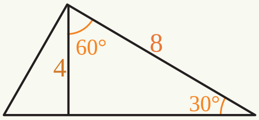
4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$

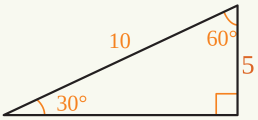
5) $x = \tan 45^\circ - \sin 45^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

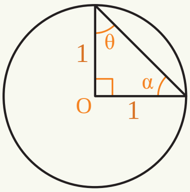
6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}$

پوښتنې

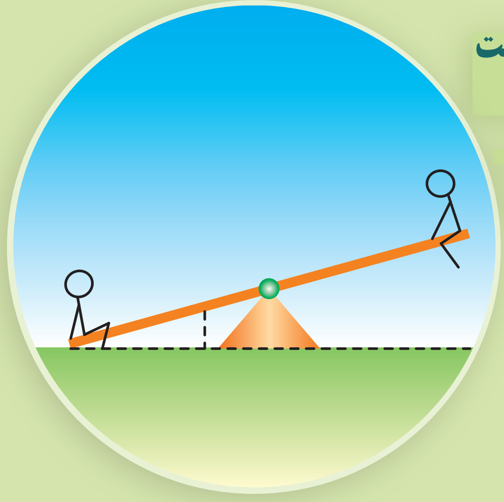
په لاندې شکلونو کې، د $30^o, 45^o$ او 60° زاویو، د $Sin, Cos, \tan$ او Cot مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.







د یوه مستقیم خط د میل او تانجنت اړیکه



د رافعې میل ښــی یا کیڼې خوا ته، په څه پورې اړه لري؟

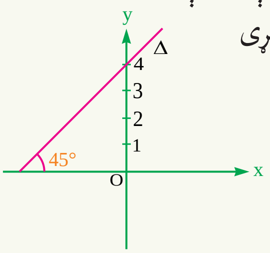
فعالیت

- د $B(0,0), C(1,0)$ او $A(1,3)$ ټکي، د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وښیاست، هغه مثلث چې راسونه یې له دې ټکو څخه جوړیږي، څه ډول مثلث دی؟ ولې؟
- د $\overline{AB}$ مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ.
- د $\overline{AB}$ مستقیمې کرښې معادله، د $y = mx + h$ په شکل ولیکئ.
- $\tan A$ په لاس راوړئ، د $\overline{AB}$ د مستقیمې کرښې له میل سره څه اړیکه لري؟
- د $\overline{AB}$ په مستقیم دوه اختیاري ټکي په پام کې ونیسئ، د دې ټکو په لرلوسره، د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ. ایا د $\tan B$ د مستقیمې کرښې د میل برابرې لیدل کیږي؟

له پورتني فعالیت څخه لیدل کیږي چې د هغې مستقیمې کرښې میل، چې د x له محور سره حاده زاویه جوړوي، د هغې زاویې له تانجنت سره، چې د کرښې او د x محور مثبت جهت سره یې جوړوي، برابره ده. د $y = mx + h$ معادله کې $m = \tan A$ دی.

لومړی مثال: د Δ مستقیمه کرښه، د y محور په 4 کې پریکوي او د x محور، له مثبت لوري سره 45° زاویه جوړوي، که $\tan 45^o = 1$ وي، د Δ مستقیمې کرښې معادله ولیکئ؟

حل: پوهیږو، چې د مستقیمې کرښې معادله $y = mx + h$ ده، نو لومړی د مستقیمې کرښې میل په لاس راوړو:



$$\left.\begin{array}{l} m = \tan\theta \\ m = \tan 45^o \\ m = 1 \\ h = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = mx + h \\ y = x + 4 \end{array}$$

دویم مثال: د $\sqrt{3}y - x = 2\sqrt{3}$ مستقيمې کرښې په معادله کې، د مستقيمې کرښې ميل، د ميل زاويه او د y له محور سره د پرېکړې ټکې په لاس راوړئ؟

حل: لومړی د مستقيمې کرښې معادله، په ستندرد شکل $y = mx + h$ بدلوو، چې وروسته يې ميل او له محور سره د پرېکړې ټکې، په اسانۍ سره پيدا کولای شو.

$$\sqrt{3}\,y - x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\,y = x + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$$

$$m = \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ \qquad , \qquad h = 2$$

ايا کولای شئ د فيثاغورث د قضيې او مثلثاتي ترمنځ اړيکه پيدا کړئ.

فعاليت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ يو قايم الزاويه مثلث، چې قايمې جوړوونکې ضلعې يې 6 او 8 دي رسم او قايمه زاويه يې په A وښيئ؟
- $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ او $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ حساب کړئ؟
- $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ او $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ د AC, AB او BC اضلاعو له جنسه وليکئ، څه پايله ترې اخلئ.

له پورتني فعاليت څخه ښکاري، چې د يوې حاده زاويې د ساين او کوساين د مربعاتو جمع، مساوي له 1 سره ده. $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

ځينې وخت د مثلثاتي نسبت، د توان علامه، په لاندې ډول سره ښودل کېږي.

$$(\sin A)^2 = \sin^2 A$$

پاملرنه وکړئ، چې د 2 توان د زاويې په ساين پورې اړه لري، نه په زاويه پورې $SinA^2 \neq Sin^2 A$

پوښتنې

1- د هغې مستقيمې کرښې معادله په لاس راوړئ، چې د x محور له مثبت جهت سره 60° زاويه جوړه کړي او د y محور په $(0,5)$ ټکي کې پرې کړي.

2- د $y = x + 4$ کرښې په معادله کې، ميل، د ميل زاويه او د y له محور سره د پرېکړې ټکې پيدا کړئ.

3- ثبوت يې کړئ:

a) $\dfrac{(\sin\theta + \cos\theta)^2}{1 + 2\sin\theta\cos\theta} = 1$

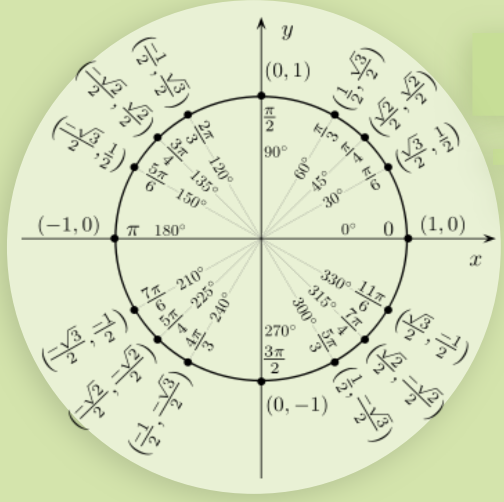
b) $1 + (\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta})^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

c) $\dfrac{\tan^2\theta - \sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \times \tan^3\theta$

d) $\dfrac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{2\sin A} = \cos A$

e) $\sin^4 A + \cos^2 A \times \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

مثلثاتي جدول او دهغه استعمال



د مخامخ شکل په مثلثاتي دايرې کې، د نومورو زاويو مثلثاتي نسبتونه ښودلای شئ؟

فعاليت

- يو متساوي الاضلاع مثلث رسم کړئ او د هرې زاويې پراخوالی يې وټاکئ؟
- په يو مثلث کې، د 30° او 60° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ؟
- د زاويې مثلثاتي نسبتونه، په يوه مثلث کې وټاکئ؟
- ايا د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه، په پورته شکل پيداکولای شو؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

پايله:

د ځينوزاويو مثلثاتي نسبتونه کولای شو، په اسانی سره په لاس راوړوی، خو د يو شمېر نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو محاسبه، ګران کار دی، نو ددې کار لپاره، د ځينو پوهانو له خوا مثلثاتي جدولونه، د خاصو فورمولونو په واسطه جوړ شوی چې ددې ډول جدول په مرسته، د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه پيداکولای شو.

د يادونې وړ ده، چې د جدول په ترتيب کې، په يوه قايم الزاويه مثلث کی، د θ او $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ يا $(90-\theta)$ زاويو له اړيکو ځخه ګټه اخيستل شوې ده.

مثلثاتي جدول:

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
0° 00′	0.0000	1.0000	0.0000	∞	90° 00′
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.77	50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.89	40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.59	30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.940	20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.750	10
1° 00′	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	89° 00′
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.104	50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.964	40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.188	30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.368	20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.242	10
2° 00′	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	88° 00′
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.432	50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.542	40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.904	30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.470	20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.206	10
3° 00′	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	87° 00′
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.075	50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.169	40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.350	30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.605	20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.924	10
4° 00′	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	86° 00′
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.727	50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.197	40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.706	30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.251	20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.826	10
5° 00′	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	85° 00′
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.059	50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.712	40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.385	30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.078	20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
6° 00′	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84° 00′
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00′	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83° 00′
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30′	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30′
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00′	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82° 00′
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00′	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81° 00′
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	10
10° 00′	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80° 00′
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	10
11° 00′	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79° 00′
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
12° 00′	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	78° 00′
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	10
13° 00′	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	77° 00′
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	10
14° 00′	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	76° 00′
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	10
15° 00′	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	75° 00′
10	0.2616	0.9652	0.2711	3.6891	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.6470	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.6059	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.5656	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.5261	10
16° 00′	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	74° 00′
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.4495	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.4124	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.3402	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.3052	10
17° 00′	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	73° 00′
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.2371	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.2041	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.1397	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.1084	10
18° 00′	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	72° 00′
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.0475	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.0178	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.9600	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.9319	10
19° 00′	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	71° 00′
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.8770	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.8502	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.7980	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.7725	10
20° 00′	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	70° 00′
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.7228	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.6985	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.6511	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.6279	10
21° 00′	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	69° 00′
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.5826	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.5605	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.5172	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.4960	10
22° 00′	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	68° 00′
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.4545	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.4342	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30
30′	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30′
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.3945	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.3750	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
23° 00′	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	**67°** 00′
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	10
24° 00′	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	**66°** 00′
10	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	50
20	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	40
30	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	30
40	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	20
50	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	10
25° 00′	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	**65°** 00′
10	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	50
20	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	40
30	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	30
40	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	20
50	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	10
26° 00′	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	**64°** 00′
10	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	50
20	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	40
30	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	30
40	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	20
50	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	10
27° 00′	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	**63°** 00′
10	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	50
20	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	40
30	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	30
40	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	20
50	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	10
28° 00′	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	**62°** 00′
10	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	50
20	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	40
30	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	30
40	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	20
50	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	10
29° 00′	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	**61°** 00′
10	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	50
20	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	40
30	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	30
40	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	20
50	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	10
30° 00′	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	**60°** 00′
10	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	50
20	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	40
30	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	30
40	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	20
50	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	10
31° 00′	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	**59°** 00′
10	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	50
20	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	40
30	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	30
40	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	20
50	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	10
32° 00′	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	**58°** 00′
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	10
33° 00′	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	**57°** 00′
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
34° 00′	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	**56°** 00′
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	10
35° 00′	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	**55°** 00′
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10
36° 00′	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	**54°** 00′
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10
37° 00′	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	**53°** 00′
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	10
38° 00′	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	**52°** 00′
10	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	10
39° 00′	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	**51°** 00′
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	10
40° 00′	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	**50°** 00′
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	10
41° 00′	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	**49°** 00′
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	10
42° 00′	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	**48°** 00′
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	10
43° 00′	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	**47°** 00′
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	10
44° 00′	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	**46°** 00′
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	10
45° 00′	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	**45°** 00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

فعالیت

- د جدول لومړۍ پرته لیکه یا سطر او ولاړه لیکه یا ستون څه راښیي؟
- د جدول د کیڼې او ښۍ خوا لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون په کومه زاویه پیل او په کومه زاویه ختم شوی دی؟
- د جدول لومړۍ او وروستۍ کرښه څه را ښیي؟
- که یوه زاویه 45° او یا له هغه څخه کوچنۍ وي، هغه د جدول کیڼه خوا کې د درجې په ستنو کې پیدا کوو او مثلثاتي نسبت یې، له پورته خوا څخه لولو یا له ښکته خوا څخه او که زاویه له 45° څخه لویه وي، څه کوو؟

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

که زاویه له 45° څخه کوچنۍ وي، هغه دجدول د کیڼې خوا په لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون کې، او مثلثاتي نسبت یې، په پورته خوا لومړۍ پرته لیکه یا سطر کې ګورو.

که زاویه له 45° څخه لویه وي، هغه زاویه د جدول دښۍ خوا په لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون کې، او مثلثاتي نسبت یې، له ښکته خوا څخه پورته خوا ته په وروستنۍ پرته لیکه یا سطر کې پیدا کوو، چې د پام وړ زاویې د اړوند کرښې او د مثلثاتي نسبت د اړوندې ولاړې لیکې یا ستون پرېکړه د زاویې مطلوب نسبت راکوي.

لومړی مثال: د $30^\circ\ 10'$ کوساین پیدا کړئ.

حل: لومړی د جدول له کیڼې خوا، په لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون کې، مطلوبه زاویه $(30^\circ 10')$ پیدا کوو او د جدول په لومړۍ کرښه(سطر) کې مطلوب مثلثاتي نسبت پیدا کوو، ددې ولاړې او پرتې لیکې(سطر اوستون) پرېکړه، د 0,8646 عدد راکوي چې دا د $(30^\circ 10')$ زاویې کوساین دی.

$$\cos(30^\circ 10') = ?\qquad 30^\circ 10' \cdots\cdots 0{,}8\ 6\ 46$$

(ستون: °، cos)

دویم مثال : د $84^\circ\ 50'$ ساین وټاکئ؟

حل: لومړی د جدول د ښۍ خوا په لومړي ستون کې، د پام وړ زاویه $84^\circ\ 50'$ پیدا کوو او د جدول په وروستنۍ کرښه(سطر) کې د پام وړ مثلثاتي نسبت پیدا کوو، ددې پرتې او ولاړو لیکو(سطر او ستون) پرېکړه، د (0,9959) عدد راکوي، چې د $84^\circ\ 50'$ زاویه کوساین دی.

$$\sin 84^\circ\ 50' = ?\qquad 0.9959\ldots\ldots\ldots 84^\circ\ 50'$$

(ستون: sin)

يادونه

هغه جدول، چې تر اوسه مو ترې کار واخست د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه، چې توپير يې لس دقيقې وي، راښيي د هرې زاويې مثلثاتي نسبت، د دې جدول په مرسته نه شو ټاکلی، نو اوس غواړو، داسې طريقه بيان کړو، چې ددې جدول په مرسته د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړو، چې دا طريقه د انټرپوليشن Interpolation په نامه يادېږي او په لاندې مثالونو کې يې ترې کار اخلو:

دريم مثال: د $\tan 42^\circ 35'$ زاويې تانجنت په لاس راوړئ.

حل: په جدول کې د $42^\circ 35'$ زاويې تانجنت نشته، خو د $42^\circ 40'$ او $42^\circ 30'$ زاويو تانجانتونه شته دی، چې د هغوی په مرسته، $42^\circ 35'$ زاويې مثلثاتي نسبت داسې پيداکوو:

$$\left.\begin{array}{l}\tan\ 42^\circ 40' \\ \tan\ 42^\circ 35' \end{array}\right]5 \qquad \left.\begin{array}{l}\tan\ 42^\circ 40' = 0,9217 \\ 10 = x \\ \tan\ 42^\circ 30' = 0,9163\end{array}\right]0,0054$$

د مثلثاتي نسبتونو توپير		د دو زاويو توپير
0.00054	:	10'
x	:	5'

ليدل کيږي، چې د لومړی او دويمې زاويې فرق 5 او د لومړې او دريمې زاويې توپير، 10 دی. په همدې ترتيب سره، د tan فرق يې x او 0,0054 دی. يعنې که زاويه د 10 په اندازه توپير ولري، نو tan يې د 0,0054 په اندازه فرق کوي او که زاويه د 5 په اندازه توپير وکړي نو tan د x په اندازه فرق کوي، چې د تناسب په مرسته ليکو:

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0,0054} \Rightarrow x = 0,0027$$

د x قيمت، د کوچنې زاويو له tan سره جمع کوو:

$$0,9163 + 0,0027 = 0,9190$$

$$\tan\ 42^\circ\ 35' = 0,9190$$

پوښتنې

له مثلثاتي جدول څخه په ګټې اخيستنې سره، د $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ مثلثاتي نسبونه، د $\alpha = 35^\circ 20'$ او $\alpha = 75^\circ 10'$ زاويو پيدا کړئ.

د قایم الزاویه مثلثونو حل

مخامخ شکل ته پام وکړئ، د خلي(منار)
جګوالی څنګه پیدا کولی شئ؟

فعالیت

- که دیوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه $30^{\circ}\ 40'$ وي، بله زاویه یې پیدا کړئ.
- که د یوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه 29° او وتر یې $25cm$ وي، د مثلث مجهول عناصر پیدا کړئ.
- که د قایم الزاویه مثلث دوې ضلعې یا یوه ضلعه او یوه حاده زاویه یې معلومه وي، د مثلث نور عناصر، څنګه پیدا کولای شو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په هر قایم الزاویه مثلث کې، که یوه حاده زاویه یا دوه ضلعې معلومې وي، د مثلث پاتې اجزاوې، د مثلثاتي توابعو په مرسته په لاس راوړو.

مثال: دیوه قایمه الزاویه مثلث یوه حاده زاویه، 40° ، که ددې زاویې مجاوره ضلعه، 120 واحده د اوږوالي وي، نوموړی مثلث حل کړئ؟

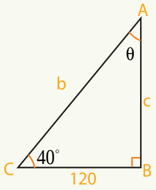
حل: څرنګه چې، د مثلث یوه زاویه او دوه ضلعې نا معلومې وي، نو ددې معلومو اجزاوو په مرسته، نا معلومې اجزاوې په لاندې ډول په لاس راوړو:

1, $\theta = 90^{\circ} - \hat{c} = 90^{\circ} - 40^{\circ} = 50^{\circ}$

2, $\tan 40^{\circ} = \dfrac{c}{120} \Rightarrow c = 120\tan 40^{\circ} = 120 \cdot 0{,}8391 = 100{,}692$

3, $\cos 40^{\circ} = \dfrac{120}{b} \Rightarrow b = \dfrac{120}{\cos 40^{\circ}} = \dfrac{120}{0{,}7660} = 156.6579$

$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{(120)^2 + (100{,}692)^2} = 197{,}3635$



دویم مثال: د یوه قایمه الزاویه مثلث وتر $49.7cm$ او یوه قایمه ضلعه يې $25cm$ وي نوموړی مثلث حل کړئ.

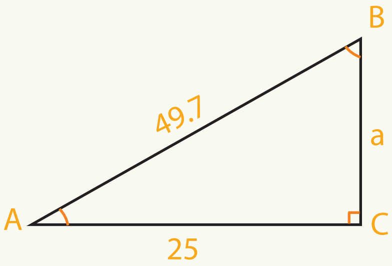
حل: لیدل کېږي، چې د مثلث دوه عناصر معلوم وي، نو نا معلوم عناصر يې داسې پیدا کوو:

$$1)\cos\hat{A} = \frac{25}{49,7} = 0,503$$

$$\cos\hat{A} = 0,503 \quad \Rightarrow \hat{A} = 59,8^\circ = 59^\circ,48'$$

$$2)B = 90^\circ - \hat{A} \quad \Rightarrow B = 90 - 59,8^\circ = 30,2^\circ = 30^\circ 12'$$

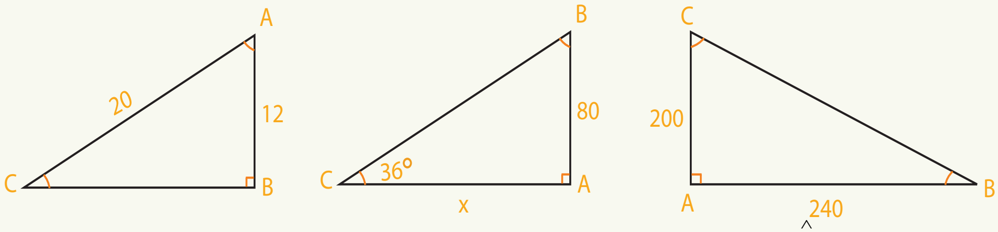
$$3)\tan\hat{A} = \frac{a}{25} \quad \Rightarrow a = \tan\hat{A} \cdot 25 = 25 \cdot 1,7182 = 43$$



پوښتنې

1 - د یوه قایمه الزاویه مثلث یوه حاده زاویه $38^\circ\ 50'$ او د دې زاويې مجا وره ضلعه 311 واحده ده، نو موړی مثلث حل کړئ.

2 - په لاندې شکلونو کې مجهول عناصر وټاکئ.

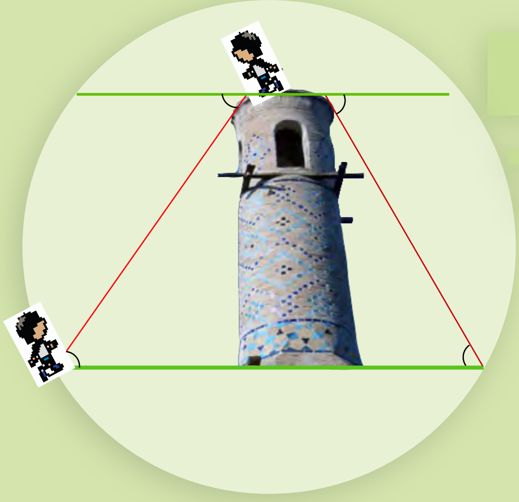


$x = ?$ $\hat{A} = ?$

$x = ?$ $\hat{B} = ?$

$\hat{B} = ?$ $\overline{BC} = ?$

د میل یا ارتفاع او تنزیل زاویې



مخامخ شکل ته پام وکړئ، د میل
او تنزیل زاویې وښیاست؟

فعالیت

• که احمد په یو جګوالی پروت وي، دلید کرښه له افقي سطحې سره، څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نوم یا دېږي(د تحول ساحه یې کومه فاصله ده) ؟
• که یو شی په یوه ښکته ځای کې پروت وي، دلید کرښه له افقي سطحې سره څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نامه یادېږي(د تحول ساحه یې په کومه فاصله ده) ؟

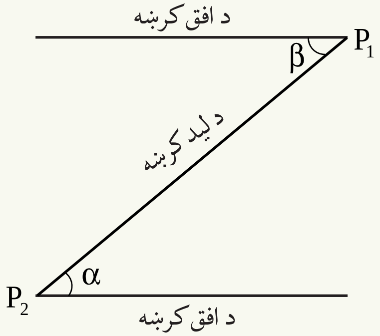
دپورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

1 - د ارتفاع زاویه (Angle of Elevation)

که یو شی په یوه ارتفاع پروت وي، نو دلید کرښه له افق سره یوه زاویه جوړوي، چې د جګوالي زاویه بلل کېږي، لکه: ورکړل شوي شکل کې د α زاویه.

2 - د تنزیل زاویه (Angle of Depression)

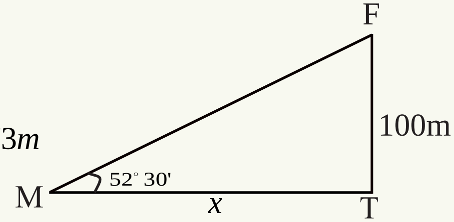
که یو شی په ټیټ ځای کې، پروت وي، د لید کرښه، له شي سره یوه زاویه جوړوي چې د تنزیل زاویه بلل کېږي لکه په شکل کې د β زاویه.



لومړی مثال: د $\overset{\Delta}{MFT}$ قایمه الزاویه مثلث کې، د جګوالي یا ارتفاع زاویه $52°\ 30'$ ده که د مثلث جګوالی $100m$ وي، د مثلث وتر او قاعده یې پیدا کړئ.

$$\tan 52°30' = \frac{\overline{TF}}{\overline{MF}} = \frac{100}{X}$$

$$x = \frac{100}{\tan 52°30'} = \frac{100}{1.3092} \Rightarrow x = 76.73m$$



دویم مثال: د یوه کاغذ پران(پتنګ) د تار اوږد دوالی 120m وي، ددې کاغذ پران(پتنګ) د جګوالي یا ارتفاع زاویه 45° ده، د کاغذ پران(پتنګ) جګوالی وټاکئ.

$$\frac{h}{120} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = 60 \cdot \sqrt{2}m$$

دریم مثال: یو نوري(ترسد) برج، له سمندر څخه $120\ f$ جګوالی لري، هغه نزولي زاویه، چې د برج نه یوه بېړۍ(کښتۍ) لیدل کېږي، $15°$ درجې ده، نوموړې بېړۍ له برج نه څومره فاصله لري؟

$$\cot A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$\cot 15 = \frac{\overline{AC}}{120}$$

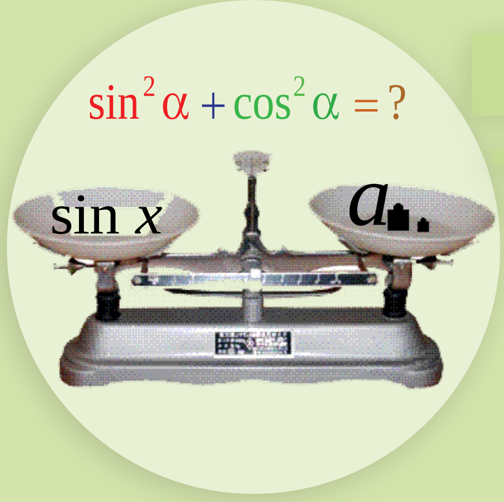
$$\Rightarrow \overline{AC} = 120 \cdot \cot 15° = 120 \cdot 3,7 = 444\ ft$$

پوښتنې

1- د هغې ونې ارتفاع پیدا کړئ، چې د ارتفاع زاویه یې، له $20°$ څخه، $40°$ واوړي، نو په هغه حالت کې به لیدونکی $75\ ft$ ونې ته نږدې شي.

2- یوه ونه، باد له پورته خواڅخه داسې ماته کړې، چې د ونې تنه او ماته برخه یې، یو قایمه الزاویه مثلث له ځمکې سره جوړه کړي، که ماته برخه له ځمکې سره $50°$ زاویه جوړه کړې وي او د ونې تنه $20\ ft$ وي، د ونې جګوالي پیدا کړئ.

مثلثاتي معادلې



مخامخ مثلثاتي اړیکې، له څه سره مساوي دي روښانه یې کړئ؟

پوهېږو، چې مطابقت هغه مساوات دی، چې د متحول د ټولو قیمتونو لپاره، د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي او معادله هغه مساوات دی، چې د متحول د ځینو بیو لپاره، د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي.

فعالیت

- د فیثاغورث د قضیې او مثلثات ترمنځ اړیکه وښیئ، ایا دا اړیکه، مطابقت دی که معادله؟
- مطابقت او معادله څه تو پیر لري، دا توپیر په مثلثاتي اړیکو کې وڅیړئ.
- د $\sin x = 1$ رابطه کې، x مجهول دی که $\sin x$

د پورته فعالیت پایله، په یو، تعریف کې په لاندې ډول بیانوو:

تعریف:

هره معادله چې، په هغې کې یو یاڅو مثلثاتي نسبتونه ګډون ولري، مثلثاتي معادله بلل کېږي، لکه: $\sin x - 1 = 0$ یا $2\cos x - 1 = 0$

- هغه قوس یا زاویه، چې د هغې مثلثاتي نسبت مطلوب وي، اصلي مجهول بلل کېږي، لکه: په پورتنیو معادلو کې x اصلي مجهول دی.

- د اصلي مجهول مثلثاتي نسبت ته، فرعي مجهول وايي، لکه په پورتنیو معادلو کې $\cos x$ او $\sin x$ فرعي مجهول دي.

د مثلثاتي معادلو د حل لپاره، په لاندې ډول عمل کوو:

1 - د الجبري معادلو د حل په مرسته، د فرعي مجهول قیمت په لاس راوړو.

2- د مثلثاتي نسبتونو د جدول په مرسته، د اصلي مجهول قیمت په لاس راوړو.

3- څرنګه چې، مثلثاتي معادلې پریودیک معادلې دي چې نو ډېر حلونه لري، نو د هغو زاویو د فورمولونو په مرسته، چې یو ډول نسبتونه لري، د معادلې حلونه دي.

مثال: د $2\sin x - \sqrt{2} = 0$ او $\cos x + \frac{1}{2} = 1$ مثلثاتي معادلو حلونه پیدا کړئ.

$$2\sin x - \sqrt{2} = 0 \qquad \cos x + \frac{1}{2} = 1$$

$$2\sin x = \sqrt{2} \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \qquad x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$x = n\pi + (-1)^n (\frac{\pi}{4}) \ , (n = 0,1,2,...) \qquad x = 2n\pi \pm \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د دې لاندې معادلو حل پیدا کړئ.

$a)$ $\sqrt{3}\cot x - 1 = 0$ $\quad b)$ $2\sin 3x + \sqrt{3} = 0$ $\quad c)$ $2\cos 4x - \sqrt{2} = 0$

د څلورم څپرکي لنډيز:

- مثلثات له دوو يوناني کلمو ټرايگون او متري څخه چې د مثلث د اندازه کولو معنی لري، جوړ شوی دی او له هغه علم څخه عبارت دی، چې د مثلث د عناصرو ترمنځ اړيکي څېړي.
- که د مثلث له يوې ضلعې يوه موازي کرښه رسم شي، پرېکړې ضلعې په مناسبو ټوټو وېشي دا قضيه د تالس د قضيې په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې، د حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی، دوتر په اوږدوالي او د حاده زاويې د ساين sine په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې، د حاده زاويې د ګاونډۍ يا مجاورې ضلعې اوږدوالی، د وتر په اوږدوالي، د حاده زاويې د کوساين cosine په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې، د حاده زاويې د مخامخ څنډۍ يا ضلعې اوږدوالی، د ګاونډۍ يا مجاورې څنډې يا ضلعې په اوږدوالي، د حاده زاويې د تانجنت tangent په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې، د حاده زاويې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ نسبتونو نسبت، د حاده زاويې د $\tan\theta$ په نامه يادېږي $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې، د حاده زاويې د $\cos$ او $\sin$ نسبتونو نسبت، د حاده زاويې د $\cot$ په نامه يادېږي $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$.
- هغه زاويه، لکه (α) چې مستقيمه کرښه يې، د x محور له مثبت جهت سره جوړوي، د ميل زاويې په نامه يادېږي او د دې کرښې ميل، د $\tan\alpha$ سره مساوي ده $m = \tan\alpha$.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې، د $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ اړيکه رېښتياده.
- د $\sin x, \cos x$ او $\tan x$ مثلثاتي نسبتونه، پرته له زاويې معنا نه لري.
- د $y = mx + b$, m په معادله کې، m دهغې زاويې تانجنت دی، چې مستقيمه کرښه يې، د x محور له مثبت جهت سره جوړوي او h د y له محور سره د پرېکړې ټکی دی.
- $Sin30^o$ له $Cos60^o$ سره برابر دی.
- $Cos30^o$ له $\sin 60^o$ سره برابر دی.
- $Cos45^o$ له $Sin45^o$ برابر دی.

د څلورم څپرکي پوښتنې

• په لاندې سوالونو کې، هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، چې یو یې سم دی. سم ځواب په نښه کړئ:

1- د يوې حاده زاويې $\sin\alpha$ عبارت دی له:

a) $\dfrac{\text{د حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}}$

b) $\dfrac{\text{دوتر اوږدوالی}}{\text{د حاده زاويې دګاونډي (مجاوري) ضلعې اوږدوالی}}$

c) $\dfrac{\text{د حاده زاويې دګاونډی (مجاوري) ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}}$

d) $\dfrac{\text{دوتر اوږدوالی}}{\text{د حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}$

2- د $\tan x$ نسبت مساوي دی، په:

a) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ b) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ c) $\dfrac{1}{\sin x}$ d) $\dfrac{1}{\cos x}$

3- د $2y = 2x - 3$ په معادله کې د مستقیمې کرښې میل عبارت دی، له:

a) $\dfrac{3}{2}$ b) -1 c) 1 d) a او b

4- د هغې مستقیمې کرښې معادله چې د y محور په (۳ ، ۰) کې پرېکړي او د x محور له مثبت جهت سره 45° زاويه جوړه کړي، عبارت ده، له:

a) $y = x + 3$ b) $2y = 2x - 3$ c) $2x - y = 0$ d) هیڅ یو

5- د $\sin^2 30 + \cos^2 30$ افادې قیمت مساوی دی، له:

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1

6- $\sin 45^o$ او $\cos 45^o$ مساوی دی، له:

a) 1 b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

7- د $\dfrac{\sin 30^o - \cos 60^o}{\cos 60^o + \sin 30^o}$ افادې قیمت عبارت دی، له:

a) 0 b) 1 c) -1 d) درې واړه ځوابونه سم دي.

• تش ځایونه په مناسبو بیانونو ډک کړئ:

1- په یوه قایم الزاویه مثلث کې، د دوو نورو حاده زاویو مجموعه .... ده.

2- که د یوه متساوي الضلاع مثلث یوه څنډه $10cm$ وي، جګوالی یې............... دی.

3- په هر قایمه الزاویه مثلث کې، د یوې حاده زاوې ساین عبارت دی له......................

4- Triganomitry له دوو کلمو............... او .... څخه جوړه شوې ده.

5- $\tan\theta \cdot \cot\theta$ مساوي په .... دی.

• له لاندې جملو څخه، کومه سمه او کومه ناسمه ده، دسمې په مخ کې د (س) توری او د ناسمې په مخ کې د (ن) توری ولیکئ؟

1- (   ) د $\sin x$ نسبت، مساوي په $\dfrac{\text{د مخام ضلعې اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}}$ دی.

2- (   ) $\sin 30^o$ او $\cos 60^o$ یو بل سره مساوي دي.

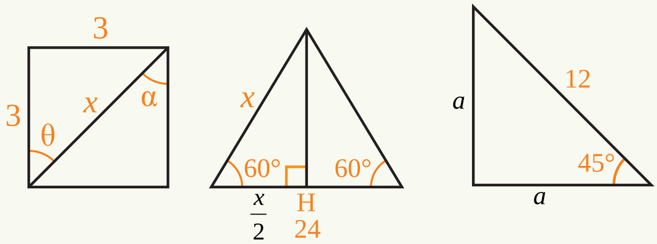
3- (   ) د $2y = 5x - 1$ معادله کې، د دې کرښې میل $\dfrac{2}{5}$ دی.

4- (   ) د $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ نسبت د $\tan\theta$ سره برابر دی.

5- (   ) $1+\cos^2\theta$ برابر په $\sin^2\theta$ دی.

• لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- په لاندې شکلونو کې د ورکړ شوو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟



2- په لاندې پوښتنو کې د A او B قیمتونه حساب کړئ:

1) $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$

2) $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$

3) $A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$

4) $B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$

5) $A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$

6) $B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$

7) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

8) $B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$

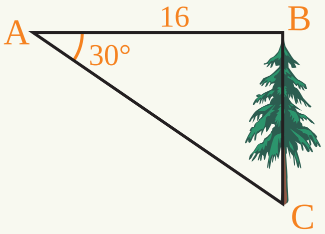
9) $A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

3- که $\sin x = \frac{7}{12}$ وي $\cos x$ او $\tan x$ پیداکړئ.

4- که $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي $\sin x$ او $\tan x$ پیداکړئ.

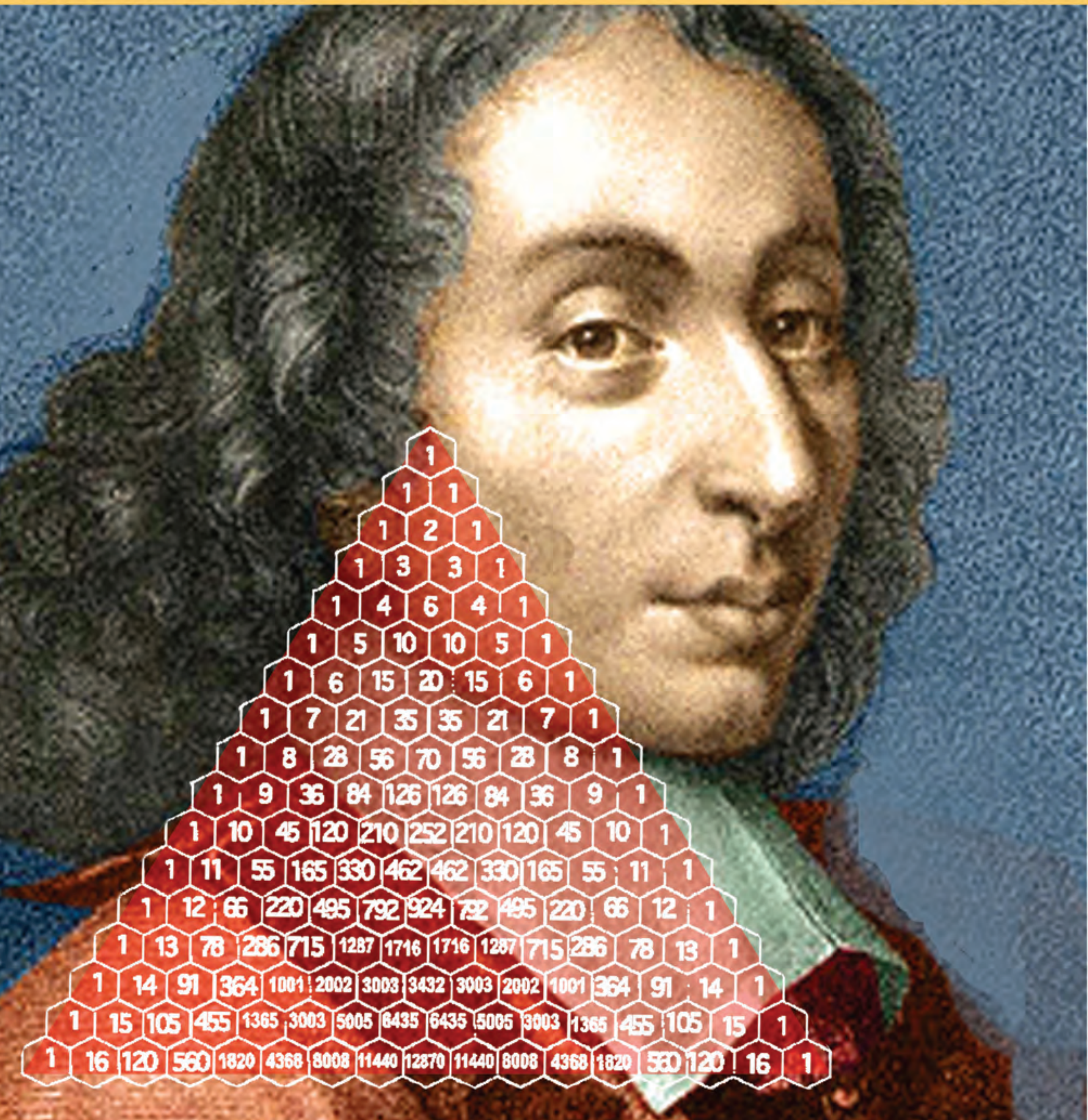
5- که چېرې α زاویه، صفر ته نږدې شي، $\tan \alpha$ کوم عدد ته نږدې کیږي، د شکل له مخې، د خپلې وینا سموالی وښیئ.

6- په لاندې شکل کې، که $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي، د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ واټنونه حساب کړئ.

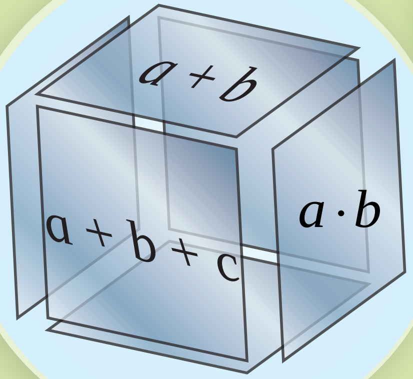


پنځم څپـــرکی

څو جمله يي


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

څوجمله يي ګانې(الجبري افادې)



د مخامخ شـکل په سطحو، د ليکل شويو الجبري افادو نومونه واخلئ.

فعاليت

لاندې افادې په پام کې ونيسئ:

$a)\ \ 2x \qquad b)\ \frac{1}{3}xy^3 \qquad c)\ \sqrt{2}xym^t \qquad d)\ \ 9x^2$

$e)\ 5x \qquad f)\ 2xy^3 \qquad g)\ 3x^2 \qquad h)\ \frac{4x^2}{x-1}$

- يوبل ته ورته افادې په نښه کړئ؟
- لاندې الجبري افادې، تر ممکن حده پورې ساده کړئ.

$a)\, 2x+6x^2+\sqrt{2}xym^4 \qquad b)\ 3x^2+6x^2 \qquad c)\, \frac{1}{3}xy^3+2x \qquad d)\ \frac{1}{3}xy^3+2xy^3$

- هغه افادې، چې نه شي ساده کيدای،څنګه بايد وليکل شي، د هرې يوې لپاره، دکومو نومونو وړانديزو نه کوئ؟
- په هرحالت کې، د افادو تر ټولو لوړ توان، نسبت x ته وټاکئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو، وليکوچې:

که چيرې په يوه الجبري افاده کې، د مشابه جملو له ساده کولوڅخه وروسته، يوازې يوه جمله ولرئ، هغې ته يوه جمله يي،(Monomial)، که جمع يا تفريق د دووجملوولرو، هغې ته دوه جمله يي يا (Bionomial)، که جمع يا تفريق ددرېوجملوولرو، هغې ته درې جمله يي يا (Trinomial) اوکه له درېوجملوڅخه زياتې جملې ولرو، څوجمله يي يا(Polinomila) په نامه يادېږي. په هره الجبري افاده کې، تر ټولو لوړ توان نسبت يوه ځانګړې متحول ته د الجبري افادې درجه، نظر هغه متحول ته بلل کيږي.

مثال: لاندې جدول بشپړکړئ.

الجبري افادي	مناسبې نومونې				درجه	
	خو جمله يي	درې جمله يي	دوه جمله يي	يوه جمله يي	نظر y ته	نظر x ته
$\sqrt{32}\,y^2 - 3y + 2y^3$						
$3x^2 - 7x$			✓			2
$6x^2 - 4x - 1$						
$0.4x^2y - 2x^4 + 16y^2$						
$13x - 2y^3 + 6x^3y$						
$\frac{2x-4}{x}$						
$3 - 5 + x^2 - y^3 - 2xy$						
$4x^2 - 2x + 6x^2 - 5x$						

پوښتنې

1- لاندې الجبري افادې، ساده اود هرې يوې درجه، نسبت هرمتحول ته وټاکئ.

a) $x^2 - 3x + 6x^2 - \frac{3}{2}x$

b) $\sqrt{2}mn^2 - \frac{1}{2}m + 2\sqrt{2}n^2m + 3m$

c) $-4x^2 + 2x^2 + 14x - 8 + 4x^3 - 16x - 2x^2$

d) $4 - x^3y - 2 + yx^3 - 4xy - 1$

2- لاندې الجبري افادې، څوجمله يي دي، دهرې يوې درجه، نسبت هر متحول ته وټاکئ.

a) $6x^2 - 4x - 12xy^6 - 2x^5$

b) $8x^6 - 4xy^6 - 5x^2$

c) $6x^2y^6m^9$

d) $\sqrt{3}x - y + 6x^2y^3 - 2y^2$

e) $3pq^3 - 8p^4q^3 - 12q^4 - 0.5p^6$

f) $\frac{4m-2n}{2m-n}$

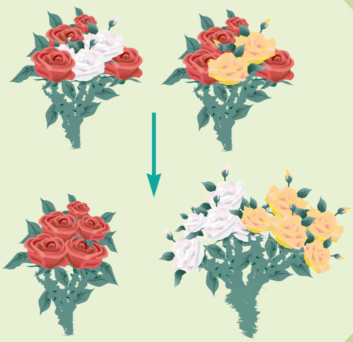
3- د B, A او C په افادوکې ورته حدود وښياست اوافادې ساده کړئ.

$A = 4xy + 2x^2y - 3xy^2 - \sqrt{2}xy - 0.5x^2y - \frac{1}{2}xy^2$

$B = \frac{4}{3}a^2b - a^2 + b^2 - 0.7a^2b - 2a^2 - 3b^2 + xy$

$C = 2\sqrt{8x} + \sqrt{2} - 3\sqrt{8x} + \sqrt{32}$

په فکتورونو تجزيه(فکتور نيونه)



په مخامخ شکل کې، څو غونچې ګلونه وينئ؟
کومې غونچې، يو بل ته ورته دي؟ يوه غونچه له
څو ګلانو څخه جوړه ده؟

فعاليت

• تش ځايونه ډک کړئ.

$$5x = (.......+......)\,x = ...x + ...x$$

$$6y = (......+......)y = ...y + ...y$$

• په پاسنيو اړيکو کې، له کومې ځانګړتيا څخه ګټه اخيستل شوې ده؟

• د ښي اړخ عددي ضريبونه، د کيڼ اړخ د متحولينو له ضريبونوسره څه اړيکه لري؟

$$3x + 2x = (........+...........)x = ...x$$

$$ax + bx = (..........+..........)x = ...x$$

• ايا کولای شو چې $a + b$ ساده کړو؟

په پور تني فعاليت کې ليدل کيږي، چې:

د ځينوالجبري افادو په تجزيه کې کولای شو، چې د ضرب د توزيعي خاصيت څخه پرجمع باندې ګټه واخلو. د ګډعامل په پيژندلوسره، په افاده کې کولای شو، الجبري افادې تجزيه کړو.

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزيه کړئ.

a) $ab + ac - ad$ b) $x^4 - x^3y + x^2y^2$

c) $\frac{1}{2}m^2 - 2m$ d) $3xy - 6x^2$

حل:په راکړل شويوافادوکې، لومړی په ټولوحدونو کې ګډ حد پيدا کوو او هغه له قوس مخکې ليکو، وروسته ټول حدونه بېل بېل په جمله وېشو اوحاصل يې، دقوس په منځ کې ليکو:

$$a)\quad ab+ac-ad \quad = a(b+c-d)$$
$$b)\quad x^4-x^3y+x^2y^2 = x^2(x^2-xy+y^2)$$
$$c)\quad \frac{1}{2}m^2-2m \quad = m(\frac{1}{2}m-2)$$
$$d)\quad 3xy-6x^2 \quad = 3x(y-2x)$$

دويم مثال: لاندې الجبري افادې تجزيه کړئ.

$a)\ Ax+Bx+Ay+By$ $\quad$ $b)\ x^2-4y^2+x+2y$

$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$ $\quad$ $d)\ 2x-2y+2x+2y$

حل: لومړی افاده داسې ترتيبوو، چې ورته حدونه څنګ پر څنګ راشي او وروسته دافادې ګډ حدود پيداکوواوبيا يې تجزيه کوو:

$$a)\ \underbrace{Ax+Bx}_{x}+\underbrace{Ay+By}_{y}$$
$$= x(A+B)+y(A+B)$$
$$= (A+B)(x+y)$$

$$b)\ x^2-4y^2+x+2y$$
$$= [x^2-(2y)^2]+(x+2y)$$
$$= (x-2y)(x+2y)+(x+2y)$$
$$= (x+2y)(x-2y+1)$$

$$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$$
$$= 2x(x+y)+3(x+y)$$
$$= (x+y)(2x+3)$$

$$d)\ 2x+2y+2x+2y$$
$$= 4x+4y$$
$$= 4(x+y)$$

پوښتنې

لاندې افادې تجزيه کړئ.

1) $x^4-x^3y+x^2x$

2) $x(2x-3y)^2+8(2x-3y)$

3) $10ab-15ac$

4) $32x^2y-4xy^2$

5) $\sqrt{2}\,x^3y^2-\sqrt{8}\,xy$

6) $0.5mn^2-0.125m^4n^3$

7) $ab+b+b$

8) $\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{6}x^2-\frac{1}{2}x^2-x^4$

9) $mab+my+ny+nab$

10) $ab(b+a+c)+ac(a+b+c)+bc(c+b+a)$

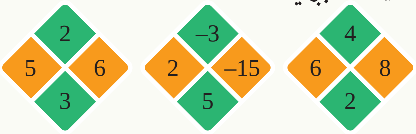
دالجبري افادوضرب، چې يوه گډه جمله ولري

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab$$

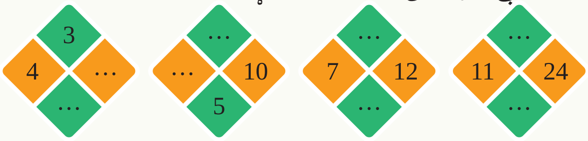
د مخامخ قوسونو له ضرب څخه وواياست، چې د دوو عددونو د جمعي او ضرب حاصل، له کومو عددونو سره برابر دی؟

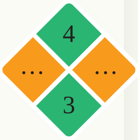
فعالیت

- په هره مربع کې د عددونو ترمنځ څه ډول اړيکه ليدل کېږي؟

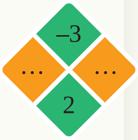


- له پورتنۍ اړيکې څخه په گټې اخيستنې سره تش ځايونه ډک کړئ.

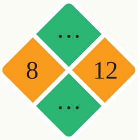




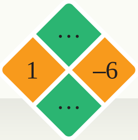
$(x+4)(x+3) = x^2 + ...x + ...x + ... = x^2 ....x + ...$



$(x-3)(x+2) = x^2 + ...x + ...x + ... = x^2 ....x + ...$



$x^2 + 8x + 12 = (x + ...)(x + ...)$



$x^2 + x - 6(x + ...)(x + ...)$

له پورتني فعالیت څخه لیدل کېږي:

د دوو الجبري عبارتونوله ضرب څخه، چې یوه ګډه جمله و لري، لیکلای شو، چې:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+a\times b$$

که چیرې وغواړو، یوه ترینوم الجبري افاده، د x^2+bx+c تجزیه کړو، نولومړی باید دوه عددونه داسې پیداکړو، چې دضرب حاصل یې c او دجمع حاصل یې b شي، که دې عددونو ته m او n وویل شي، لروچې:

$$x^2+bx+c=x^2+(m+n)x+m\cdot n$$

مثال: د لاندې افادو ضرب اوتجزیه سرته ورسوئ.

$a)\ (t-4)(t+5)$ $\quad b)\ (a+3)(a+4)$ $\quad c)\ (x-0.4)(x+0.2)$

$d)\ (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})$ $\quad e)\ x^2+12x+32$ $\quad f)\ x^2+4x+3$

$g)\ x^2-3x-28$ $\quad h)\ x^2-5x+6$

حل:

$a)\ (t-4)(t+5)=t^2+(-4+5)t+(-4\times 5)=t^2+t-20$

$b)\ (a+3)(a+4)=a^2+(3+4)a+(3\times 4)=a^2+7a+12$

$c)\ (x-4)(x-2)=x^2+(-4-2)x+(-4\times -2)=x^2-6x+8$

$d)\ (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})=y^2+(\frac{1}{2}+\frac{2}{3})y+\frac{2}{6}=y^2+\frac{7}{6}y+\frac{2}{6}$

$e)\ x^2+12x+32=x^2+4x+8x+32=x(x+4)+8(x+4)=(x+8)(x+4)$

$f)\ x^2+4x+3=x^2+3x+x+3=x(x+3)+(x+3)=(x+3)(x+1)$

$g)\ x^2-3x-28=x^2+(4-7)x+(4)(-7)=x^2+4x-7x-28$

$=x(x+4)-7(x+4)=(x-7)(x+4)$

$h)\ x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=x(x-2)-3(x-2)=(x-3)(x-2)$

پوښتنې

1- لاندې افادې تجزیه کړئ.

$a)\ x^2+7x+12$ $\quad b)\ m^2-6m-7$

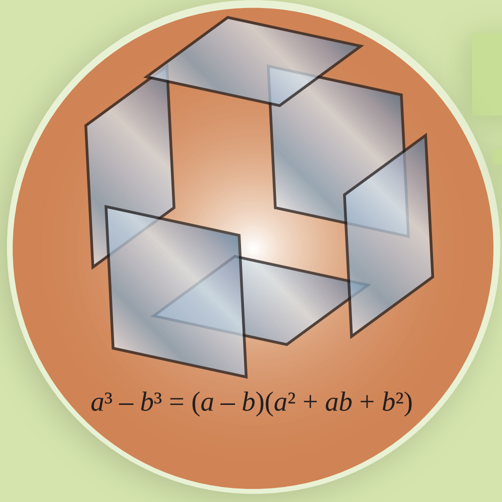
$c)\ a^2+a-2$ $\quad d)\ x^2-x-20$

2- لاندې افادې ضرب کړئ.

$a)\ (2x-1)(x+3)$ $\quad b)\ (\sqrt{2}+x^2)(x-\sqrt{2})$

$c)\ (a-3)(a+4)$ $\quad d)\ (0.5xm-\frac{1}{2})(4xm+0.5)$

د مکعبونو مجموع او تفاضل



شکل ته پام وکړئ، وواياست چې، له دې سطحو څخه، که سره نږدې شي، کوم جسم په لاس راځي؟

فعاليت

لاندې جدول ډک کړئ.

a	b	$a^3 + b^3$	$(a + b)$	$a^2 - ab + b^2$	$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5	2				
4	1				
–3	2				
3	–2				
4	4				

- د دوو $a^3 + b^3$ او $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$ ولاړو ليکو ترمنځ، څه ډول اړيکی ليدل کيږي؟
- ايا کولای شئ يوه ورته رابطه د $a^3 - b^3$ لپاره ولیکئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو، دا پايله وليکو:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

دا اړيکه کولای شو چې، په الجبري ډول وښيو:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3$$

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ.

$a)\ b^3-8$ $\quad b)\ a^6b^6-x^3y^3$ $\quad c)\ h^3+\dfrac{1}{h^3}$

حل: لومړی الجبري افاده، د $a^3 \pm b^3$ مطابقت شکل ته اړوو، وروسته د مطابقت په مرسته، هغه تجزیه کوو:

$$a)\quad b^3-8=b^3-2^3=(b-2)(b^2+2b+4)$$

$$b)\quad a^6b^6-x^3y^3=(a^2b^2)^3-(xy)^3=(a^2b^2-xy)(a^4b^4+a^2b^2xy+x^2y^2)$$

$$c)\quad h^3+\frac{1}{h^3}=h^3+(\frac{1}{h})^3=(h+\frac{1}{h})(h^2-1+\frac{1}{h^2})$$

دویم مثال: دیوه مکعب مستطیل حجم داسې $27x^3-\dfrac{1}{8}$ ښودل شوی دی، که د مکعب مستطیل جګوالی $3x-\dfrac{1}{2}$ وی، ددې مکعب مستطیل دقاعدې مساحت به څومره وي؟

$$\frac{\text{د مکعب مستطیل حجم}}{\text{ارتفاع}} = \text{د قاعدې مساحت} \Leftarrow \text{ارتفاع} \times \text{د قاعدې مساحت} = \text{د مکعب مستطیل حجم}$$

$$\text{د قاعدې مساحت} = \frac{27x^3-\frac{1}{8}}{3x-\frac{1}{2}}=\frac{(3x)^3-(\frac{1}{2})^3}{3x-\frac{1}{2}}=\frac{(3x-\frac{1}{2})[(3x)^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}]}{(3x-\frac{1}{2})}=9x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$$

دریم مثال : د $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ افاده ساده کړئ:

حل : لومړی دصورت مطابقت، په انکشافي یا غزیدلې بڼه لیکو:

$$\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}=x-y$$

څلورم مثال: د $x^3+\dfrac{2}{x^3}$ افاده تجزیه کړئ؟

$$x^3+\frac{2}{x^3}=x^3+\frac{(\sqrt[3]{2})^3}{x^3}=x^3+(\frac{\sqrt[3]{2}}{x})^3$$

$$=(x+\frac{\sqrt[3]{2}}{x})(x^2-\sqrt[3]{2}+\frac{\sqrt[3]{4}}{x^2})$$

پوښتنې

1- د $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ مساوات صحت، په الجبري بڼه وښیئ.

2- لاندې افادې تجزیه کړئ.

$a)\ a^6b^6+x^3y^3$ $\quad b)\ 8+b^3$ $\quad c)\ x^{12}-y^{12}$

$d)\ 125x^3+y^3$ $\quad e)\ 0.125x^3-1$ $\quad f)\ \dfrac{1}{x^3}+1$

$g)\ 8-64a^3b^6$ $\quad h)\ 8a^3-27b^3$ $\quad i)\ b^6-1$

کوچنی مشترک مضرب (L.C.M)

د $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ دکسرونو په حاصل کې، د 6 او 4 دکوچني مشترك مضرب يا دواړو کسرونوګډ مخرج پيدا کولو لپاره مو، یوه لاره درلوده، د $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ جمعي د حاصل لپاره څه وړانديزونه کوئ؟

فعالیت

- د $\frac{2}{8}$ او $\frac{3}{6}$ کسرونو د جمع حاصل لپاره مو، لومړی د ٦ او ٨ کوچني ګډ مضرب یا دواړو کسرونوګډ مخرج پیدا کولو پړاوونه توضیح کړئ؟
- د $2x+2$ او x^2-1 افادې، په ضربي عواملوتجزيه کړئ؟
- ضربي ګډ او ناګډعوامل يې وټاکئ؟
- د $2x+2$ او x^2-1 کوچني ګډ مضرب پيدا کولو لپاره سوچ وکړئ، څه باید وکړو؟
- د $2x+2$ او x^2-1 کوچني ګډ مضرب څودی؟هغه په لاس راوړئ.
- د $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ کسرونو، د جمع حاصل په لاس راوړئ؟

ددوو یاڅو الجبري افادو د کوچني ګډ مضرب دپیداکولولپاره، لومړی هغوی په لومړنیو ضربي عواملوتجزیه، وروسته هغه ګډعوامل، چې ترټولولوی توان لري، له ناګډعواملو سره ضربوو، چي کوچنی ګډ مضرب په لاس راکړي.

لومړی مثال: د $4x^2$، $2x+2$ او x^2-1 کوچنی ګډ مضرب په لاس راوړئ؟

حل: لومړی افادې جلا جلا تجزیه کوو:

$$4x^2=2^2x^2$$

$$2x+2=2(x+1)$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

لیدل کېږي چې، هغه ګډ عامل، چې لوی توان لري، $(x+2)$ او 2^2 دي، چې د ضرب حاصل یې، له ناګډو عواملو سره برابر، په $2^2(x+1)(x-1)x^2 = 4x^2(x^2-1)$ دی، چې د کوچني ګډ مضرب یا (L.C.M) په نامه یادېږي.

دویم مثال: د $68x^2+40x+32$ ، $6x^2-6$ او $4x^2+12x-16$ افادو کوچنی ګډ مضرب پیدا کړئ.

$$4x^2+12x-16 = 4(x^2+3x-4) = 2^2(x+4)(x-1)$$
$$8x^2+40x+32 = 8(x^2+5x+4) = 2^3(x+4)(x+1)$$
$$6x^2-6 = 6(x^2-1) = 2\times 3(x-1)(x+1)$$

په پایله کې کوچنی ګډ مضرب عبارت دی، له:

$$2^3\times 3(x+1)(x+4)(x-1)$$

پوښتنې

د کوچني ګډ مضرب په پام کې نیولو سره یې، ساده کړئ.

1) $\frac{2x}{3}-\frac{4}{5x}\div\frac{3}{10x}$

2) $\frac{3x-1}{x^2+2x-15}-\frac{2}{x+5}$

3) $\frac{2}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}$

4) $\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x^3-1}+\frac{1}{x+1}$

د الجبري افادو ویش

پام وکړئ، چې د مخرج افاده، د صورت په کومې افادې پورې اړه لري، ایا کولای شئ هغه ساده کړئ؟

$$\frac{2xy^2-4x^2y^4}{-2xy^2}=?$$

فعالیت

• کله چې د $\frac{995}{7}$ کسر، نور ونشو کړای، ساده یا اختصار کړو، نو پایله څه ده؟

• لاندې الجبري افادې ترممکن حده پورې ساده کړئ.

$a)\ \frac{2m^2y-3x^3y^4+24xy^3}{-3xy^2}\ ,\quad x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0$

$b)\ \frac{x^2-5x+6}{x-2}\ ,\quad x\neq 2$

$c)\ \frac{x^3-x^2-x-6}{x+2}\ ,\quad x\neq -2$

• لاندې عملیوته پام وکړئ او روښانه کړئ، چې هرګام، دکوم کارپه پایله کې لاس ته راځي ولې؟

$$a)\quad \begin{array}{r|l} 995 & 7 \\ \underline{-7} & 142 \\ 29 & \\ \underline{28} & \\ 15 & \\ \underline{14} & \\ 1 & \end{array}$$

$$b)\quad \begin{array}{r|l} x^3-2x^2-11x-6 & x+2 \\ \underline{\pm x^3\pm 2x^2} & x^2-4x-3 \\ -4x^2-11x & \\ \underline{\mp 4x^2\mp 8x} & \\ -3x-6 & \\ \underline{\mp 3x\mp 6} & \\ 0 & \end{array}$$

• د (a) په جزکې مو، ولې ویش دکیڼي خوا له لومړی رقم ۹ څخه پیل وکړ؟ فکر وکړئ، په (b) جز کې مو ولې، له x^3 څخه د ویش عملیه پیل کړې ده؟

د يوې الجبري افادې له کېن لوري (خوا) نه ښي لوري (خوا) ته ليکل اوترتيبول د لوېې درجې څخه، کوچنۍ درجې ته، د څوجمله يي ترتيب نزولي ترتيب نوميږي

د دوو الجبري افادو د يو پربل د ويش لپاره لاندې پړاوونه ترسره کړئ.

1- د مقسوم او مقسوم عليه پولينومونه په نزولي ډول ترتيب کړئ.

2- د مقسوم لومړی حد، د مقسوم عليه په لومړي حد ووېشئ چې حاصل يې، د خارج قسمت لومړی حد دی.

3- په لاس راغلی خارج قسمت، د مقسوم عليه په ټولوحدونو کې ضرب، حاصل يې د مقسوم له ورته حدودونه تفريق کوو.

4- د مقسوم بل حد راښکته کوود، پاتې افادې څنګ ته يې ليکو، وروسته ددې افادې لومړی حد، د مقسوم عليه په لومړی حد وېشواوحاصل يې، د مقسوم عليه په ټولوحدودوکې ضربوواوحاصل يې، له پاتې افادې څخه تفريق کوو.

5- وروسته 1، 2، 4 پړاوونوته، ترهغه دوام ورکوو چې د پاتې حدودو درجه، د مقسوم عليه د حدونو له درجې څخه کوچنۍ شي.

لومړی مثال : د $x^3-3x^2-23x+30$ افاده، په $x-6$ افادې باندې وېشئ.

د تقسيم مراحل

$$I-\quad \frac{x^3}{x}=x^2$$

$$II-\quad \frac{3x^2}{x}=3x$$

$$III-\quad \frac{-5x}{x}=-5$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2-23x+30 & x-6 \\ \hline \underline{-x^3\mp 6x^2} & x^2+3x-5 \\ \quad 3x^2-23x & \\ \quad \underline{-3x^2\mp 18x} & \\ \qquad -5x+30 & \\ \qquad \underline{\mp 5x\pm 30} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

دویم مثال: د $x^5-2x^3+x^2-8x+4$ افاده په x^2-x-4 افادې ووېشئ.

حل : دمقسوم اومقسوم علیه پولینومونه، په نزولي ډول ترتیبوواویيا عملیه سرته رسوو:

$$\begin{array}{l|l} x^5+0.x^4-2x^3+x^2-8x+4 & x^2-x-4 \\ \underline{-x^5 \mp x^4 \mp 4x^3} & x^3+x^2+3x+8 \\ x^4+2x^3+x^2 & \\ \underline{-x^4 \mp x^3 \mp 4x^2} & \\ 3x^3+5x^2-8x & \\ \underline{-3x^3 \mp 3x^2 \mp 12x} & \\ 8x^2+4x+4 & \\ \underline{-8x^2 \mp 8x \mp 32} & \\ 12x+36 & \end{array}$$

د تقسیم مراحل

$I-\quad \frac{x^5}{x^2}=x^3$

$II-\quad \frac{x^4}{x^2}=x^2$

$III-\quad \frac{3x^3}{x^2}=-3x$

$IV-\quad \frac{8x^2}{x^2}=8$

څرنګه چې، د دوو عددونو وېش دسـموالي لپاره مو، دوه شـرطونو څېړل، نو د دوو الجبري افادو د وېش دسموالی لپاره هم، دوه شرطونه څېړو:

1- د خارج قسمت اومقسوم علیه د ضرب حاصل، جمع پاتې د مقسوم دالجبري افادې سره باید برابر وي.

۲- پاتې درجه، د مقسوم علیه له درجې څخه، باید کوچنی وي.

لکه، په دویم مثال کې:

$$(x^2-x-4)(x^3+x^2+3x+8)+12x+36$$
$$=x^5-2x^3-8x+4$$

لیدل کېږي، چې د خارج قسمت او مقسوم علیه، د ضرب حاصل، جمع پاتې د مقسوم له افادې سره برابر دي او د خارج قسمت درجه، نظر x ته له 3 سره برابره ده پاتې درجه (1) ده، نو په لاس راغلې پایله سمه ده.

دریم مثال: د $2x^2+x^4-3x+1$ افاده په $x+3$ افاده ووېشئ:

حل: لومړی دمقسوم اومقسوم علیه افادې، په نزولي ډول ترتیبوو.

$$\begin{array}{l|l} x^4+2x^2-3x+1 & x+3 \\ \hline \underline{{}_{-}x^4 \pm 3x^3} & x^3-3x^2+11x-36 \\ \quad -3x^3+2x^2 & \\ \quad \underline{\mp 3x^3 \mp 9x^2} & \\ \qquad 11x^2-3x & \\ \qquad \underline{\mp 11x^2 \pm 33x} & \\ \qquad\quad -36x+1 & \\ \qquad\quad \underline{\mp 36x \mp 108} & \\ \qquad\qquad 109 & \end{array}$$

پوښتنې

د لاندې افادو د وېش حاصل پیدا کړئ.

1) $(2t^3-4t^2-2t-6)\div(t^2+9t+7)$

2) $(1-x^2-x)\div(1-x)$

3) $(2y^3+y-3y)\div(y^2-3y-1)$

4) $(2x^3+5x^2-x-1)\div(x+3)$

د الجبري افادو د عمليو د سر ته رسولو ترتيب

که چيري په الجبري افادو کې، مخامخ نښې راغلي وي، په څه ډول يې په ترتيب سره افاده ساده کوو.

فعاليت

• دلاندي افادودساده کولولپاره، کومي عمليې سرته ورسوو. د عمليې د سرته رسولو ترتيب، په شمېر سره ونوموئ.

$3-2^4\times5+(16\div4)$

$4\times5\div2-3(2+3^2)+2$

$3x^2-4x(2+x)$

$2x-3\{-2(x+1)(x+2)\}+6x\div2$

په پورتني فعاليت کې موولېدل، چې دالجبري افادوعمليو، په ترتيب سره سرته رسول، دعددنو قانون له ترتيب څخه پيروي کوي. ديوې الجبرى افادې دساده کولولپاره، په ترتيب سره، په لاندې ډول عمل کوو

1- توان رفع کوو.

٢- د قوسونوپه لرلوسره، لومړی هغه ساده کوو.

٣- په ترتيب سره، له کيڼ څخه ښي اړخ ته، د ضرب اووېش عمليې سرته رسوو.

٤- په ترتيب سره، له کيڼ څخه ښي اړخ ته، د جمع اوتفريق عمليې سرته رسوو.

لومړی مثال : لاندې افادې ساده کړئ.

1) $\frac{1}{2}m-3\left\{\left[5(m-\frac{1}{2}-m)\right]-m-6\right\}\div 2$

$=\frac{1}{2}m-3\left\{5m-\frac{5}{2}-5m-m-6\right\}\div 2$

$=\frac{1}{2}m-3\left\{-m-\frac{17}{2}\right\}\div 2$

$=\frac{1}{2}m+(3m+\frac{51}{2})\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}m+\frac{3}{2}m+\frac{51}{4}$

$=\frac{m+3m}{2}+\frac{51}{4}=\frac{4m}{2}+\frac{51}{4}$

$=2m+\frac{51}{4}$

2) $2x-1-\{-2(x+2)\}+2x\div 2\times 5x$

$=2x-1-(-2x-4)+2x\div 2\times 5x$

$=2x-1+2x+4+x\times 5x$

$=2x-1+2x+4+5x^2$

$=4x+5x^2+3$

فعالیت

- مخامخ عبارتونه ساده کړئ.

a) $\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

b) $\sqrt{8x^3y^3}$

c) $\sqrt{3a\sqrt{49a^2}}$

- د $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ کسرونو دمخرج د جذرونود له منځه وړلو لپاره، چې مخرج گویا شي $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ، له کوم مطابقت څخه مرسته اخیستلای شئ.
- د $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ کسرونوجذرونه په مخرج له منځه یوسئ اوساده یې کړئ.

دیوه کسرد مخرج د جذرونو د منځه وړلوعملیه، د الجبري کسر دگویا کولو یا ناطق کولو په نامه یادیږي.

مثال : د لاندې کسرونو مخرج ناطق کړئ.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ 2) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{a}}$

3) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ 4) $\dfrac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

حل:

1) $$\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$$

2) $$\frac{2}{\sqrt[3]{a}}=\frac{2}{\sqrt[3]{a}}\times\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}}$$
$$=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

3) $$\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}=\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}\times\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}$$
$$=\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a})^2-1^2}$$
$$=\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{a-1}=\sqrt{a}+1$$

4) $$\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3}$$
$$=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1}=-5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

د یوې الجبري افادې د ساده کولو لپاره، په ترتیب سره لومړی قوسونه له منځه وړو، وروسته د توان عملیه او په پای کې، په ترتیب سره د وېش، ضرب، جمع او تفریق عملیې، له بنې خوا کیڼ اړخ ته سر ته رسوو.

- د $\sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}$ دی.
- د $\sqrt{x}+1$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}-1$ دی.
- د $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ دی.

پوښتنې

لاندې افادې ساده کړئ.

1) $2x\times -2\{3x-(2+x)-1\}\div 2$

2) $\frac{1}{3}y-5\left[-2\left\{6(y-\frac{1}{3}-y)\right\}\right]\div 3$

3) $5+(-18)-[24+(-30)](-7)$

4) $[(-102)+(-330)]\div 16+[168+240-(-210)]\div 6$

5) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

6) $\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

7) $2\sqrt{2000ab}-\frac{b}{a}\sqrt{72ab}$

8) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$

9) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

10) $2\sqrt{18x}+\sqrt{50x}-\frac{1}{2}\sqrt{20x}$

دپنځم څپرکي لنډيز:

- هغه الجبري افادې يا الجبري جملې، چې له يوې جملې څخه جوړې شوې وي، دمونوم يا يو جمله يي، په نامه يادېږي، لکه: ax^n
- هغه الجبري افاده، چې له دوو حدونو څخه جوړه شوې وي، دوه جمله يي يا بينوم بلل کېږي، لکه: ax^2+b
- هغه الجبري افاده، چې له دريو حدونو څخه جوړه شوې وي، دري جمله يي يا ترينوم بلل کېږي، لکه: ax^2+bx+c
- هغه الجبري افادې، چې له يوه يا څوحدونوڅخه جوړې شوې وي، او د تورو توانونه يې مکمل عددونه دي پولينوم بلل کېږي لکه: $ax^5+bx^3+cx^2-x-d$
- په يوه الجبري افاده کې، د متحول ترټولو لوی توان، دالجبري افادې درجه بلل کېږي.
- د پولينوم هغه ترتيب، چې له کينې خوا څخه ښي خواته، له لوی توان څخه کوچني ته ترتيب شوی وي، نزولي ترتيب بلل کېږي.
- دهر a او b لپاره لرو:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

- دالجبري افادوګډوعواملو، چې ترټولو لوی توان ولري، دضرب حاصل، له ناګډوعواملوسره د L.C.M په نامه يادېږي.
- که چيرې په يوه الجبري افاده کې، قوسونه او(+ ، - ، × او ÷ …) عمليې راغلې وي، د ساده کولو لپاره يې، په ترتيب سره، لومړی کوچنی، منځنی او بيا لوی قوس، له منځه ورو، وروسته د توان عمليه او په پای کې، په ترتيب سره د وېش، ضرب، جمع او تفريق عمليې، له کين څخه ښي اړخ ته سرته رسوو.
- د $\sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}$ دی.
- د $\sqrt{x}+1$ د ناطق کولوعامل $\sqrt{x}-1$ دی.
- د $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ د ناطق کولوعامل عبارت له $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ دی.

دپنځم څپرکي پوښتني

- په لاندي سوالونوکي، هرسوال ته څلورځوابونه ورکړل شوی، سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $2x^2-\frac{1}{2}x$ افاده کي ګډ عامل :

a) 2 دی. b) x دی. c) $2x$ دی. d) نه لري.

2- د $(x-2)(x+3)$ الجبري افادودضرب حاصل عبارت دی، له:

a) x^2+5x+6 b) x^2-5x-6

c) x^2+x-6 d) x^2-x+6

3- د $\frac{3}{x^2-1}+\frac{3}{2x+2}$ افادي کوچنی ګډ مضرب، عبارت دی، له :

a: $2(x+1)(x-1)$ b) $(x+1)(x-1)$

c) $(2x+2)(x^2-1)$ d) هيڅ يو.

4- د $\frac{2x-4x^3+x^2+16x-8}{2x^2-8}$ افادي، د ويش حاصل عبارت له:

a) $-2x+1$ b) $(-2x+1)(2x)+\frac{-2x}{2x^2-8}$

c) الف او ب d) هيڅ يو.

5- د $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ د ناطق کولوعامل عبارت دی، له :

a) $\sqrt{a}$ b) $\sqrt{b}$

c) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ d) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

• تش ځایونه، په مناسبوجملو ډک کړئ.

1- د $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ الجبري افاده، یوه . . . . حده درجه . . . . .افاده ده.

2- د $x^2 + 7x + 12$ الجبري افادي ضربی عوامل . . . . .او. . . . . . . .دی.

3- د $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ وېش حاصل عبارت له . . . . دی.

4- $a^3 + b^3 =$ (. . . . .)(. . . . .)

5- د $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ دضرب حاصل، عبارت له . . . . دی.

• په لاندې جملو کې، کومه یوه سمه اوکومه یوه ناسمه ده، د سمې مخ ته (س) توری او د ناسمې مخ ته (ن) توری ولیکئ.

1- (   ) هغه الجبري افادې، چې د څو حدونوڅخه جوړه شوې وي او د تورو توانونه یې مکمل عددونه وي د پولینوم په نامه یادېږي.

2- (   ) د $x^2 + 2ax + a^2$ افادې تجزیه $(x+a)\ (x+a)$ ده

3- (   ) د $21x^3y^3$ او $14x^3y^2$ کوچنی ګډ مضرب $42x^3y^4$ دی.

4- (   ) $a^3 - b^3 = (a+b)(a^2 + ab + b^2)$

5- (   ) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

● لاندې سوالونه مفصل حل کړئ:

1- تجزیه یې کړئ

a) $y^2 - y - 2$

b) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

c) $21a - 14ab + 28a^2$

d) $72m^8n^6 - 98m^6n^8$

e) $a^2x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}$

f) $1 + 2ab - (a^2 + b^2)$

2- ساده یې کړئ

a) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$

b) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

c) $\frac{a^2b^{-2} - b^2a^{-2}}{ab^{-1} - ba^{-1}}$

3- و یې وېشئ

a) $\frac{12a^2 - 4a + 20}{40 - 5a}$

b) $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$

c) $(3x^3 - x^2 - 4) \div (x - \frac{1}{2})$

d) $(x^3 - 5x + 6) \div (x - 2)$

e) $(x^2 - 5x + 64) \div (-x + 5)$

شپږم څپـــرکی

نامساوات

نامساوات
(Inequality)

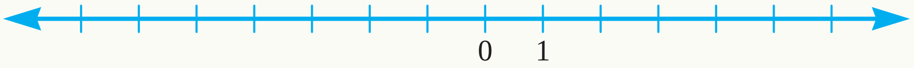
تله په کوم حالت کې ده؟ ولې؟

عموماً په ورځني ژوند کې، د نامساوي کمیتونو پرتله کولو ته اړتیا لرو، لکه د یوه ټولګي د زده کوونکو د نمرو ټولګه(مجموعه) که له زیاتو څخه کمو نمرو ته درجه بندي کړو، ایا تاسې کولی شئ، داسې نور مثالونه په ورځني ژوند کې وښیئ، چې نا مساوي عددونه سره پرتله شي.

که چیرې عددونه د ($<,\leq,>,\geq$) علامو په مرسته اړیکې ولري، د نامساوي په نامه یادیږي، لکه: $5>4$, $18\leq 18$ ....

فعالیت

• د $-4,\sqrt{2},\frac{-3}{2},3$ او $\frac{2}{3}$ عددونه، د عددونو په محورو وټاکئ.



• له مناسبو علامو څخه په کار اخیستلو سره، پورتني عددونه، په ترتیب سره، له کوچني څخه تر لوی پورې ولیکئ.

• د عددونو په محور، د عددونو د ترتیب او د عددونو د ځای تر منځ څه اړیکې وینئ؟

د پورتني فعالیت مشاهدات، په لاندې ډول داسې لنډوو:

د عددونو په محور، هغه عدد چې د عدد ښې خواته پروت وي، لوی او له هغه عدد څخه، چې د هغې کیڼې خوا ته پروت دی، کوچنی دی.

په بشپړ(کلي) ډول ویلی شو چې که د b,a او c درې حقیقي عددونه وي، نو صورت نیسي، چې:

$$a<b\ ,\ b<c \Rightarrow a<c$$

فعالیت

- دوه نامساوي عددونه وټاکئ او دهغوی تر منځ اړیکه، د کوچنیو یا لویو علامو په کار اخیستلوسره بیان کړئ؟
- د نامساوي دواړو خواوو ته، د ۵ عدد ورجمع کړئ، ایا د نامساوي د علامې په لوري کې، څه بدلون راځي؟
- د پورتنی نامساوي له دواړو خواوو څخه، د ۳ عدد تفریق کړئ، ایا د نامساوي د علامې په جهت کې، څه بدلون راځي؟

په بشپړ ډول سره، د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که $a<b$ وي، نو د b,a او c اختیاري حقیقي عددونو لپاره لرو: $a+c<b+c$

$a-c<b-c$

فعالیت

- دوه نامساوي عددونه وټاکئ او دهغوی تر منځ اړیکه، دکوچنی یا لویې علامې($<$) څخه په کار اخیستلوسره ولیکئ؟
- د پورتنی نامساوي دواړه خواوې، د ٤ په عدد کې ضرب کړئ، ایا د نامساوي د علامې په لوری کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنی نامساوي دواړه خواوې، د ٤- په عدد کې ضرب کړی، ایا د نامساوي د علامې په لوری کې څه بدلون راځي؟
- که د $4<7$ نامساوي دواړه خواوې معکوس کړو، ایا د نامساوي د علامې په لوری کې بدلون راځي.

په بشپړ ډول، د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د b,a او c حقیقي عددونو لپاره لرو چې:

$a<b$ ، $c>0 \Rightarrow ac<bc$

$a<b$ ، $c<0 \Rightarrow ac>bc$

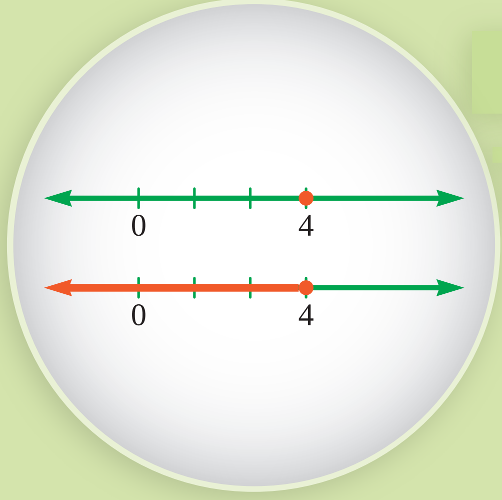
$0<a<b \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

په یاد ولرئ، چې د وېش عملیه، د ضرب د عملیې معکوسه عملیه ده، یعنې که وغواړو، چې یو عدد، په a وویشو، هغه عدد په $\frac{1}{a}$ کې ضربوو، نو د نامساوات د ضرب عملیې ټول خواص، د وېش په عملیه کې هم $(a\neq 0)$ صدق کوي.

پوښتنې

د $-3<9$ په نامساوي کې، د یوه اختیاري عدد په جمع، تفریق، ضرب او تقسیم کولو سره د نامساوي ټول خواص وڅېړئ؟

د خطي نامساوات حل



د $x = 4$ او $x \le 4$ دوه الجبري جملې په پام کې ونیسئ، د دې عبارتونو تر منځ څه ورته والی او څه توپیر وینئ؟

فعالیت

- د $x+3=7$ معادله، د x د کوم عددي قیمت لپاره سمه ده.
- ایا د x په لاس راغلي قیمت څخه پرته، بل قیمت x ته پیداکولای شئ، چې په معادله کې ربښتینوالي ولري؟
- د x د کوم عددي قیمت لپاره، د $x+3<7$ نامساوي سمه ده؟
- ایا د x په لاس راغلي قیمت څخه پرته، بل قیمت شته، چې نامساوي پرې سمه وي؟
- د x د څو عددي قیمتونو لپاره پورتنی نامساوي سمه ده؟

د پورتني فعالیت په لیدو سره، نامساوي د مساوات په پرتله ډېر حلونه لري.

هغه الجبري رابطې، چې د $(>, <, \le$ او $\ge)$ علامو په مرسته یوه له بلې سره اړیکي ولري او په هغه کې د متحول توان یو وي، لومړی درجه یو مجهوله یا خطي نامساوي بلل کیږي.

لاندې نامساوي، د یو مجهوله لومړی درجې نامساواتو بېلګه ده.

$$x+3<0 \quad , \quad 2x-\frac{1}{3}>3-x$$

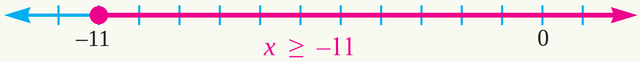
$$6x+7\le 5 \quad , \quad \frac{x}{5}+\sqrt{2}\ge 12$$

په بشپړ ډول، د x د هغو قیمتونو پیدا کولو لپاره، چې په نامساوي کې حقیقت ولري، د نامساواتو له خواصو څخه په ګټې اخیستنې سره، نامساوي ته داسې بدلون ورکوو، چې د نامساوي یو اړخ ته x او بل اړخ ته یې عددونه پراته وي.
د نامساوي د حل څخه موخه دا ده، چې د x لپاره هغه قیمتونه پیدا کړو، چې د نامساوي په ساحه کې حقیقت ولري، دا ساحه د نامساوي د حل ساحه بلل کېږي.

لومړی مثال: د $x+4 \geq -7$ نامساوي حل کړئ او د نامساوي د حل ساحه یې، د عددونو په محور وښیئ؟
حل: د نامساوي په دواړو خواوو کې، د(-4) عدد په جمع کولو سره لرو، چې:

$$x+4-4 \geq -7-4$$

$$x \geq -11$$



دویم مثال: د $2x+1>5$ نامساوي حل کړئ؟
حل: د نامساوي له خواصو څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو، چې معلوم د نامساوي علامې یو اړخ ته او مجهول بل اړخ ته انتقالوو:

$$2x+1>5$$

د نامساوي له دواړو خواوو څخه، د(-1) عدد تفریق کوو:

$$2x+1-1>5-1$$

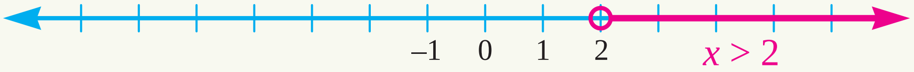
$$2x>4$$

د نامساوي دواړه خواوې، په 2 وېشو یا په $\frac{1}{2}$ کې یې ضربوو:

$$\frac{1}{2}\times(2x)>\frac{1}{2}\times 4$$

$$x>2$$

یعنې د ټولو هغو قیمتو لپاره، چې له 2 څخه لوی وي، نامساوي صدق کوي، دا مطلب د عددونو په محور داسې ښودلای شو:



پوښتنه: سوچ وکړئ، چې ولې په لومړي مثال کې، د عددونو په محور 11- په(●) او دویم مثال کې، د عددونو په محور، په(O) ښودل شوی دی؟

په دې دوو مثالونو کې، هغو علامو ته، چې د نامساوي د حل ساحې ټاکلو لپاره په کار وړل شوې پاملرنه وکړئ.

په عمومي حالت کې، د $ax+b<cx+d$ الجبري عبارت، چې په هغه کې a, b, c او d حقیقي عددونه او x متحول وي، لومړۍ درجه یو مجهوله یا خطي نامساوي بلل کېږي.

د نامساوي د حل لپاره، لاندې ټکي په پام کې نیسو:

- د نامساوي د خواصو په پام کې نیولو سره، معلوم یو اړخ او مجهول د نامساوي بل اړخ ته انتقالوو.
- معلوم عددونه، په خپل منځ کې او مجهول حدونه په خپل منځ کې جمع کوو.
- د متحول د عددي قیمت دپیدا کولو لپاره، د نامساوي دواړه خواوې، د متحول په ضریب، د نامساوي د خواصو په پام کې نیولو سره وېشو.

دریم مثال: د $3x+1<x-5$ نامساوي حل کړئ.

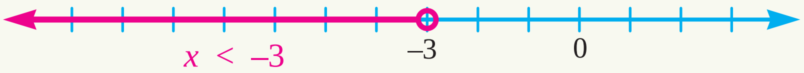
حل:

$$3x-x<-5-1$$

$$2x<-6$$

$$x<-\frac{6}{2}$$

$$x<-3$$



څلورم مثال: لاندې نامساوي حل کړئ.

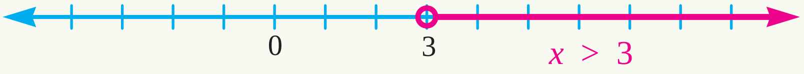
$$x+5<3x-1$$

$$x-3x<-1-5$$

$$-2x<-6$$

$$\frac{-2x}{-2}>\frac{-6}{-2}$$

$$x>3$$



1- د لاندې نامساویگانو حل پیدا او د هغوی دحل ساحه، د عددونو په محور وښیئ.

a) $4x \geq 8$

b) $8 + x < 5$

c) $5 + x < 2x - 1$

d) $-3x - 4 > x + 7$

e) $\frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$

f) $0.5 - x < 3x - 1$

g) $2 - x \leq 2$

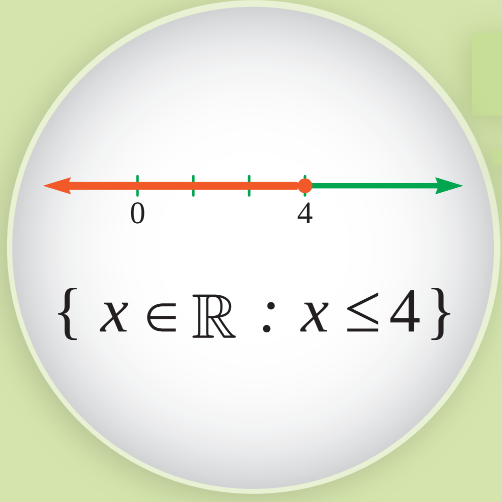
h) $2x - 5 - 7x > 0$

i) $5x + 6 > 0$

2- د 1325 د وېش پر 25 باید تر ټولو لوی عدد پیدا کړو، چې په 25 کې ضرب او له 1325 څخه کوچنی یا ورسره مساوي شي، دا عبارت په نامساوي وښیئ او خارج قسمت یې پیدا کړئ.

3- که تاسې ته وویل شي، چې د یوه فعالیت د سرته رسولو لپاره، حد اکثر 5 ورځې وخت لرئ دا عبارت په نامساوات وښیئ.

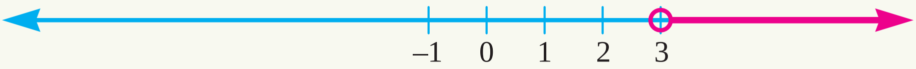
فاصلې (انټروالونه)



دیو نامساوي د حل لپاره، ډېر عددونه کولی شـو، په لاس راوړو، چې دهغه نامساوي حل وي، داسـې ټول حقیقي عددونه، که د یو سـټ په ډول په پام کې ونیسـو، دې سټ ته، د نامساوي حل وایي.

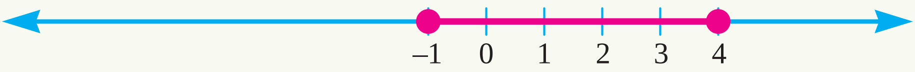
د مثال په ډول: $x > 3$ د $3x - 2 > 7$ نامساوي حل د ی، ځکه هر هغه عدد، چې له 3 څخه لوی وي، په نوموړی نامساوي کې صدق کوي، دا د حل سټ، د ریاضي په ژبه، داسې ښودل کېږي: $\{x \in IR : x > 3\}$

داسې لوستل کېږي: د x ټول هغه حقیقي عددونه، چې له درېو(3) څخه لوی وي.



لیدل کېږي، چې ددې ډول عددونو مجموعه، د عددونو د محور یوه برخه ده، چې په ریاضي کې ورته فاصله یا انټروال وایي.

په لاندې شکل کې د عددونو په محور ټاکل شوی هغه فاصله(انټروال) ده، چې له -1 څخه لوی یا ورسره مساوي او له 4 څخه کوچنی یا ورسره مساوي دی.

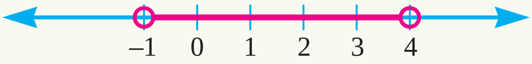


دا فاصله، په $[-1,4]$ یا $\{x \in R \ : -1 \leq x \leq 4\}$ سره ښودل کېږي.

پاملرنه وکړئ، چې د -1 او 4 عددونه په فاصله کې ګډون لري. په هغه حالت کې، چې د انټروال د پیل او پای ټکی ګډون ولري، دې فاصلې ته تړلې فاصله وایي.

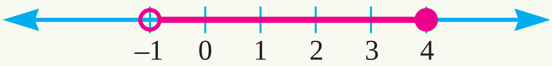
نوکه په پورتنی فاصله کې، د -1 او 4 ټکي ګډون و نه لري، دې فاصلې ته خلاص فاصله وایي او په لاندې ډول یې ښودلای شو:

$(-1,4) = \{x \in IR : \ -1 < x < 4\}$



که د مخکینی فاصلې له پای د ټکو څخه، یوازې یو ټکی، لکه 4 په فاصله کې شامل وي، هغې فاصلې یا واټن ته، نیمه خلاصه یا نیم تړلې فاصله وایي او هغه په لاندې شکل ښیو:

$(-1,4]=\{x \in IR:\ -1 < x \le 4\}$



په عمومي ډول، د هرو دوو a او b حقیقي عددونو چې $a \le b$ څخه وي لرو:

د a او b تړلې فاصله $[a,b]=\{x\in IR : a \le x \le b\}$

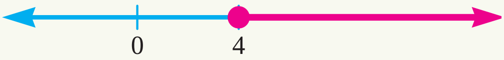
د a او b خلاصه فاصله $(a,b)=\{x\in IR : a < x < b\}$

د a او b نیمه خلاصه فاصله $(a,b]=\{x\in IR : a < x \le b\}$

د a او b نیمه تړلې فاصله $[a,b)=\{x\in IR : a \le x < b\}$

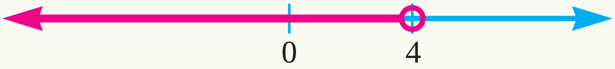
پاملرنه وکړئ، چې د عددونو په محور باندې کولی شو، هغه فاصلې په پام کې ونیسو، چې له یوې خوا څخه تړلې نه وي، په دې حالت کې، فاصله یا واټن، د ∞ علامې څخه په ګټې اخیستنې سره، چې هغه بې نهایت لولو، ښیو لکه: د هغو عددونو سټ، چې د 4 څخه لوی یا ورسره مساوي وي، داسې ښیو:

$\{x\in IR : 4 \le x\}=[4,\infty)$



او هغه عددونه، چې له 4 څخه کوچني وي، عبارت دي، له:

$\{x \in IR : 4 > x\} = (-\infty, 4)$



نو په عمومي ډول، که a یو حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

له a څخه لوی حقیقي عددونه $(a,\infty)=\{x\in IR : a < x\}$

له a څخه لوی یا ورسره مساوي حقیقي عددونه $[a,\infty)=\{x\in IR : a \le x\}$

له a څخه کوچنی حقیقي عددونه وي. $(-\infty,a)=\{x\in IR : x < a\}$

له a څخه کوچنی یا ورسره مساوي حقیقي عددونه. $(-\infty,a]=\{x\in IR : x \le a\}$

پوښتنې

1- لاندې انټروالونه، د سټ په شکل ولیکئ او د عددونو په محور یې وښیئ.

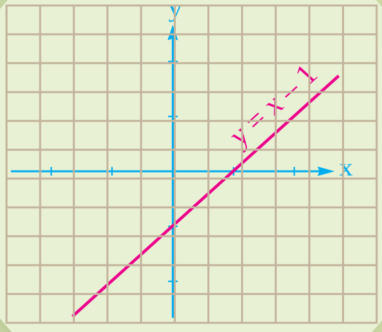
1) $[5,7]$ 2) $(9,-3)$ 3) $[-2,8)$ 4) $(6,1]$ 5) $[2,\infty)$

2- لاندې سټونه، د انټروال په ډول ولیکئ.

1) $A=\{x \in IR: 2 < x < 6\}$ 2) $B=\{x \in IR: -3 \le x \le 5\}$

3) $C=\{x \in IR: 0 \le x < 4\}$

د لومړۍ درجې بینوم د علامې ټاکل



په مخامخ شکل کې، x د کوم قیمت لپاره، د $y = x - 1$ مستقیمه کرښه، د x محور نه د پاسه او x د کوم قیمت لپاره مستقیمه کرښه، د x محور نه لاندې پرته ده؟

فعالیت

- د $2x - 4$ الجبري افاده څو حده ده؟
- دا افاده، د x متحول په کوم قیمت مساوي له صفر سره ده؟
- دا افاده، د x متحول په کومو قیمتونو سره مثبت ده؟
- دا افاده، د x متحول په کومو قیمتونو سره منفي ده؟
- د $P(x) = 2x - 4$ الجبري افادې ګراف، رسم کړئ.

د پورتني فعالیت ریاضي بیان، په لاندې ډول په جدول کې لنډوو:

x	$x < 2$	2	$x > 2$
$2x - 4$	$-$	0	$+$

په دې جدول کې، لیدل کیږي، چې د $2x - 4$ بینوم، په $x = 2$ کې مساوي په صفر دی او د هغو قیمتونو لپاره، چې له 2 نه کوچنې وي، منفي علامه او په هغو قیمتونو کې، چې له 2 نه لوی وي، بینوم مثبته علامه لري.

لومړی مثال: د $P(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ د بینوم علامه وټاکئ.

حل: لومړی هغه قیمت پیدا کوو، چې بینوم په هغې کې صفر وي:

$$-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2}x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

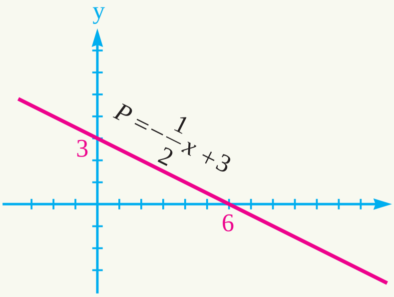
وروسته هغه قیموتونه، چې بینوم په هغې کې مثبت وي، په لاس راوړو:

$$-\frac{1}{2}x+3>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{2}x>-3 \quad\Rightarrow\quad x<6$$

په همدې ترتیب، هغه قیمتونه چې بینوم، په هغې کې منفي وي، عبارت دي له:

$$-\frac{1}{2}x+3<0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{2}x<-3 \quad\Rightarrow\quad x>6$$

د لاس راغلي پايلې، په لاندې جدول کې راټولوو:



x	$x<6$	6	$x>6$
$-\frac{1}{2}x+3$	$+$	0	$-$

پوښتنه: د $-\frac{1}{2}x+3$ بینوم علامه، د $x=7, x=3, x=-1$ او $x=12$ قیمتونو لپاره په لاس راوړئ او د بینوم رسم شوی ګراف شرح کړئ د ځواب سم والی له پورتني جدول سره پرتله کړئ.

نویه کلي حالت کې، د $y=ax+b$ بینوم د علامې د ټاکلو لپاره، لومړی هغه قیمت په لاس راوړو، چې بینوم په هغې کې صفر کېږي او د علامې د ټاکلو جدول یې، په لاندې ډول دی:

1) $a>0$:

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}<x$
$ax+b$	$-$	0	$+$

2) $a<0$:

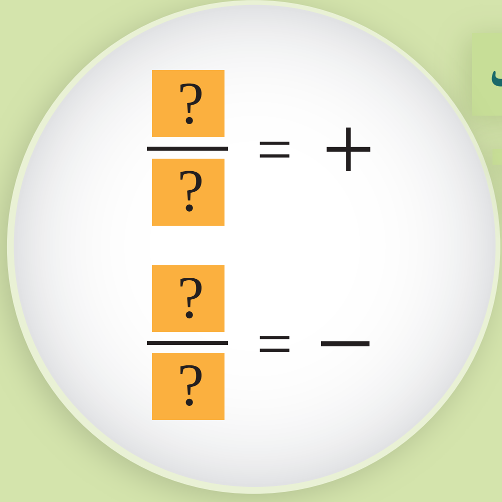
x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}<x$
$ax+b$	$+$	0	$-$

پوښتنې

د لاندې الجبري افادو علامې وټاکئ.

1) $3x-9$ 2) $7x-2$ 3) $\frac{3}{4}x-1$

4) $0.5x+10$ 5) $2x-4+x-1$ 6) $\frac{1}{2}x+3$



د کسري افادو د علامو تحلیل او ټاکل

د a، b حقیقـي عددونـو لپاره، د $\frac{a}{b}$ کسـر، څه وخـت مثبـت او څه وخت منفي علامه لري؟

فعالیت

- د $P(x)=\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افاده، په پام کې ونیسئ.
- د $P(x)$ افاده، په کوم حالت کې مثبت کېږي.
- د $P(x)$ افاده، په کوم حالت کې منفي کېږي.
- د x په کوم قیمت سره د $P(x)$ کسري افاده مساوي په صفر ده.
- ایا کولای شئ، د $P(x)$ په افاده کې، د x په ځای (۱) وضع کړئ. ولې.

د $P(x)$ د افادې د صورت او مخرج د علامې له ټاکلو څخه وروسته کولای شو، د $P(x)$ کسري افادې علامه د صورت او مخرج د علامو د وېش له حاصل څخه په لاس راوړو:

$$3x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-5}{3}$$

پوهېږو چې، د $x<\frac{-5}{3}$ لپاره، د بینوم د صورت علامه منفي او د $x>\frac{-5}{3}$ لپاره، د بینوم د صورت علامه مثبت ده.

د مخرج د علامې د ټاکلو لپاره، لومړی هغه قیمت پیدا کوو، چې $2x-2$ په هغه کې صفر شي.

$$2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

په پایله کې د $x<1$ څخه بینوم د مخرج علامه منفي او د $x>1$ لپاره د بینوم د مخرج علامه مثبت ده.

پاملرنه وکړی، په هغه قیمت کې، چې د کسري افادې مخرج صفر کېږي، نه دی تعریف شوی، پورتنی بحث، په لاندې ډول د علامو د تحلیل او ټاکلو په جدول کې داسې لنډوو:

x	$x < -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3} < x < 1$	1	$1 < x$
$3x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{3x+5}{2x-2}$	$+$	0	$-$	نه دی تعریف شوی	$+$

نو د $x < \frac{-5}{3}$ او $x > 1$ قیمتونو لپاره، د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افادې اشاره مثبت او د $\frac{-5}{3} < x < 1$ قیمتونو لپاره، د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسر افادې اشاره منفي ده.

او د $x = \frac{-5}{3}$ قیمت لپاره، کسري افاده مساوي صفر ده.

په عمومي ډول، د کسري افادې د اشارې د تحلیل او ټاکلو لپاره، لومړی د کسر د صورت او مخرج اشاره ټاکو، وروسته د صورت او مخرج د اشارو او د وېش له حاصل څخه، د کسري افادې اشاره په لاس راوړو.

مثال: د $\frac{-x+3}{x}$ کسري افادې اشاره وټاکئ.

حل:

$-x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$

$x=0$

x		0		3	
$-x+3$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{-x+3}{x}$	$-$	نه دی تعریف شوی	$+$	0	$-$

پوښتنې

د لاندې کسري افادو اشاره وټاکئ.

$a)\ \frac{-x+1}{5+x}$ $\qquad b)\ \frac{x}{x+1}$ $\qquad c)\ \frac{1}{x}+\frac{2}{7}$

کسري نامساوات

$$y = \frac{x+1}{x}$$

$y > 0$

$y < 0$?

د x پـه کـوم قیمت سـره، د مخامخ کسـري افـاده مثبـت او د x پـه کوم قیمت سره، افاده منفي ده؟

فعالیت

د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ کسري نامساوي په پام کې ونیسئ.

- د پورتني نامساوي د رښتینوالي لپاره، د کسري افادې صورت او مخرج، باید کومه علامه ولري؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره، د پورتنۍ کسري افادې صورت مثبت دی؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره، د پورتنۍ کسري افادې مخرج مثبت دی؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره، د پورتنۍ کسري افادې صورت منفي دی؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره، د پورتنۍ کسري افادې مخرج منفي دی؟
- د پورتني فعالیت د لاس ته راغلو پایلو په پام کې نیولو سره د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي سم دی؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه ولیدل شول، چې د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي د حل لپاره باید بیلابیل حالتونه په پام کې ونیسو. د کسري نامساواتو د حل د سټ پیدا کولو یوه بله لاره، د علامو د ټاکلو او تحلیل جدول دی، د مثال په ډول، د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي د حل سټ پیدا کولو لپاره، داسې عمل کوو:

$$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

$$4+2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$

x		-2		2	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$4+2x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-2}{4+2x}$	$+$ د نامساوي حل	نه دی تعریف شوی	$-$	0	$+$ د نامساوي حل

د علامو د تحليل او ټاکلو جدول ته په پاملرنې سره ليدل کېږي چې هغه قيمتونه، چې لـه ($x<-2$) او له ($x>2$) وي، افاده مثبت ده، او له هغو قيمتونو څخه، چې له(-2) څخه لـوی او لـه(2) کوچني ($-2<x<2$) وي، منفي ده. په پايله کې، د نامساوي د حل سټ عبارت دی لـه $x<-2$ او د $x>2$ يا $\{x\in R: x<-2\}\cup\{x\in R: x>2\}$ يا $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

مثال: د $\frac{2x}{5x+3}\geq 1$ کسري نامساوي حل کړئ؟

حل: د نامساوي د حل سټ پيدا کولو لپاره، لومړی کسري افاده، يو وار، له صفر څخه کوچنی يا لويه ليکو:

$$\frac{2x}{5x+3}\geq 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x}{5x+3}-1\geq 0$$

$$\frac{2x-(5x+3)}{5x+3}\geq 0 \Rightarrow \frac{-3x-3}{5x+3}\geq 0$$

$$-3x-3=0\Rightarrow x=-1$$

$$5x+3=0 \quad\Rightarrow x=\frac{-3}{5}$$

اوس د نامساوات د علامې د ټاکلو له جدول څخه، د نامساوي حل په لاس راوړو.

x		-1		$-\frac{3}{5}$	
$-3x-3$	$+$	0	$-$		$-$
$5x+3$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-3x-3}{5x+3}$	$-$	0	$+$ د نامساوي حل	نه دی تعریف شوی	$-$

له پورتني جدول څخه په پاملرنې سره د نامساوي حل عبارت دی له: $\{x\in IR: -1\leq x<\frac{-3}{5}\}$

په بشپړ ډول د کسري نامساوي د حل لپاره، په لاندې ډول پر مخ ځو:

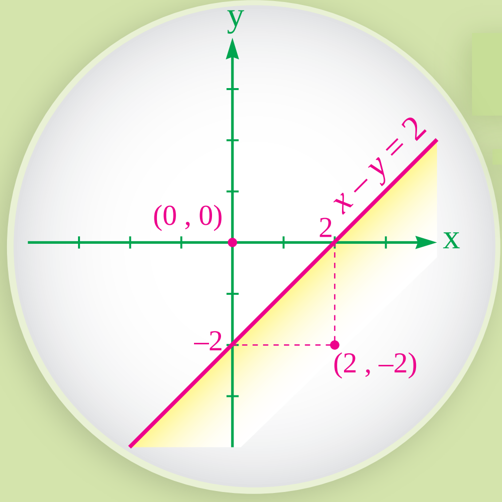
- نامساوي داسې ليکو، چې له صفر څخه کوچنی يا لويه وي.
- نامساوي د علامو د ټاکلو له جدول څخه د نامساوي د حل سټ په لاس راوړو.

پوښتني

د لاندې نامساواتو د حل سټ پيدا کړئ.

1) $\frac{-x-9}{2x+4}<0$ 2) $\frac{6x+7}{7-6x}\leq 0$ 3) $\frac{x+10}{2x-3}\geq 0$ 4) $\frac{7x-2}{3-2x}>3$

خطي دوه متحوله نامساوات



د $x-y=2$ مستقیمه کرښه، د وضعیه کمیاتو مستوي، پـه دوه پاسنۍ او لاندینۍ ناحیو وېشي د کومې ناحیې د ټکو مختصات په $x-y<2$ نامساوي کې صدق کوي؟

د $x-y<2$ نامساوي، چې په هغې کې د x او y متحولین لومړۍ درجه دي یو خطي دوه متحوله نامساوي بلل کېږي.

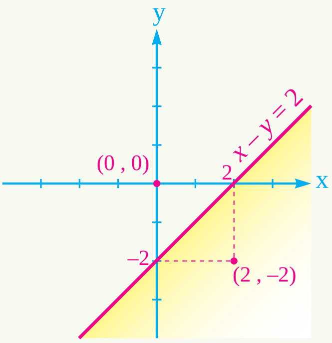
فعالیت

- د (x,y) مرتبې جوړې داسې په لاس راوړئ، چې په $x-y<2$ نامساوي کې صدق وکړي.
- څومره مرتبې جوړې پیدا کولای شئ، چې په پورتنۍ نامساوي کې حقیقت ولري.
- ایا کولای شئ، چې نورې مرتبې جوړې پیدا کړئ، چې په پورتنۍ نامساوي کې صدق وکړي.

په پورتنیو حالاتو کې ویلای شو چې:

د $ax+by<c$ نامساوي، چې په هغه کې b,a او c حقیقي عددونه او $a\neq 0$ یا $b\neq 0$ وي، خطي دوه متحوله نامساوي بلل کېږي.

د دې نامساوي د حل سټ، د هغو عددونو مرتبې جوړې دی، چې په نامساوي کې صدق کوي.



لومړی مثال: د $x-y<2$ دوه متحوله نامساوات د حل سټ پیدا کړئ؟

حل: د دې نامساوي د حل لپاره، لومړی $x-y=2$ کرښه، د وضعیه کمیاتو په مستوي کې، رسموو. لیدل کېږي، چې د $x-y=2$ مستقیمه کرښه د وضعیه کمیاتو مستوي په دوو ناحیو وېشي. د دې لپاره چې و پوهېږو، د کومې ناحیې د عددونو

مرتبې جوړې په نامساوي کې صدق کوي، له هرې ناحيې څخه يوه مرتبه جوړه ټاکو او په نامساوي کې يې وضع کوو.

د مثال په ډول، $(0,0)$ مرتبه جوړه په نامساوي کې صحيح ده.

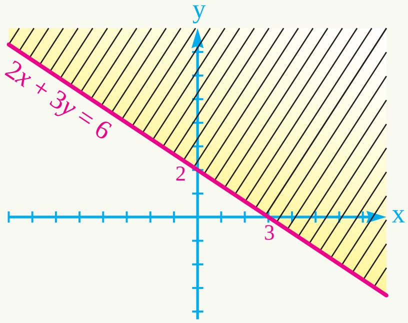
$$0-0<2 \quad \Rightarrow \quad 0<2$$

نو هغه ټکی، چې د مستقيمی کرښې پورته خوا ته دی، د نامساوي حل دی.

د نامساوي د حل سټ د ښودلو لپاره، هغه اړخ، د مستقيمی کرښې تورو، چې په نامساوي کې سموالی نه لري.

پوښتنه: څو نور ټکي د مستقيمې کرښې څخه پورته او ښکته خواته وټاکئ پورتنی پايله وڅېړئ؟

دويم مثال: د $2x+3y<6$ نامساوي د حل سټ پيدا کړئ؟



حل: لومړی د $2x+3y<6$ کرښه د وضعيه کمياتو په مستوي کې رسموو، وروسته د نامساوي د حل سټ پيدا کولو لپاره، د مستقيم د پاسه يا ښکته خوا د يوه ټکي مختصات ټاکو او په نامساوي کې يې وضع کوو، که حقيقت يې درلود، هغه اړخ د نامساوي حل دی او بل عکس نه دی.

لکه د $(0,0)$ د وضعيه کمياتو مبدا مرتبه جوړه په پام کې نيسو:

$$2x+3y<6$$
$$2\times(0)+3\times(0)<6$$
$$0<6$$

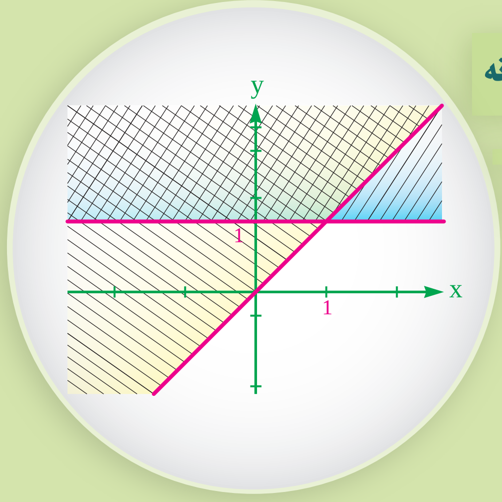
څرنګه چې، د نوموړی ټکی مختصات، په نامساوات کې حقيقت لري نو د کرښې لاندې خوا ټکي، د نامساوي د حل سټ دی.

پوښتني

1) $3x-2<5x+y$ 2) $2y<3x$ 3) $x+y>0$

4) $2x-6y\geq 8x+4y$ 5) $x+y<0$ 6) $5x-3y<-1$

د دوه متحوله خطي نامساوي سیستمونه



د لاندې نامساوي ګانو، د حل سټ پیدا کړئ.

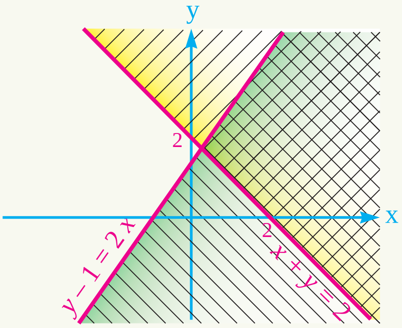
ایا کولای شئ، اټکل وکړئ، چې د مخامخ شکل، د کومو نامساواتو د حل ساحه راښیي؟

د $\begin{cases} x+y<2 \\ y-1>2x \end{cases}$ د نامساواتو سیستم، چې په هغه کې دوه خطي، دوه متحوله نامساوي دي، د نامساوي سیستم بلل کېږي.

د نامساواتو سیستم له حل څخه مطلب دا دی، چې هغه مرتبې جوړې پیدا کړو، چې په یوه وخت کې، په دواړو نامساواتو کې صدق وکړي.

لومړی د هر یوه نامساوي حل، د وضعیه کمیاتو په مستوي کې په لاس راوړو.

هغه ناحیه چې ګډه نه ده خط، خط شوی له نامساوات سره په یو وخت کې، د حل په سټ کې ګډون لري او دا ناحیه، د نامساوات د سیستم حل دی.



د $x+y=2$ کرښې د رسمولو لپاره، که $x=0$ وي، $y=2$ او که، $y=0$ وي، نو $x=2$ کېږي او د $y-1=2x$ کرښه کې، که $x=0$ وي، $y=1$ او که $y=0$ وي، نو $x=\frac{-1}{2}$ سره کېږي.

د دوه متحوله خطي نامساوي د سیستم د حل لپاره، داسې عمل کوو:

لومړی د هر یوه دوه متحوله خطي نامساوي د سیستم حل، د وضعیه کمیاتو په مستوي کې ټاکو.

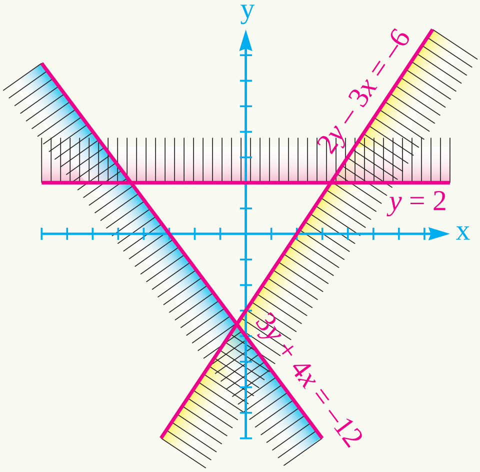
هغه ناحیه، چې په یوه وخت کې د دواړو نامساواتو د حل د سټ یوه برخه وي، د سیستم حل دی.

مثال: د لاندې نامساواتو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2y-3x>-6 \\ y-2<0 \\ 3y+4x>-12 \end{cases}$$

حل: لومړی د پورتنی نامساوي هره یوه کرښه رسموو یعنې:

$2y-3x=-6$ ، $y-2=0$ او $3y+4x=-12$



د $2y-3x=-6$ رسمولو لپاره، که $x=0$ وي، $y=-3$ او د $y-2=0$ گـراف لپـاره، که $x=0$ وي، $y=2$ کېـږي او د $3y+4x=-12$ کرښې د رسمولو لپاره، که $x=0$ وي، $y=-4$ کېږي، چې د نوموړو قیمتونو په مرسـته يې، گراف پـه مخامخ بڼه رسموو.

وروسته د هرې يوې نامساوي د حل ساحه په بیل بیل ډول ټاکو.
د ورکړل شوو نامساواتو سیستم د حل سټ، په شکل کې، د نه تورې شوې ناحيې په شکل ليدل کېږي.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو د حل سټ، د گراف په مرسته په لاس راوړئ؟

1) $\begin{cases} x<3 \\ 2x+y<4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y<9 \\ 5x-2y>5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<3 \\ y>2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y<-3 \\ 5x-2y>9 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y<4 \\ x-y<3 \\ 5x-y>1 \end{cases}$

د شپږم څپرکي لنډيز:

- که چيرې عددونه د دې علامو ($<,\leq,>,\geq$) په مرسته يو له بل سره اړيکه ولري، د نامساوي په نامه يادېږي.
- که د يوه نامساوي د دواړو خواوو سره يو حقيقي عدد جمع يا تفريق کړو، په نامساوي کې بدلون نه راځي.
- که د يوه نامساوي دواړه خواوې، په يوه مثبت حقيقي عدد د صفر خلاف ضرب يا تقسيم شي په نامساوي کې بدلون نه راځي.
- که د يوه نامساي دواړه خواوې، په يوه منفي حقيقي عدد د صفر خلاف ضرب يا وويشل شي، د نامساوي لوری بدلون کوي.

تړلی انتروال	$[a,b]=\{x\in IR : a\leq x\leq b\}$
خلاص انتروال	$(a,b)=\{x\in IR : a< x< b\}$
نيمه خلاص انتروال	$(a,b]=\{x\in IR : a< x\leq b\}$
نيمه تړلی انتروال	$[a,b)=\{x\in IR : a\leq x< b\}$

- د يوې کسري افادې د علامې د ټاکلو لپاره، لومړی د صورت او مخرج علامه بېله بېله ټاکو وروسته د علامو د وېش حاصل په لاس راوړو.
- د $x+3\leq 5$ دوه متحوله خطي نامساوي، د سيستم د حل لپاره داسې عمل کوو.

لومړی د هر دوه متحوله خطي نامساوي د سيستم حل، د وضعيه کمياتو په مستوي کې ټاکو. هغه ناحيه، چې په يوه وخت کې د دواړو نامساواتو د حل سټ يوه برخه وي، د سيستم حل دی.

د شپږم څپرکي پوښتنې

• په لاندې سوالونو کې، د هر سوال لپاره څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1− له لاندې نامساواتو څخه کوم یو سم دی؟

$a)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{6}\leq 2-\frac{1}{3}$ $\quad b)\ \frac{3}{2}>\sqrt{2}$ $\quad c)\ \sqrt{9+16}\geq 5$ $\quad d)$ د b,a او c ځوابونه

2− د $x+3\leq 5$ نامساوي د حل سټ عبارت دی، له:

$a)\ \{x\in IR: x\leq 2\}$ $\quad b)\ \{x\in IR: 2\leq x\}$

$c)\ \{x\in IR: x\leq 8\}$ $\quad d)\ \{x\in IR: x<-2\}$

3− د لاندې انټروالونو څخه کوم یو، د $2x+3>-1$ نامساوات د حل سټ دی.

$a)\ [-2,\infty)$ $\quad b)\ (2,\infty)$ $\quad c)\ (1,\infty)$ $\quad d)\ (-2,\infty)$

4− که $0<a<b$ څخه وي، د لاندې اړیکو څخه کومه یوه سمه ده.

$a)\ \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ $\quad b)\ \frac{-1}{b}<\frac{-1}{a}$ $\quad c)\ -b<-a$ $\quad d)$ b,a او c ځوابونه

5− له لاندې انټروالونو څخه کوم یو د $\frac{x+3}{3-x}>0$ نامساوي د حل سټ دی.

$a)\ (-3,3)$ $\quad b)\ (-\infty,3)$ $\quad c)\ (-3,\infty)$ $\quad d)\ (-3,3)$

• تش ځایونه، په مناسبو کلمو سره ډک کړئ:

1− د $ax+by<0$ نامساوات کې د ټولو هغه .... سټ، چې په نامساوات کې صدق وکړي، د پورتنی نامساوات د حل سټ بلل کېږي.

2- د $[4,5]$ انټروال، د .... په نامه یادېږي.

3- د $2x+4$ بینوم، د .... قیمتونو لپاره منفي کېږي.

4- د $\frac{1}{2}+x-$ بینوم، د .... قیمتونولپاره مثبت کېږي.

5- د $x-\frac{1}{5}\leq 2x+5$ نامساوي، د حل سټ عبارت دی، له ....

• له لاندې جملو څخه کومه یوه سمه ده، د هغې په مخ کې د(س) توری او د ناسمې په مخ کې د(ن) توری ولیکئ.

-1 (   ) د یوې نامساوي د حل سټ یو عنصر لري.

-2 (   ) د $\{x \in R \ : 2 \le x < 5\}$ یو تړلی انټروال دی.

-3 (   ) د نامساوي ګانو د سیستم د حل سټ، د وضعیه کمیاتو د مستوي یوه برخه ده.

-4 (   ) د خطي نامساوي د حل ستونه، بې شمیره دي.

-5 (   ) څرنګه چې، $3 < 2-$ څخه دی نو له دې ځایه، دا پایله $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ اخیستلای شو.

• لاندې پوښتنې په بشپړ ډول حل کړئ:

-1 د لاندې نامساوي ګانو حل په لاس راوړئ.

$$a)\ \frac{x-5}{4} - \frac{x-8}{3} < 0$$

$$b)\ x-2 < 3(2x-9)$$

$$c)\ x^2 - 9 < 0$$

$$d)\ \frac{3x+4}{x} - 1 < 0$$

$$e)\ 1 - \frac{2}{x} \le 3$$

-2 لاندې انټروالونه، د عددونو پر محور وښیئ.

$a)\ [-1,2]$ $b)\ (-2,1]$ $c)\ [-1,1)$ $d)\ (-2,2)$

-3 د لاندې عددونو ستونه، د انټروال په بڼه ولیکئ او د عددونو پر محور یې وښیئ.

$a)\ \{x \in IR: x \le 2\}$ $b)\ \{x \in IR: x \le 5\}$

$c)\ \{x \in IR: -1 \le x \le 6\}$ $d)\ \{x \in IR: -4 < x < 2\}$

4- د لاندې نامساوي، د سیستم حل پیدا کړئ:

$$a)\ \begin{cases} y > x \\ 3y < 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x - y > 0 \\ x - 2y < 0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x + y < 2 \\ y - 4 > 2x \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 2x + 2y < 8 \\ 3x - 3y < 9 \\ 10x - 2y > 2 \end{cases}$$

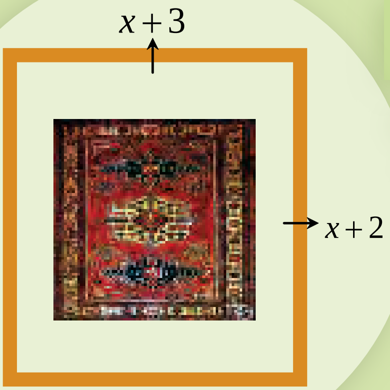
$$e)\ \begin{cases} y > 2 \\ x > -3 \\ y + x < 0 \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} y < 2 \\ x < -3 \\ y + x > 0 \end{cases}$$

اووم څپرکی

دویمه درجه یو مجهوله معادله

دويمه درجه يو مجهوله معادلې
(Quadratic Equation)



که يوه کوټه، د يوې مربع شکل غالۍ په وسيله فرش کړو، په دې شرط چې د خونې اوږدوالی، د غالۍ له اوږدوالي څخه، د 3m په اندازه او سور يې د غالۍ له سور څخه، د 2m په اندازه زيات وي، د اتاق او غالۍ د مساحتونو معادلې څه ډول ليکلای شئ؟

فعاليت

- الجبري افاده تعريف کړئ.
- معادله تعريف کړئ.
- د يو مجهوله لومړۍ درجې معادلې، يوه مثال وليکئ.
- د يو مجهوله لومړۍ درجې معادلې عمومي شکل وليکئ.
- د $(x-2)(x+3)=0$ معادلې د قوسونو د ضرب حاصل پيدا کړئ.
- د پورتنۍ معادلې درجه، د $x+4=3x-1$ معادلې له درجې سره پرتله کړئ.

هغه معادلې چې يو مجهول ولري او د هغې درجه دوه وي، يو مجهوله دويمه درجه معادله بلل کېږي، چې عمومي شکل يې $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ چې b,a او c حقيقي عددونه او x مجهول بلل کېږي، که چيرې $b=0$ يا $c=0$ وي، په دې حالت کې، دې ډول معادلې ته، نيمګړې دويمه درجه معادله وايي.

لومړی مثال: يو تار، چې يو متر اوږدوالی لري، غواړو له هغه څخه يو مستطيل، چې مساحت يې $600cm^2$ دی، جوړ کړو، د دې مستطيل اوږدوالی او سور څرنګه وټاکو؟

حل: که د مستطيل اوږدوالی x او سور يې په y وښيو، د مستطيل محيط $2(x+y)=100\ldots I$
اړيکې او مساحت يې له $x\times y=600\ldots II$ اړيکې څخه په لاس راوړو.

$$\begin{cases}2(x+y)=100\\ x\cdot y=600\end{cases}\quad\begin{matrix}\Rightarrow\\ \Rightarrow\end{matrix}\quad\begin{cases}x+y=50\ \ldots\ldots\ldots\ .\ \ \text{I}\\ x\cdot y=600\ \ldots\ldots\ldots\ ..\ \ \text{II}\end{cases}$$

د I معادلې څخه، د y قيمت، د x له جنسه په لاس راوړو او په II معادله کې يې وضع کوو:

$$\begin{cases} 2(x+y)=100 \\ x\cdot y=600 \end{cases} \Rightarrow x(50-x)=600$$

$$50x-x^2=600$$

څرنگه چې، په پورتنۍ معادله کې، د x درجه دوه ده نو نوموړې معادله، دويمه درجه ده. د معادلو د حلونو پيدا کولو لپاره بېلابېلې لارې شته، چې هغه تر څېړنې لاندې نيسو.

دويم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ، چې مربع يې د 6 په اندازه له خپل عدد څخه زياته وي.

حل: که چيرې عدد په X ونوموو؛ نو پورتنی بيان د رياضي په بڼه داسې ليکو:

$x^2=6+x$ يا $x^2-x-6=0$

د دې ډول معادلو حل به په راتلونکي لوست کې وڅېړو

دريم مثال: په لاندې معادلو کې، د عمومي شکل له مخې، د b, a او c ضريبونو قيمتونه وليکئ.

حل:

$a)\ 2x^2-4x+1=0$ $b)\ 3x-x^2=4$ $c)\ 4x^2-1=0$

$d)\ 7x^2=49$ $e)\ x^2-4=0$ $f)\ \frac{3}{4}-x^2=\frac{2}{3}x$

جزء	معادلې	د a ضريب	د b ضريب	د c ضريب
a	$2x^2-4x+1=0$	2	–4	1
b	$3x-x^2=4$	–1	3	–4
c	$4x^2-1=0$	4	0	–1
d	$7x^2=49$	7	0	–49

پوښتنې

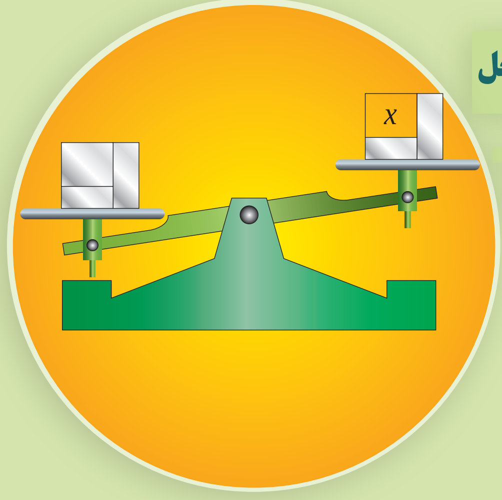
1- په لاندې معادلو کې، پوره او نيمگړې دويمه درجه معادلې په گوته کړئ.

$a)\ 6-2x+x^2=0$ $b)\ 5x^2-3x+1$ $c)\ \sqrt{2}x^2-4x=0$ $d)\ -x^2=3$

2- په لاندې معادلو کې د a، b او c ضريبونه وښيئ.

$a)\ 6x^2-4x=2$ $b)\ 3x-4=x^2$ $c)\ 4x-x^2-6=4x^2$

د دویمه درجه یو مجهوله معادلې حل



ایاکولای شئ، چې د x لپاره داسې قیمت پیداکړئ، چې تله په تعادل کې راشي.

فعالیت

- د $2x+4=3x-1$ معادلې حل پیدا کړئ.
- پورتنی مساوات، د x د بېلابېلو قیمتونو لپاره، په مخامخ جدول کې وڅېړئ.

x	$2x+4$	$3x-1$
–3		
–2		
0		
5		

- د جدول او پاسنی پوښتنې په پام کې نیولو سره توضیح ورکړئ، چې د معادلې د حلولو پیداکول، یعنې څه؟
- مخامخ جدول پوره او د هغې له مخې، د $x^2-4x+3=0$ معادلې حلونه په لاس راوړئ؟

x	x^2-4x+3
–3	
–2	
–1	
0	
1	

هغه قیمتونه، چې په یوه دویمه درجه معادله کې برابروالی راولي، د یو مجهوله دویمې درجې معادلې حل بلل کېږي.

لومړی مثال: هغه عدد پیداکړئ، چې مربع یې، د 12 واحدو په اندازه، له عدد څخه زیاته وي.

حل: که چیرې عدد ته x ووایو، نو الجبري عبارت داسې بڼه نیسي:

$$x^2=x+12$$

څرنگه کولای شو، چې له پورتني مساوات څخه، د هغې حل پیدا کړو.

که چيرې $x=1$ په معادله کې وضع کړو، نو ليدل کيږي چې د مساوات ښی اړخ، د 13 عدد او کيڼ اړخ ته يې د 1 عدد په لاس راځي. په معادله کې، د $x=2$ قيمت په وضع کولو سره ليدل کيږي چې د مساوات ښي اړخ ته 14 او کيڼ اړخ ته يې، د 4 عدد په لاس راځي او د $x=3$ په وضع کولو سره ليدل کيږي، چې ښي اړخ ته د 15 عدد او کيڼ اړخ ته د 9 عدد دی.

په همدې ترتيب د نورو قيمتونو په وضع کولو سره، لکه: $x=4$ ليدل کيږي چې د مساوات ښي اړخ ته د 16 عدد او کيڼ اړخ ته هم، 16 عدد په لاس راځي ليدل کيږي چې له 16=16 مساوي کيږي، نو $x=4$ د معادلې يو حل دی.

x	x^2	$x+12$
1	1	13
2	4	14
3	9	15
4	16	16

د پورتنی لارې لنډيز، چې د معادلې حل د پيدا کولو لپاره مو ترې ګټه واخيسته، کولای شو، په مخامخ جدول کې داسې وليکو:

ايا کولای شو، چې د دويمې درجې معادله، د حل لپاره، يوه بشپړه لاره پيدا کړو؟

دويم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ چې د هغې د مربع جمع له 1 سره مساوي، په صفر شي.

حل: د پاسني بيان الجبري افاده عبارت ده، له: $x^2+1=0$

د پورتنی لارې په خبر د اټکل شويو عددونو په وضع کولو سره، د معادلې د حل په لټولو پيل کوو او پر مخ ځو، د دې کار لپاره د پورتني جدول په څير، مخامخ جدول په پام کې نيسو.

x	x^2	-1
1	1	-1
2	4	-1
0	0	-1
-1	1	-1
-2	4	-1
-3	9	-1

په دې جدول کې ليدل کيږي، چې نه شو کولای، تعادل وساتو، يعني د x لپاره داسې قيمت نه شو پيدا کولای چې د معادلې دواړې خواوې مساوي کړي. له بلې خوا له معادلې څخه څرګنديږي، هر کله چې، يو عدد مربع کړو او يو ورسره جمع کړو، هيڅ وخت مساوي په صفر نه شي کيدلای، نو دا دويمه درجه معادله حل نه لري.

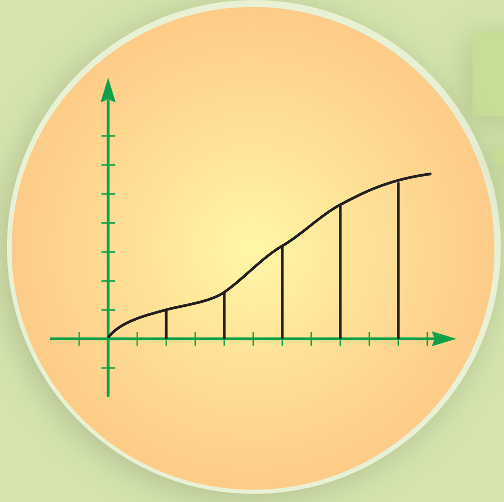
پوښتنې

1- يوه دويمه درجه يو مجهوله معادله وليکئ چې حل و نه لري.

2- لاندې معادلې حل کړئ.

$a)\ x^2-1=0 \qquad b)\ x^2=0$

غیر خطي اړیکې(رابطې)



ډاکټران د یوه ماشوم د ونې(قد)اوږدوالی په بېلابېلو وختونو کې، په مخامخ ګراف کې ښيي. ایا تاسې تر اوسه پورې، د خپلې ونې(قد) د اوږدوالي بدلون ته سوچ کړی دی، چې په بېلابېلو وختونو کې څومره وو؟

فعالیت

- د یوې مربع د ضلعې د اوږدوالي او مساحت تر منځ اړیکه په پام کې ونیسئ، د مربع د ضلعې اوږدوالی، په x او مساحت يې په y ښیو.
- د x او y اړیکه، په یوه معادله کې وښیئ.
- مخامخ جدول پوره کړئ.

x	1	2	3	4	
y		4			25

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې، د پورتنیو مرتبو جوړو ټکي وټاکئ او له یو بل سره يې ونښلوئ.
- د دقیق ګراف رسمولو لپاره، x ته ډېر سره نږدې قیمتونه ورکوو، لاندې جدول پوره کړئ، د پورته په څېر ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ او ګراف يې رسم کړئ.

x	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y		0.4			1				3.24	4					9

- د پورتني جدول په مرسته، لاندې جدول، په خپلو کتابچو کې بشپړ کړئ.

x	−3	−2.8	−2.6	−2.4	−2.2	−2	−1.8	−1.6	−1.4	−1.2	−1	−0.8	−0.5	−0.2	
$y = x^2$															0

- له پورتنیو جدولونو څخه، په ګټه، د $y = x^2$ معادلې ګراف، په ډېر غورسره رسم کړئ.

له پورتني فعالیت څخه، لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په پورتني فعالیت کې مو ولیدل، چې د $y = x^2$ معادلې گراف کرښه نه ده.

مثال: د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x+1 \end{cases}$ سیستم معادلاتو گراف، د قایمو مختصاتو په سیستم کې رسم کړئ او ګډ حل یې پیدا کړئ؟

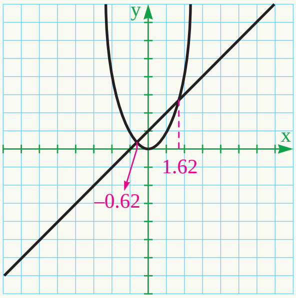
حل: له هغو لارو څخه، چې مخکې مو د گراف د رسمولو لپاره ترې ګټه واخیسته، د پورتنیو معادلو د گرافونو د رسمولو لپاره، د هغو د عددونو د مرتبو جوړو جدولونه ترتیب او د مختصاتو په سیستم کې، د معادلو له ټاکلو نه وروسته یې، گرافونه رسموو.

- د $y = x^2$ لپاره لرو:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

- د $y = x+1$ لپاره:

x	0	1
$y=x+1$	1	2



د گراف له مخې، د ګډ حل د ټکو ورنژدې قیمتونه یې، مساوي په:

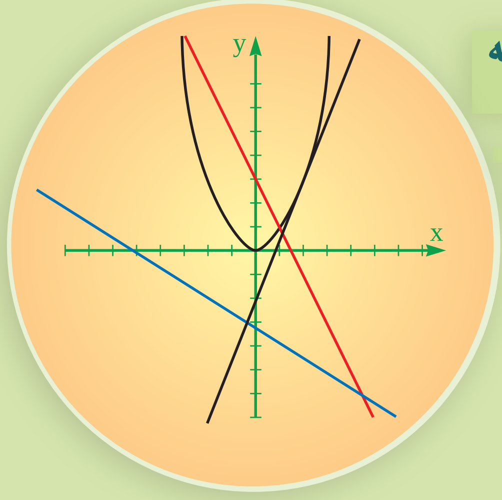
$$x_1 = 1.62 \ , \ x_2 = -0.62$$

پوښتني

د لاندې سیستمونو گراف رسم کړئ.

1- $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x-2 \end{cases}$

2- $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$



د دويمي درجې معادلې حل، په هندسي لاره(طريقه)

په مخامخ شکل کې، مستقيمې کرښې، لـه ورکړل شـوي منحنـي سـره، په څو حالتونو کې دي؟

فعاليت

- ايا د $x^2-6x+7=0$ معادله کولای شو، چې داسې $x^2=6x-7$ وليکو؟
- که چيرې نوموړی مسـاوات، له y سـره مساوي وي، $y=x^2=6x-7$ نو $y=x^2$ او $y=6x+7$ دی.
- د $\begin{cases} y=x^2 \\ y=6x-7 \end{cases}$ معادلو د سيستم ګراف، د مختصاتو په سيستم کې رسم کړئ؟
- د پورتني سيستم ګرافونه، يو بل په څو ټکو کې پرې کوي؟
- د پورتني سيستم حل، د ګرافونو د پرېکړې له ټکو سره څه اړيکه لري؟

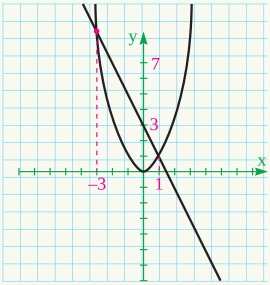
له پورتني فعاليت څخه، لاندې پايله په لاس راځي:

- هره دويمه درجه معادله کولای شو، چې د $y=x^2$ معادلې او د $y=ax+b$ کرښه ايزو معادلو په څېر وليکو.
- د x ټکی د پرېکړې مختصه(په هغه حالت کې چې وي) د دويمې درجې معادلې حل دی د پورتنۍ کړنې په مرسته، د دويمه درجه معادلې حل پيدا کول، د هندسي حل په نامه يادېږي.

لومړی مثال: د $x^2+2x-3=0$ معادلې حل په هندسي لاره پيدا کړئ؟

حل: د $x^2+2x-3=0$ معادله کولای شو، په لاندې ډول وليکو او ګراف يې رسم کړو.

$$x^2=-2x+3 \Rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ y=-2x+3 \end{cases}$$



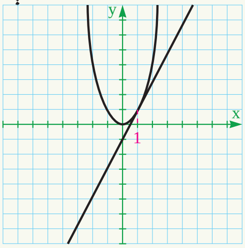
x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

x	0	3
y	3	–3

له شکل څخه ليدل کېږي، چې مستقيمه کرښه منحني په دوو بېلو ټکو کې پرې کوي، چې د پرېکړې ټکي د x مختصه د دويمه درجه معادلې حل، دی يعني $x_1=-3$, $x_2=1$

دويم مثال: د $x^2+2x+3=0$ معادلې حل د هندسي لارې په مرسته پيدا کړئ؟

حل: د $y=x^2$ معادلې او د $y=2x-1$ مستقيمې کرښې شکلونه رسموو.



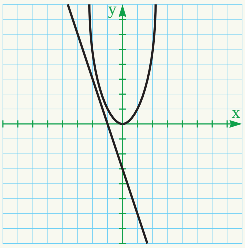
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9

x	0	–1
y	–1	-3

ليدل کېږي چې کرښه له منحني سره په يوه ټکي کې مماس ده، چې ددې د x نقطې مختصه (قيمت) د معادلې حل دی.

دريم مثال: د $x^2+3x+3=0$ معادلې حل په هندسي لاره پيدا کړئ.



$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=3x-3 \end{cases}$$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9

x	0	–1
y	–3	0

ليدل کېږي، چې مستقيمه کرښه، منحني نه پرېکوي، نو دويمه درجه معادله حل نه لري.

يادونه:

که چېرې منحني په دوو ټکو کې پرې کړي، معادله دوه حله لري.

که چېرې منحني په يوه ټکي کې پرې کړي، معادله يو حل لري.

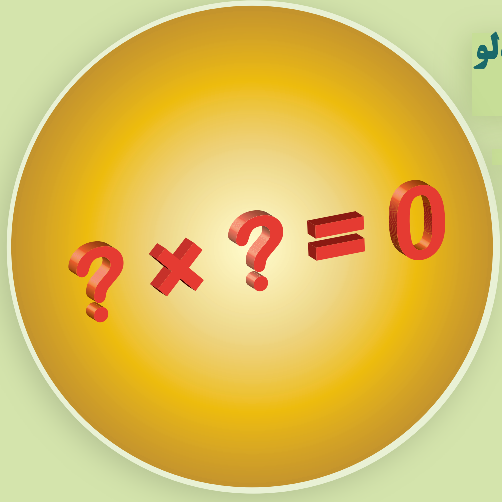
که چېرې منحني قطع يا غوڅه نه کړي، معادله حل نه لري.

پوښتنې

1– د لاندې معادلو، حل په هندسي لاره(طريق) پيدا کړئ.

a) $x^2-2x+2=0$ b) $x^2-6x+8=0$ c) $x^2-5+7=0$

د یو مجهول دویمه درجه معادلو حل، د تجزیې په لاره(طریقه)



د دوو عددونو د ضرب حاصل، څه وخت مساوي په صفر دی.

فعالیت

- که a او b دوه حقیقي عددونه وي، څه وخت $a \times b = 0$ کېږي.
- د $(x-1)(2x+3)$ د ضرب حاصل، په پام کې ونیسئ، ایا ویلای شئ، چې څه وخت، دا حاصل ضرب مساوي په صفر دی؟
- د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادله، له $(x-1)(2x+3)$ حاصل ضرب سره څه اړیکه لري؟
- د مخکینی لارې(طریقې) څخه په ګټه اخیستنې سره، د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادلې حلونه پیدا کړئ او د $(x-1)(2x+3) = 0$ معادلې له حلونو سره یې پرتله کړئ؟

د پورتني فعالیت پایله، په لاندې ډول په لاس راوړو:

پایله: که وکړای شو، چې دویمه درجه معادله، د دوو خطي افادو د ضرب د حاصل په شکل واړوو، نو په دې حالت کې، د معادلې حل ساده کېږي، چې په لاندې ډول عمل کوو:

- د اعدادو له خاصیتونو څخه پوهېږو چې د دوو عددونو د ضرب حاصل، هغه وخت صفر دی، چې یو د هغوی له ضربي اجزاوو څخه یو مساوي په صفر وي، دا مسأله د الجبري افادو لپاره هم سمه ده.

- د هرې خطي یا کړښه ایزې الجبري افادې حل، چې د یوې دویمې درجې معادلې مساوي ده، د دویمې درجه معادلې حل دی.

لومړی مثال: د $x^2-7x+6=0$ معادلې حل، د تجزيې په مرسته، په لاس راوړئ.

حل: د x^2-7x+6 له تجزيې څخه لرو چې:

$$x^2-7x+6=(x-1)(x-6)=0$$

د نوموړې ضرب حاصل، هغه وخت صفر دی، چې يو د هغو فکتورونو څخه مساوي په صفر وي او يا دواړه صفر وي؛ يعنې:

$$1)\ \ x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1$$

$$2)\ \ x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=6$$

نو 1 او 6 د $x^2-7x+6=0$ معادلې حلونه دي.

دويم مثال: د $2x^2-5x-3=0$ معادلې حل، د تجزيې په لاره(طريق) پيدا کړئ.

حل: تر اوسه مو هغه معادلې په فکتورونو تجزيه کړې، چې د x^2 ضريب (1) وو خو د هغو معادلو، چې د x^2 ضريب يې يو نه وي، په لاندې ډول يې بدلوو، د دې لپاره چې، د x^2 ضريب يوه کامله مربع شي، د معادلې دواړه خواوې، د x^2 په ضريب کې ضربوو:

$$A=2x^2-5x-3$$

$$2A=4x^2-10x-6=(2x)^2-5(2x)-6$$

$$2A=(2x+1)(2x-6)$$

$$A=\frac{1}{2}(2x+1)(2x-6)$$

$$A=(2x+1)(x-3)$$

او د A د معادلې د حل لپاره لرو:

$$1)\ \ 2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{1}{2}$$

$$2)\ \ x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=3$$

پوښتنې

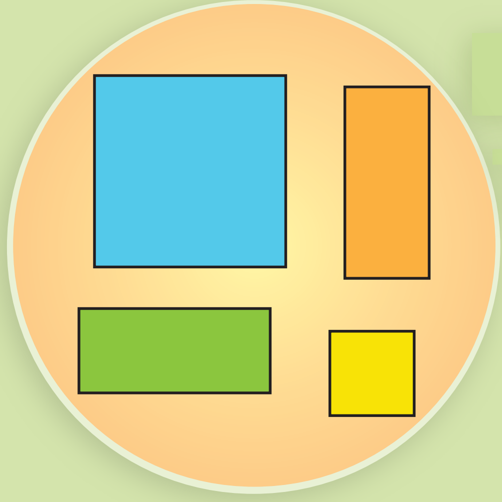
لاندې معادلې، د تجزيې په لاره(طريقه) حل کړئ.

1) $x^2+4x+3=0$

2) $x^2+x-2=0$

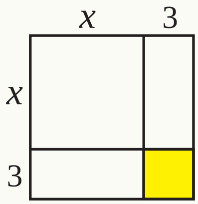
3) $x^2-6x+8=0$

د دويمې درجې معادلې حل د تکميل مربع په طريقه



هڅه وکړئ، چې د دې شکلونو په يو ځای کيدو سره يوه لويه مربع جوړه کړئ.

فعاليت



- د لويې مربع د ضلعې اوږدوالی، څومره دی؟
- د هرې برخې مساحت، د شکل په مخ وليکئ.
- د $x^2+6x-40=0$ معادله داسې ترتيبوو، چې متحول لرونکې حدونه، يو اړخ او ثابت عددونه د مساوات بل اړخ ته نقلوو.
- متحول لرونکي الجبري افاده له رنګ شوي مساحت سره، څه اړيکه لري؟
- د مستطيلونو د مساحت عددي ضريب، د دويمه درجې معادلې د x له ضريب سره څه اړيکه لري؟
- د لويې مربع مساحت څومره دی؟
- د دې لپاره چې، د متحول لرونکې الجبري افادې، د لويې مربع د مساحت سره برابره شي، کوم عدد، د تساوي دواړو خواوو ته ورزيات کړو؟
- د پورته لاس راغلې اړيکې، څخه د قيمت (د دويمې درجه معادلې حل) په لاس راوړو.

محمد بن موسی دا لاره(طريقه)، د دويمې درجې معادلې لپاره پيدا کړله. د دې طريقې په پوره کيدو سره، د دويمې درجې معادلو په حل کې، په بشپړه(عمومي) توګه ګټه اخيستل کېږي، په دې تګلاره(روش) کې، د $x^2+bx+c=0$ دويمه درجه معادله، په $(x+p)^2=q^2$ بڼه بدلېږي، چې د تجزيې پراوونه يې عبارت دی له:

• لومړی p د x د ضریب له نیمايي سره وضع کوو، یعنې $P=\frac{b}{2}$

• وروسته $q^2=-c+(\frac{b}{2})^2$ وضع کوو.

• په پای کې، د q $x+p=q$ معادله لرو.

لومړی مثال: د $x^2+2x-8=0$ معادله، د تکمیل مربع په تګ لاره حل کړئ؟

حل: لومړی، معادله په لاندې ډول لیکو:

$$x^2+2x=8$$

د x د ضریب نیمايي، په لاس راوړو، مربع یې له دواړو خواوو سره جمع کوو:

$$x^2+2x+1=8+1$$
$$(x+1)^2=9$$
$$x+1=3$$
$$x=2$$

یادونه: ټولې دویمه درجه معادلې، نه شو کولای، په دې تګ لاره حل کړو، ځکه دا لاره، هندسي تعبیر ته اړتیا لري، نو ځکه په دې لاره نه شو کولای، د هغو معادلو حل، چې منفي جذرونه لري هم په لاس راوړو.

پوښتنې

لاندې معادلې، د تکمیل مربع په تګ لاره حل کړئ؟

a) $x^2+8x-24=0$ b) $x^2-x-\frac{5}{4}=0$ c) $x^2-6x-13=0$

د محمد بن موسی فورمول یا د تکمیل مربع طریقې د حل پراختیا:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

د $ax^2+bx+c=0$ معادلې دواړه خواوې، د x^2 په ضریب ووېشئ او وواياست، چې مخامخ مساوات حقيقت لري، که نه؟

ومو ليدل، چې دويمه درجه معادله، په عمومي ډول داسې $ax^2+bx+c=0$ ليکو، چې په هغې کې b, a او c حقيقي عددونه او a د صفر خلاف يو عدد دی، د دې معادلې د حل لپاره داسې عمل کوو:

- د $ax^2+bx+c=0$ معادلې دواړه خواوې، په a وېشو: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
- ثابت عددونه، د مساوات يو خوا او مجهول حدونه، د مساوات بلې خوا ته سره نقلوو، د x د ضريب د نيمايي مربع دواړو خواوو ته جمع کوو:

$$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-(\frac{c}{a})$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

د لنډې ليکنې لپاره b^2-4ac په Δ سره ښيوو.

فعاليت

هره دويمه درجه معادله، چې $ax^2+bx+c=0$ بڼه ولري، لاندې پوښتنو ته ځوابونه ووايئ:

1- که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي، نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

2- که $\Delta=b^2-4ac>0$ وي، نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

3- که $\Delta=b^2-4ac<0$ وي، نو د حلونو د لرلو په صورت کې د معادلې حلونه کوم دي.

د پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

لومړۍ پايله: د $ax^2+bx+c=0$ دويمې درجه معادلې، چې b, a او c حقيقي $a\neq 0$ وي.

د $\Delta = b^2 - 4ac$ چې د قاسمې په نوم يادېږي، له مخې لرو:

1- که $\Delta > 0$ وي، معادله دوه بېلابېل حلونه لري، چې عبارت دي له:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2- که $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مساوي يا مضاعف حلونه لري، چې عبارت له: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

3- که $\Delta < 0$ وي، معادله د حقيقي عددونو په سېټ کې حل نه لري.

دويمه پايله: د حلونو د جمع او ضرب حاصل

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

د جذرونو د جمع او د ضرب له حاصل څخه کولای شو، د دويمې درجه معادلې په تجزيه کولو کې ګټه واخلو.

لومړی مثال: د $x^2 - 3x + 1 = 0$ معادلې حلونه پيدا کړئ.

حل: لومړی د Δ قيمت پيدا کوو: $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4\times1\times1 = 5$

څرنګه چې، $\Delta > 0$ ده نو معادله دوه بېلا بېل حلونه لري.

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

دويم مثال: د $9x^2 - 12x + 4 = 0$ حلونه پيدا کړئ.

حل: لرو چې: $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - (4\times9\times4) = 144 - 144 = 0$

څرنګه چې، $\Delta = 0$ ده، معادله دوه مساوي حلونه لري:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2\times9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

دريم مثال: د $5x^2 + 2x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: نوموړې معادله د حقيقي عددونو په سېټ کې حل نه لري، ځکه $\Delta < 0$ څخه ده يعنې

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times5\times1 = 4 - 20 = -16$

څلورم مثال: د $4x - 3x - 1 = 0$ معادلې د جذرونو د جمع او ضرب حاصل پيدا کړئ.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad , \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$$

پوښتنې

لاندې معادلې حل کړئ

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $3x^2 - 12x + 60 = 0$

د اووم څپرکي لنډيز:

- د دويمې درجه معادلې عمومي بڼه، د $ax^2+bx+c=0$ ، چې $a\neq 0$ ډول ده.
- هغه معادلې، چې د $ax^2+c=0$ او $ax^2+bx=0$ په ډول وي، د دويمې درجې نيمګړې معادلې په نامه يادېږي.
- د $ax^2+bx=0$ معادلې حل، عبارت دی له $x_1=0$ او $x_2=-\frac{b}{a}$.
- هره دويمه درجه معادله، له دوو برخو(مستقيمه کرښه او يوه منحني) جوړه شوې ده.
- که يو مستقيم منحني په دوو ټکوو کې پرېکړي، معادله دوه حله لري.
- که يو مستقيم له منحني سره مماس وي، معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که مستقيمه کرښه، له منحني سره پريکړه ونه لري، معادله په حقيقي عددونو کې حل نه لري.
- د دوو قوسونو د ضرب حاصل، هغه وخت مساوي په صفر دی، چې لږ تر لږه يو يې مساوي په صفر وي.
- د حلونو، د جمع حاصل له دې اړيکې څخه $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ او د حلونو د ضرب حاصل له دې اړيکې $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ څخه په لاس راځي.
- په بشپړ ډول، د هرې دويمې درجې معادلې جذرونه يا حل $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ فورمول څخه په لاس راځي، چې $\Delta=b^2-4ac$ دی.
- که چيرې $\Delta>0$ وي، معادله دوه بېلابېل حلونه لري.
- که چيرې $\Delta=0$ وي، معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که چيرې $\Delta<0$ وي، معادله د حقيقي عددونو، په set کې حل نه لري.
- د دويمه درجه معادلې د تشکيل لپاره ده $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$ يا $(x-x_1)(x-x_2)=0$ څخه ګټه اخلو.

د اووم څپرکي پوښتنې

● په لاندې سوالونو کې، هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $4x = 3x^2$ معادلې b, a او c ضريبونه عبارت دي له:

الف) $a = 3\ ,\ b = 4\ ,\ c = 1$ ب) $a = -3\ ,\ b = 4\ ,\ c = 1$

ج) $a = 4\ ,\ b = 3\ ,\ c = -1$ د) هيڅ يو.

2- د $3x^2 - 8x + 5 = 0$ معادلې حلونه عبارت دي له:

الف) $x_1 = 1\ ,\ x_2 = \frac{5}{3}$ ب) $x_2 = 1\ ,\ x_1 = -\frac{5}{3}$

ج) الف او ب د) هيڅ يو.

3- د $y = x^2$ معادلې ګراف عبارت دی له:

الف) مستقيم دی. ب) منحني دی.

ج) الف او ب. د) هيڅ يو.

4- د $x^2 - 10x + 16 = 0$ معادلې د حلونو د جمع حاصل برابر دی له:

الف) $x_1 + x_2 = 5$ ب) $x_1 + x_2 = -5$

ج) $x_1 + x_2 = 8$ د) $x_1 + x_2 = 10$

5- که $\Delta > 0$ څخه وي معادله:

الف) دوه مساوي حلونه لري. ب) دوه حقيقي او مختلف حلونه لري.

ج) حل نه لري. د) يو حل لري.

● تش ځايونه ډک کړئ:

1- د يو مجهوله دويمه درجه معادلو عمومي بڼه .... ده.

2- $-\frac{b}{a}$ د حلونو .... او $\frac{c}{a}$ د حلونو .... دی.

3- که .... وي، معادله حل نه لري.

4- که د معادلې درجه دوه وي، معادله .... لري.

5- د $x^2 - x + 0.25 = 0$ معادلې حلونه .... او .... دی.

• لاندې پوښتنې ولولئ د سم په مخ کې(س) او د ناسم په مخ کې(ن) کلیمه ولیکئ.

1 - (   ) که $b^2 - 4ac < 0$ وي، معادله د حقیقي عددونو په set کې حل نه لري.

2 - (   ) د محمد بن موسی فورمول $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ دی.

3 - (   ) د $2x^2 - 4x = 0$ معادلې یو حل، صفر دی.

4 - (   ) د دویمې درجه معادلې د تشکیل لپاره $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ څخه گټه اخلو.

5 - (   ) که چیرې په یوه دویمه درجه معادله کې، د علامو تحول نه وي، نو معادله یو منفي حل لري.

• لاندې پوښتنې حل کړئ:

1- په لاندې معادلو کې b, a او c ضریبونه و ښیئ او وواياست، کومه معادله بشپړه او کومه معادله نیمگړې ده.

$a)\ 3x^2 - 4x + 1 = 0$ $b)\ 3x^2 - 1 = 0$ $c)\ 2x^2 - 6x = 0$

2- د لاندې معادلو حل پیدا کړئ.

$a)\ 3x^2 + x - 4 = 0$ $b)\ x^2 + 4x - 32 = 0$ $c)\ 6x^2 - x - 2 = 0$

3- لاندې معادلې، د تجزیې په لار(طریقه) حل کړئ.

$a)\ 3x^2 - 3x - 4 = 0$ $b)\ x^2 + 4x - 32 = 0$

$c)\ x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3 = 0$ $d)\ cx^2 - 2acx + ca^2 = 0$

4- لاندې معادلې، په هندسي تگ لاره حل کړئ.

$a)\ 2x^2 + 7x - 1 = 0$ $b)\ x^2 - 2x + 1 = 0$

5- د لاندې معادلو حل، د تجزیې په طریقه حل کړئ.

$a)\ 4x^2 + 3x - 1 = 0$ $b)\ x^2 + \dfrac{x}{5} = \dfrac{6}{5}$

$c)\ 2x^2 + 3x + 1 = 0$ $d)\ x^2 + 3x = 0$

6– له عمومي فورمول څخه په ګټې اخیستنې سره، لاندې معادلې حل کړئ.

$a)\ 7x^2-8x+1=0$ $\qquad b)\ x^2-3x+2=0$

$c)\ t^2-0.27+0.6t=0$

7- که دیوه مستطیل مساحت $20cm^2$ او اوږدوالی د سور دوه برابره وي، د مستطیل اوږدوالی او سور پیدا کړئ.

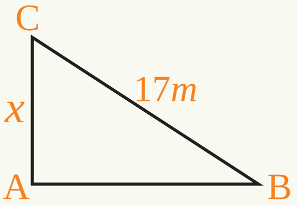
8- که د یوه قایم الزاویه مثلث د قایمو ضلعو اوږدوالی $2a$ او $2a+1$ وي، د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

9- که دیوه مستطیل مساحت $24cm^2$ او محیط یې $36cm$ وي، اوږدوالی او سور یې پیدا کړئ؟

10- هغه معادلې ولیکئ، چې حلونه یې په لاندې ډول دی.

$a)\ -2,0.5$ $\qquad b)\ 3,-1$ $\qquad c)\ 0,2$ $\qquad d)\ \sqrt{2}-1,2$

11-دوه تنه بایسکل چلوونکي، د A ټکي څخه یو ختیځ لور ته او بل شمال لورته حرکت وکړ، په هغه وخت کې، چې د دوی تر منځ واټن $17m$ دی، هغه بایسکل چلوونکی چې ختیځ لور ته حرکت کړی دی $7m$ زیات واټن له هغه تن څخه، چې شمال لور ته حرکت کړی، طی کړی دی. هغه الجبري معادله، چې د هغې له مخې وکړای شو، چې وهل شوی واټن د هر یوه بایسیکل چلوونکی ولیکئ.



اتم څپرکی

احصائیه

د ډېټا (Data) د صنف کولو لاره

ايا تاسي په خپل ټولګي کې، تر ټولو جګه ونه لرئ؟ که چيرې فلپين او يا اندونيزيا ته ولاړ شئ، څنګه؟

تاسي په کومه کچه، په يوه هېواد کې جګ او په بل هېواد کې لنډ ونې شمېرل کېږئ، معيارونه مو کوم دي؟

فعاليت

د يو شمېر کورنيو شمېر، چې په څو کليو کې پرتې دي، د کليو په اړه يې په لاندې ډول ليکل شوې اطلاعات په لاس راغلي:

52	49	40	42	45	53	35	38	40	43
51	55	38	39	44	37	46	41	50	56

غواړو، دا راکړل شوې ډېټا data، په دريو صنفونو کې داسې ځای پر ځای کړو، تر څو پوه شو، چې کوم کلي ډېر، منځني او کم وګړي لري.

- ايا کولای شو، چې يو يا څو ورکړل شوې ډېټا data له منځه يوسئ؟
- تر ټولو لويې او تر ټولو کوچنۍ کورنۍ پيدا کړئ؟
- د لړو او ډېرو ډېټاګانو data تر منځ وسعت (پراخوالی) څومره دی؟
- دا وسعت، د صنفونو په شمېر ووېشئ. سوچ وکړئ، دا عدد څه شی راښيي؟
- له عددونو څخه په ګټې اخيستنې سره جدول ډک کړئ.
- ميله يي ګراف يې رسم کړئ.

د کورنيو شمېر	د کليو شمېرf
35 - 41	
42 - 48	
49 - 56	

د ډېټا data د صنف بندي کولو لپاره لاندې ګامونه، په وار سره تر سره کړئ.
- د ډېټاګانو د زيات مقدار او کم مقدار وسعت په لاس راوړئ.
- دا وسعت د دستو په تعداد وويشئ او د صنفونو اوږدوالی په لاس راوړئ، که چيرې حاصل يې طبيعي عدد نه وي، کولای شئ هغه(round up)کړئ.
- له دې مقدارونو څخه صنفونه جوړ کړئ.

مثال: په لاندې جدول کې، د 30 روغتونونو ناروغان، چې په اټکلي ډول نيول شوي، داسې راغلي دي:

152	151	152	160	157	140	161	165	163
164	166	170	172	174	154	146	153	149
172	175	165	172	170	169	146	158	177
160	165	168						

دا ډېټا، په څلورو صنفونو کې ځای پر ځای کړئ.
- که چيرې د ناروغانو شمېر، په يوه روغتون کې، له 175 څخه زيات وي، هغه روغتون ته ازدهامي(ګڼه ګوڼه) يې روغتون وايي. څو روغتونونه ازدهامي(ګڼه ګوڼه) يې دي.
- د ازدهام (ګڼه ګوڼې) د پرتله کولو لپاره، ميله يي ګراف رسم کړئ.

حل: د دې لپاره، چې ډاډه شوو، ټول ارقام په يوه جدول کې ځای پر ځای کوو او تر ټولو زيات او تر ټولو کم ارقام يې، په لاس راوړو.

$140 =$ ترټولو ټيټ رقم

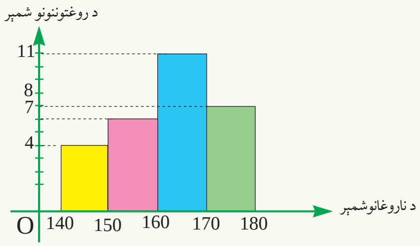
$177 =$ تر ټولو لوړ رقم

لوړ رقم − ټيټ رقم $= 177 - 140 = 37$

د صنفونو د اوږدوالي دپيدا کولو لپاره، دا وسعت د صنفونو په شمېر وېشو $\frac{37}{4} = 9.25$ له دې عدد څخه، د صنف په وسعت (پراخوالی) کې ګټه اخلو، اما د کار د اساني لپاره، دا عدد رونډ اپ په پام کې نيسو، چې په دې ډول، د صنف وسعت (پراخوالی) د(10) عددپه لاس راځي.

د ناروغانو شمېر	د روغتونونو کثرت f	د صنفونو وسطx	f · X
140 − 150	4	144.5	4 × 144.5 = 578
150 − 160	7	154.5	7 × 154.5 = 1081.5
160 − 170	11	164.5	11 × 164.5 = 1809.5
170 − 180	8 n = 30	174.5	8 × 174.5 = 1396

$$\overline{X} = \frac{578+1081.5+1809.5+1396}{30} = \frac{4865}{30} = 162.1$$



پاملرنه وکړئ، که چیرې د صنف پراخوالی پورته خوا پوره په پام کې و نه نیسـو، یعني روندېاپ(Round up) یـې نـه کړو، د صنفونـو د پراخوالی مجموعه، لـه 37 څخه لږ په لاس راځي، چې په دې ډول، یو شمېر ډېټا له جدول څخه خارجیږي او دا سم کار نه دي.

په ځینو وختونو کې، د صنفونو د شمېر(ګروپونو) پر ځای، د صنفونو پراخوالی موږ ته پېژندل شوی وي، په دې حالت کې، د صنفونو شمېر موږ ته اهمیت نه لري. د صنفونو د پراخوالي په لرلو سره، داسې لیکو چې، د هغو پراخوالی د فرض شویو صنفونو سره برابر وي او وروسته یې جدول پوره کوو.

مثال: په پورتني مثال کې، که د صنفونو پر ځای د صنفونو پراخوالی 8 فرض کړو، اوسط یې پیدا کړئ؟

حل: ټیټ رقم یعني 140 څخه پیل کوو. څرنګه چې، د صنف پراخوالی 8 دی، د دوو لاندې پرله پسې سرحدونو تر منځ واټن، باید 8 وي، یعني د دویم صنف لاندنی سرحد، باید 148 وي. اته، اته تر هغه زیاتوو، تر څو ډېره ډېټا په جدول کې ځای پر ځای شي په دې توګه، تر پایه دوام ورکوو.

د ناروغانو شمېر	د رغتونونو شمېر f	دصنفونواوسطx	f · x
140 – 147	3	143.5	430.5
148 – 155	6	151.5	909
156 – 163	6	159.5	957
164 – 171	9	167.5	1507.5
172 – 179	6 n = 30	175.5	1053

$$\overline{X} = \frac{430.5+909+957+1507.5+1053}{30} = 161.9$$

پوښتنې

1– لاندې ډېټا د 20 زده کوونکو د رسېدلو وخت په دقيقو له کوره تر ښوونځی راښيي:

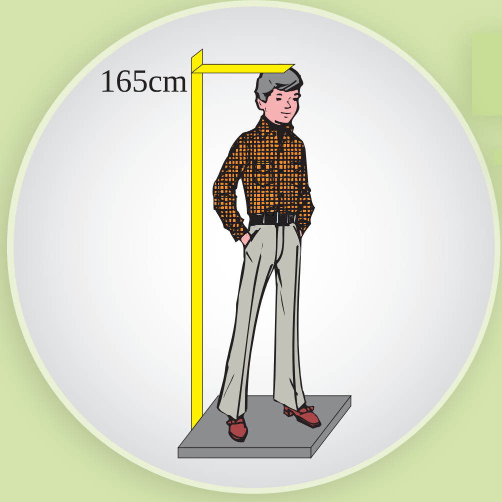
33	65	50	10
23	11	5	48
32	26	26	37
19	13	7	17
22	21	43	29

- پورتنی ډېټا په اووه گروپو کې صنف بندي کړئ؟
- د هر صنف کثرت پيدا کړئ.
- ميله يي گراف يې رسم کړئ.
- کـه چيـرې ډېټا په هغو گروپونـو کې، چې دصنف پراخوالی يـې، 10 وي، کېږدو، د کثرت جدول يې جوړ کړئ.

2– يـو مثال راوړئ، چې ډېټـا د صنف بندي لپاره، د صنفونو له پراخوالي څخه گټه اخيسـتل شوې وي.

3–د موضوع د خبرلو لپاره يو مثال ورکړئ چې د ډېټا د صنف بندي لپاره، د صنفونو له شـمېر څخه گټه اخيستل شوې وي.

د نښتو یا متصلو ډېټا صنف بندي



که چیرې له تاسې څخه پوښتنه وشي، چې ونه (قد) مو څومره جګه ده، څه ځواب ورکوئ. که ستاسو قد په متر اندازه شي ستاسو له اټکل سره به څومره سمون ولري؟

فعالیت

• که له تاسې څخه پوښتنه وشي، چې څو وروڼه لرئ، څه وایئ؟ ایا کولی شئ، ادعا وکړئ چې د دغه ډول سوال په ځواب او یا نورو عمومي پوښتنو، چې لا ټیک وسایل مو لرلي، کولای مو شول چې د خپلو هم صنفانو د ورونو شمېر په ټیک ډول و وایئ.
• ناڅاپي متحول مو څه شی دی او له کومو ډولونو څخه دی.
• که ستاسې یو دوست ووایي، د قد اوږدوالی یې 156 سانتي متره دی، ایا د ونې(قد) اوږدوالی یې، پوره 156 سانتي متره دی؟
• د 15 زده کوونکو د قدونو اوږدوالی، وروسته له پوښتنې څخه، داسې ورکړل شوی دی.

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	132	146

لاندې جدول بشپړ کړئ:

د زده کوونکو شمېر f	د زده کوونکو د ونې جګوالی
	130 – 140
	140 – 150
	150 – 160

• په سوچ ووایئ، چې ولې د 140 عدد یو وار، د صنفونو د پورتنې سرحد په څېر او یو وار د صنفونو د لاندینې سرحد په څېر راوړل شوی دی؟
• که چیرې د یوه سړي د قد اوږدوالی 140 سانتي متره وي، څه سوچ کوئ چې په کوم صنف کې به وي؟

که چیرې یو نښتي یا متصل متحول ولرو، د اطلاعاتو په صنف بندۍ کې، د یوه صنف پورتنی سرحد به، له کوزني سرحد سره برابر وي، د قرارداد له مخې، که ډیټا د پورتني صنف سره برابره وي، په وروسته سرحد کې لوېږي.

مثال: د 25 ډول ډول موټرونو چټکتیا، په لاندې ډول احصائیه نیول شوې ده:

32	35	38	47	44	48	28
30	40	36	51	52	54	31
27	32	42	52	31	29	29
54	49	37	43			

• د کثرت جدول یې ډک کړئ.

• که چیرې په ښار کې د چلولو پرمهال مجاز سرعت، په یوه ساعت کې 30 کیلومتره وي، څو موټرونه د چټکتیا له مجاز سرعت څخه زیات چلیدلي دي؟

• د صنفونو د کثرت د جمع حاصل څو دی؟ دا عدد له څه شي سره برابر دی؟

حل: څرنګه چې، سرعت یو متصل متحول دی نو جدول د نښتي یا متصل متحول لپاره جوړوو. د 30 عدد په دویم صنف کې او د 40 عدد په دریم صنف کې لوېږي، د صنفونو د کثرت جمع، له $n = 4+9+7+5 = 25$ سره برابره ده چې د موټرونو له شمېر سره مساوي ده او (21) موټرونه، له خپل جواز څخه چټک چلیدلي دي.

سرعت	تعداد f
20 – 30	4
30 – 40	9
40 – 50	7
50 – 60	5
	25

پوښتنې

1- لاندې ډیټاګانې، چې د 34 زده کوونکو د هوش ضریب، د ښوونځي په اول کال کې راښیي، په پام کې ونیسئ:

86	108	108	111	111	103	108	101	88
91	103	105	105	112	96	111	107	96
92	100	112	112	92	89	95	90	105
111	95	108	77	106	90	77		

د 4 صنفي جدول په جوړولو سره، د صنفونو د کثرت د جمع حاصل، د صنفونو مرکز او د data اوسط پیدا کړئ.

وزني اوسط يا منځنۍ قيمت
(Weighted Mean)

که څوك ښه کار سرته ورسوي، انعام يې
نظر کوم عدد ته څو برابره دی؟

فعاليت

اوريدلي مو دي، چې هغه زده کوونکی، چې دولسم ټولګی پای ته ورسوي، دکانکور ازموينه په څلورو خانګو کې، له خاصو ضريبونو سره سرته رسوي او د هغې د نمرو په اساس، د پوهنتونونو بيلابيلو پوهنځيو ته وېشل کېږي. اټکل کوو، چې د دوو زده کوونکو د کانکور نمرې په لاندې ډول دی:

مضمون	ژبه او ادبيات د 3 په ضريب	ټولنيز علوم د 2 په ضريب	طبيعي علوم د 3 په ضريب	رياضي د 4 په ضريب
ضريب	3	2	3	4
لومړی زده کوونکی	61	66	62	61
دويم زده کوونکی	61	66	62	60

مضمون	د دويم زده کوونکي نمرې	ضريب
رياضي	60	4
طبيعي علوم	62	3
ټولنيز علوم	66	2
ژبه او ادبيات	61	3

مضمون	د لومړي زده کوونکي نمرې	ضريب
رياضي	61	4
طبيعي علوم	62	3
ټولنيز علوم	66	2
ژبه او ادبيات	61	3

- د دواړو زده کوونکو د نمرو منځنۍ يا وسطي قيمت پيدا کړئ.
- د کوم مضمون نمرې، په منځنۍ يا وسطي قيمت ډېره اغيزه لري، ولې؟
- د کوم مضمون نمرې، په منځنۍ يا وسطي قيمت لږ اغيزه لري، ولې؟
- که د زده کوونکو د رياضي د مضمون په نمرو 5 نمرې او همدارنګه د ټولنيزو علومو په مضمون 5 نمرې ور زياتې شي، منځنۍ يا وسطي قيمت، په کوم حالت کې ډېر بدلون مومي.

که چیرې ډېټا په ځانګړی ضریب سره ورکړل شوې وي، دا په دې معنا ده، چې د ډېټا اغېزه یوشان نه ده، بلکې د هغې له ضریب سره تړاو لري. په دې حالت کې، د ضریبونو د کثرت جدول، د ډېټا د کثرت په عنوان حسابېږي او په W سره ښودل کېږي. په لاس راغلي اوسط ته، وزني اوسط وایي:

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$ وزني اوسط

مثال: په ځینو پوهنتونو کې نمرې، د تورو په اساس، لکه D, C, B, A او F اعلانېږي، په دې پوهنتونو کې، د A ارزښت څلور، د B ارزښت درې، د C ارزښت دوه، د D ارزښت یو او د F ارزښت صفر وي، یوه محصل لاندې نمرې اخیستې دي.

مضمون	نمرې	د کریډتونو شېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	B	3
ژبه	A	1

– د دې محصل د نمرو اوسط څو دی؟

حل:

مضمون	حرفي نمره	د کریډتو شمېر =x	عددي نمرې =w	W · X
ریاضیات	B	3	3	3 × 3 = 9
فزیک	A	3	4	4 × 3 = 12
کیمیا	C	2	2	2 × 2 = 4
بیولوژی	B	3	3	3 × 3 = 9
ژبه	A	1	4	4 ×1 = 4

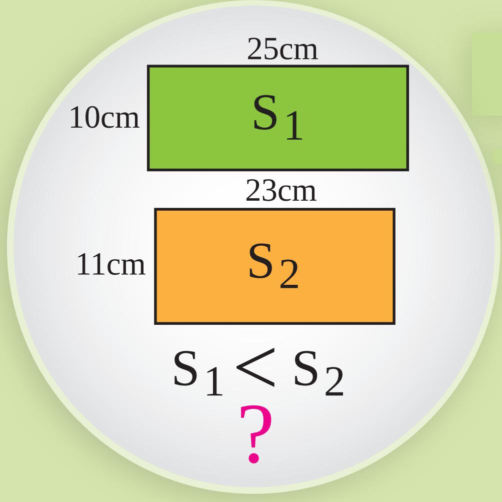
$n = 12$ د کریډتونو شمېر

$$\bar{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$ وزني اوسط یا منځنی =

پوښتنې

که د کانکور په یوه ازموینه کې، د یوه زده کوونکي نمرې، په ترتیب سره 65, 61, 53 او 70 او ضریبونه یې، په ترتیب سره 3,2,1,1 وي، د دې زده کوونکي د نمرو اوسط حساب کړئ؟

مستطيلي ګراف
(Histogram)

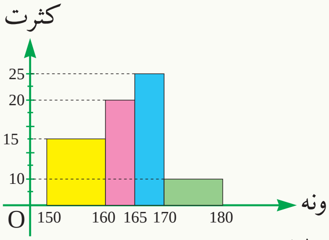


که د یوه مستطیل اوږدوالی 25 سانتي متره او سور يې 10 سانتي متره او دبل مستطیل اوږدوالی 23 سانتي متره او سور يې 11 سانتي متره وي، د دې دواړو مستطیلونو مساحتونه پیدا او یو له بل سره يې پرتله کړئ.

فعالیت

دیوه ښوونځي د 70 زده کوونکو د ونې(قد) اندازه، په لاندې ډول، په جدول کې ورکړل شوې ده:

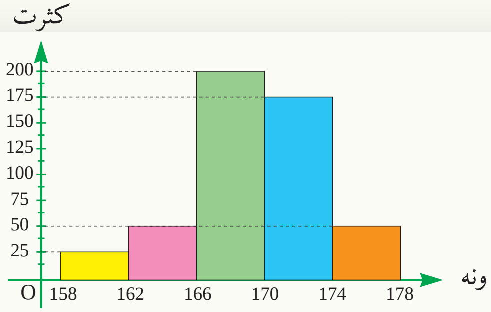
ونه په سانتي	150 – 160	160 – 165	165 – 170	170 – 180
کثرتf	15	20	25	10



- په پورتني ګراف کې، د مستطیلونو قاعدې څه شی راښيي؟
- د هر مستطیل مساحت په لاس راوړئ. د مستطیل مساحت څه شی راښيي.
- د مستطیلونو جګوالی(ارتفاع) څه شی راښيي؟
- پورتنی ګراف، له میله يي ګراف سره څه توپیر لري.

یو ځل بیا د یوه ښوونځي د 500 زده کوونکو ونې (قد)، چې اندازه يې په لاندې جدول کې ورکړ شوې ده، په پام کې ونیسئ:

ونه په سانتي متر	158 – 162	162 – 166	166 – 170	170 – 174	174 – 178
کثرتf	25	50	200	175	50



- جدول ته په پاملرنې سره، د مستطيل قاعده څه شی راښيي؟
- د مستطيل اوږدوالی څه شی راښيي؟
- ميله يي ګراف، له پورتني ګراف سره څه توپير لري؟

د نښتو يا متصلو ډيټا د ښودلو لپاره، د مستطيلي ګراف څخه ګټه اخلو، په دې ګراف کې، د مستطيل عرض، د صنفونو له پراخوالی سره برابر دی. په مستطيلي ګراف کې مساحتونه، د هر صنف کثرت راښيي، چې په اسانۍ يو له بل سره د مقايسې وړ دي.

که د صنف پراخوالی، يو له بل سره برابر وي، کولای شو، د مساحتونو پر ځای راساً کثرت پرتله کړو په دې حالت کې عمودي محور، کثرت راښيي.

مثال: د يوه ټولګي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې راکړل شوی دی:

د زده کوونکو وزن په کیلوګرام	40 - 45	45 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 90
د زده کوونکو شمیر	4	6	12	8	8

دلته ليدل کېږي، چې د صنفونو واټن (فاصلې) مساوي نه دي، د مستطيلي ګراف له رسمولو څخه مخکې، لازمه ده چې، د مستطيلونو جګوالی(ارتفاع) يوه ګډه واټن ته په پام کې نيولو سره د ټولو صنفونو لپاره پيدا کړو، په دې مثال کې $5Kg$ ګډ يا مشترک دی نو کولای شو، چې ټول پنځه واړه واحده، د x په محور په يوه واحد وښيو:

د $40-45$ صنف لپاره يو واحده.

د $45-50$ صنف لپاره يو واحده.

د $50-60$ صنف لپاره دوه واحده.

د $60-70$ صنف لپاره دوه واحده.

د $70-90$ صنف لپاره څلور واحده.

د مستطیلونو د عمودي اوږدوالي د پیدا کولو لپاره، د صنفونو کثرت، د صنفونو په پراخوالي وېشو:

$$40-45 \rightarrow \frac{4}{1}=4 \rightarrow \frac{4}{5}=0.8$$

$$45-50 \rightarrow \frac{6}{1}=6 \rightarrow \frac{6}{5}=1.2$$

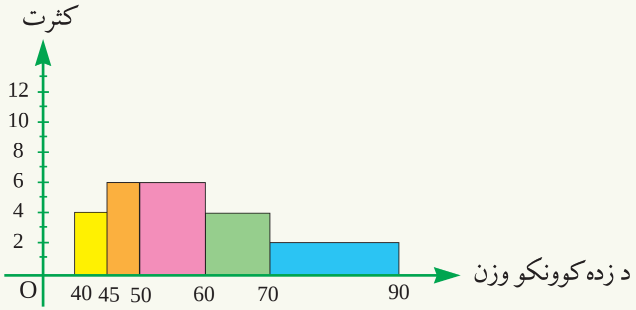
$$50-60 \rightarrow \frac{12}{2}=6 \rightarrow \frac{12}{10}=1.2$$

$$60-70 \rightarrow \frac{8}{2}=4 \rightarrow \frac{8}{10}=0.8$$

$$70-90 \rightarrow \frac{8}{4}=2 \rightarrow \frac{8}{20}=0.4$$

اوس په لاس راغلي پایلې، په لاندې جدول کې ترتیب او د راکړل شوي مثال، مستطیلي گراف رسموو:

د زده کوونکو وزن په Kg	40-45	45-50	50-60	60-70	70-90
کثرت نظر واحد فاصلې ته	4	6	6	4	2



پوښتنې

1- لاندې جدول، د يوه روغتون د هغو ټاکلو ورځو د ناروغانو شمېر راښيي، چې په روغتون کې بستر شوي دي:

د ورځو شمېر	1 - 5	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21- 25
د ناروغانو شمېرf	12	10	16	18	14	8

ـ د پورتني جدول مستطيلي ګراف رسم کړئ؟

2- د يوه ټولګي د 50 زده کوونکو، د IQ (ذکاوت) په ازموينه کې ګډون کړی دی، چې پايلې يې په لاندې ډول دي:

115	113	109	118	92	130	112	114	117	122
127	107	108	113	124	112	111	106	116	118
121	107	118	118	110	124	115	103	100	114
104	124	116	123	104	135	121	126	116	110
94	134	98	129	102	103	107	113	117	112

– نومورو، ډېټا ته د کثرت جدول جوړ کړئ. د دې جدول لپاره ۷ ګروپونه داسې په پام کې ونيسئ، چې د صنفونو پراخوالی يې مساوي وي.

– د دې ډېټا مستطيلي ګراف رسم کړئ.

– خه پايلې اخلئ.

دايره وي گراف

مخامخ شکل، د لرگي يوه کنده ده، هغه کرښې، چې ددې لرگي په مقطع کې وينئ، د څه شي شکل ته ورته دي؟

فعاليت

د افغانستان د ښوونې او روزنې وزارت، په 1387 کال کې، لاندې ارقام د ښوونځيو د زده کوونکو د شمېر په اړه خپاره کړي دي: د ابتدايي زده کوونکو شمېر 250000 د منځنيو ښوونځيو د زده کوونکو شمېر 200000 او د ثانوي زده کوونکو شمېر 150000 دی.

- که د هرې ډېټا نسبتي کثرت، په 360° درجو کې ضرب کړو، هره دوره به څو درجې وي؟
- يوه دايره رسم او مرکزي زاويې يې د لاس ته راغلو عددونو په اندازه ښکاره کړئ. د هرې زاويې دننه د اړونده تحصيلي دورې نوم وليکئ.
- يو عنوان، د گراف لپاره و ټاکئ او د گراف لاندې يې وليکئ.
- په دايروي گراف کې څه، څه سره پرتله کېږي؟
- د دايرې په کوچنې کېدو يا لويېدو سره، په دايروي گراف کې څه توپير راځي؟

له پورتني فعاليت څخه پوه شو چې کولای شو، ډېټا د دايرې په مرسته وښيو. د يو ناڅاپي يا اتفاقي متحول د ډېټا ښودل، د دايرې په مرسته د دايروي گراف په نامه يادېږي، په دايروي گراف کې لومړی د هر صنف کثرت د ټولې ډېټا په شمير تقسيم او وروسته يې په 360° کې ضربوو، چې د صنفونو مرکزي زاويه راښيي؛ يعنې:

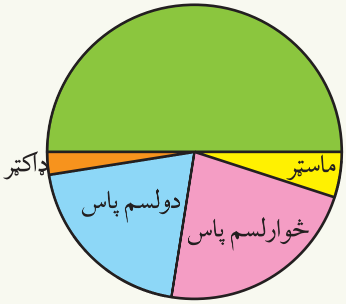
$$\text{له جنسه درجې د کثرت} = \frac{\text{د ډېټا کثرت}}{\text{د ټولو ډېټا شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال: یوه مؤسسه، چې د کارکوونکو شمېر یې 200 او د تحصیل د درجې له مخې وېشل شوي دي:

د تحصیل درجه	ډاکټر	ماستر	لیسانس	څوارلسم پاس	دولسم پاس
د کارمندانو شمېر f	5	10	100	45	40

د دې ډېټا دایروي گراف، په لاندې ډول دی.

د تحصیل درجه	کثرت f	مرکزي زاویه د درجې له جنسه
ډاکټر	5	$\frac{5}{200} \times 360° = 9°$
ماستر	10	$\frac{10}{200} \times 360° = 18°$
لیسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360° = 180°$
څوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360° = 81°$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360° = 72°$



پوښتنې

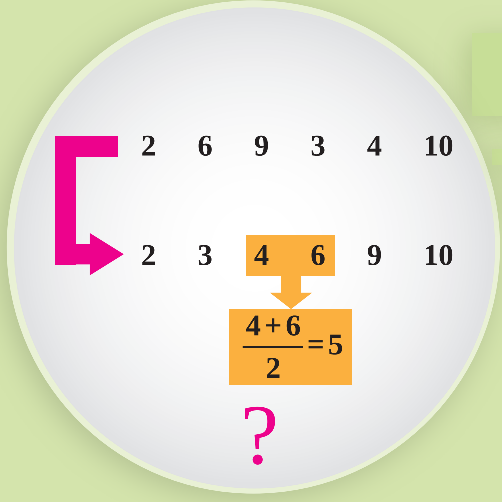
- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره، د کورنیو د وېش دایروي گراف، د جمعیت له مخې رسم کړئ؟

د کورنۍ نوع	ډېر جمعیت سره	منځنۍ جمعیت	لږ جمعیت	جمع
د کورنۍ شمېر f	11	23	6	40

- دایروي گراف، د څه ډول متحول لپاره مناسب دی.

- که د ډېټا کثرت دوه برابره کړو، ایا مرکزي زاویه یې بدلون مومي؟

میانه
(Median)



که له تاسي څخه وپوښتل شي، چې د نومرو اوسط مو څو دی؟ له اوسط څخه ګټه اخلئ. که له تاسي څخه وپوښتل شي، چې هغه نمرې، چې ستاسو په اطلاعنامه کې ډېرې تکرار شوي دي، څو دي؟
که له تاسي پوښتنه وشي، چې تاسي د شو زده کوونکو په منځ کې یاست، که د کمزورو زده کوونکو په منځ کې، تاسي دې سوال ته څه ځواب ورکوئ؟

فعالیت

- سوچ وکړئ؟ د((میاني)) لغت یعنې څه؟
- که یو شمېر ډېټا ولرو، څرنګه کولای شو، د هغو وسطي مقدار پیدا کړو.
- که د ډېټا شمېر طاق وي، ایا وسطي مقدار د ډېټا په میانه کې شته دی؟
- که د ډېټا شمېر جفت وي، ایا وسطي مقدار د ډېټا په میانه کې شته دی؟
- ایا کولای شو، وسطي مقدار، پرته له ترتیب کولو د ډېټا په لاس راوړو.
- که د ډېټا مقدار جفت وي، اټکل کولی شئ چې څه مقدار، د وسطي مقدار په عنوان وټاکو.
- لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ:

2 3 5 1 4

– وسطي مقدار یې پیدا کړئ؟
– د ډېټا شمېر، د وسطي مقدار نه وروسته، د مخکینۍ ډېټا، له شمېر سره څه اړیکه لري؟
– لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

2 3 5 1 4 5

– یو وسطي عدد پیدا کړئ چې د ډېټا شمېر یې وروسته او د مخکنې له هغه عدد د ډېټا له شمېر سره برابر وي.

د ډیټا له ترتیبولو څخه وروسته، هغه عدد چې له هغه نه وروسته، د ډیټا شمیر او له هغه نه مخکې د ډیټا له شمیر سره برابر وي، میانه بلل کیږي. که چیرې د ډیټا شمیر طاق وي، نو منځنۍ ډیټا له میاني څخه عبارت ده. خو که چیرې د ډیټا شمیر جفت وي، نو میانه د دوو منځنیو ډیټاګانو له وسط څخه

عبارت ده.

مثال: د 5 کورنیو میاشتنی عاید، د افغانی له مخې، په لاندې ډول راکړل شوي دي:

10000 7000 4000 6000 3000

ددې data میانه حساب کړئ.

حل: لومړی data مرتب کوو:

3000 4000 6000 7000 10000

ليدل کېږي، چې د 6000 عدد د عددونو په وسط(منځ) کې قرار لري نو 6000 د پورتنی data میانه ده.

دويم مثال: د لاندېdata میانه وټاکئ.

2 6 9 3 4 10

حل: د میانې د حسابولو لپاره عددونه (data) ترتیب کوو.

2 3 4 6 9 10

ليدل کېږي، چې د data منځ کې داسې عدد نشته، چې د میانې خاصیت صدق کړي، نو که چیرې تاسې $5 = \frac{4+6}{2}$ په پام کې ونیسئ چې د میانې ځانګړتيا پکې صدق کوي او دا عدد د پورتنی ډیټا میانه ده، چې د 5 څخه وروسته، د ډیټا شمېر له 5څخه مخکې د ډیټا له شمير سره برابر دی.

پوښتني

1- د ډيټا لاندې دوه ګروپونه، په نظر کې ونیسئ او د هغوی میانه پیدا کړئ:

1 , 2 , 3 او 0 , 2 ,100

2- لاندې ډیټا راکړل شوی ده، د دغې ډیټا میانه پیدا کړئ.

5 ,15 , 4 , 0 , 12 , 15 , 5 , 6 , 5 , 0

3- که له ټولو ډيټا وو سره، يو ثابت عدد جمع شي، د میانې په مقدار کې څه اغیزه منځ ته راځي په يوه مثال کې يې وښيئ.

4- که ډيټا دوه برابره کړو، د میانې په مقدار کې څه اغیزه کوي، په يوه مثال کې يې وښياست.

د تحول ساحه
(Range)

د خپلو هم ټولګیوالو قد مو اندازه کړئ.
د تر ټولو لوړ قد او تر ټولو ټیټ قد تر منځ توپیر حساب کړئ، که چیرې وغواړئ، چې د زده کوونکو د قدونو ترمنځ، تر ټولو زیات توپیر پیدا کړئ، ایا لازمه ده، چې د نورو زده

فعالیت

کوونکو قدونه اندازه کړئ.
د اووم ټولګي د 10 زده کوونکو او لسم ټولګي د 10 زده کوونکو د قدونو لوړوالی، چې په اتفاقي ډول ټاکل شوي، په لاندې ډول دي:

د اووم ټولګي زده کوونکي : 142 ,145 ,146 ,148 ,148 ,148 ,149 ,149 ,150 , 152

د لسم ټولګي زده کوونکي : 150 ,151 ,153 ,156 ,158 ,158 ,159 ,160 ,160 , 160

- د دواړو ګروپونو د لوړو او ټیټو قدونو تر منځ توپیر پیدا کړئ.
- ایا د دواړو ګروپونو د عددونو تر منځ توپیر یو شان دی؟
- که چیرې ډېټا و نه لرو، ایا د ډېټا د لړو او ډېرو توپیرونو په لرلو سره، د دې ګروپونو په اړه موږ کولای شو، چې سره پرتله یې کړو.
- ایا د بدلون یا تحول د ساحې برابروالي، په دواړو ګروپونو کې د ډېټا د یوواولي په مانا دی؟
- د نمونې د تعریف په پاملرنې سره، که داګروپونه، د ټولنې په عنوان په پام کې ونیسو په نمونه کې د واټن د اوږدوالي زیاتوالی، په ټولنه کې د واټن د اوږدوالي د زیاتوالي پایله راکوي.

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو، چې د هغه واټن اوږدوالی، چې متحول په هغې کې د بدلون امکان لري، د تحول د ساحې په نامه یادیږي. دا معیار، د تر ټولو لویې او د تر ټولو کوچنۍ ډېټا ترمنځ وسعت را په ګوته کوي.پاملرنه باید وشي، چې په یوه ټولنه کې د تحول د ساحې لوی والی، په هغه ټولنه کې د تیت والي یا پراګندګي ډېر والی دی. هر څومره چې دا تیت والی کم وي، د وګړو پراګندګي کمه ده. د یوې ټولنې وګړې، د دې ځانګړتیا له مخې یو بل ته نږدې دی که د تحول ساحه صفر وي، که د وګړو د څېرنو د ځانګړتیاوې سره برابري او یو شان وي په دې حالت کې ټولنه یوه متجانسه ټولنه بولو.

مثال: د دوو زده کوونکو، د $4\frac{1}{2}$ میاشتنی ازموینې نمرې، په لاندې ډول دی:

الف: 20 , 21 , 25 , 32 , 33 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39

ب : 20 , 33 , 34 , 35 , 35 , 35 , 34 , 34 , 35 , 39

• د دواړو صنفونو د تحول ساحه پیدا کړئ.

• ایا د ډېټا تیت والی یا پراګندګي په لومړي او که په دویم ګروپ کې کمه ده.

حل: د دواړو ګروپونو د تحول ساحه یو برابر ده.

$$39 - 20 = 19$$

د دویم ګروپ د ډېټا تیت والی یا پراګندګي لږ ده، ځکه په ډېټا کې، د 34 او 35 عددونه زیات تکرار شوي دي، واټن يې کم دی، ولې پراګندګي په لومړي ګروپ کې ډېره ده، د تحول ساحه یوازې له لږو او زیاتو مقدارونو سره کار کوي. د ډېټا په اړه او د هغوی تر منځ هېڅ اطلاعات موږ ته نه راکوي. نو د تحول د ساحې په لرلو سره نشو کولای، د ډېټا د میانې د پراګندګي د میزان اټکل وکړو.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

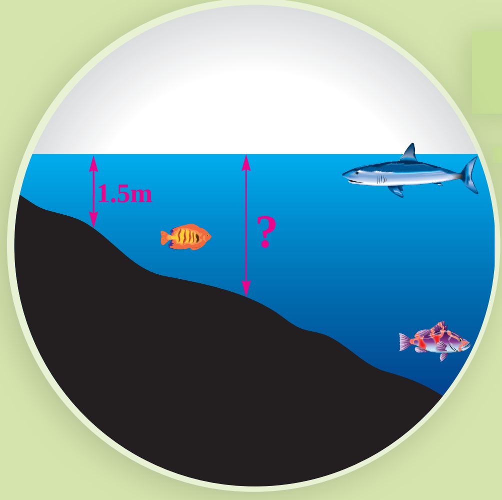
1 ,2 ,5 ,6 ,6 ,7 ,8 ,9 ,10 ,11 ,15

• ددې ډېټا د تحول ساحه پیدا کړئ.

• که د پورتنی data، تر ټولو زیات او کم data له منځه یوسو، د تحول ساحه يې پیدا کړئ؟

• دا دواړه د تحول ساحه یو له بل سره پرتله کړئ او ووایاست، چې د کوم یوه پراګندګي زیاته ده.

د انحراف اوسط
(Average deviation)



که د یوه سیند د یوه ټکي ژوروالی 1.5 متره وي، سوچ وکړئ، چې د سیند د ټولو ټکو ژوروالی یو شان دی؟

فعالیت

پنځو تنو زده کوونکو، په یوه صنفي ازموينه کې، لاندې نمرې اخيستې دي.

20 18 16 14 12

- د دې نمرو اوسط او یا منځنی قیمت پیدا کړئ.
- د ټولو ډېټا د اوسط توپیر پیدا کړئ.
- د هرې ډېټا د اوسط د توپیر د جمع حاصل ولیکئ.
- د هرې ډېټا د اوسط د توپیر د مطلقه قیمتونو د جمع حاصل پیدا کړئ.
- په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کړئ.
- تاسې په خپله د 5 ډېټاګانو یو مثال وړکړئ او پورتنۍ عملیې پرې سر ته ورسوئ.

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو، هغه توپیر، چې د ډېټا او اوسط تر منځ دی، د منځني یا اوسط انحراف په نامه یادېږي.

د data د منځنی یا اوسط انحراف مجموع، همېشه صفر ده. په دې دلیل د data د څېړنې لپاره، د انحراف د مطلقه قیمت څخه ګټه اخلو. که د ټولو انحرافونو د مطلقه قیمت جمع کړو او د data په شمېر یې وویشو، د انحراف اوسط یا منځنی ورته ویل کېږي، د لاندې فورمول په مرسته حسابېږي:

$$\text{د انحراف اوسط یا منځنی} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

دلته $X_1, X_2 \ldots X_n$ عبارت له data او $\bar{X}$ د ډېټا منځنی یا اوسط او n د ډېټا شمېر دی، لیدل کیږي، چې هر څومره د منځنۍ انحراف لوی وي ، نو په هم هغه اندازه، د data د پراګندګي له اوسط نه ډېره ده.

مثال: د 40 تنو زده کوونکو نمبرې، په لاندې جدول کې ورکړل شوي دي.

کثرت	نمرې
2	0 – 10
7	10 – 20
4	20 – 30
5	30 – 40
10	40 – 50
12	50 – 60

د پورتنیو نمبرو د انحراف منځنی پیدا کړئ؟

حل: لومړی د اوسط یا منځنی مقدار په لاس راوړو.

f(x − x̄)	x − x̄	f · x	د داتاګانو اوسط	f= کثرت
2 × (–32.5) = –65	5 – 37.5 = –32.5	10	5	2
7 × (–22.5) = –157.5	15 – 37.5 = –22.5	105	15	7
4 × (–12.5) = –50	25 – 37.5 = –12.5	100	25	4
5 × (–2.5) = –12.5	35 – 37.5 = –2.5	175	35	5
10 × 7.5 = 75	45 – 37.5 = 7.5	450	45	10
12 × 17.5 = 210	55 – 37.5= 17.5	660	55	12
		1500		1 n = 40

$$\bar{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

لیدل کیږي چې، د $f(x-\bar{x})$ د جمع حاصل له صفر سره مساوي ده، نو باید مطلقه قیمت یې سره جمع کړو.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|-65|+|-157.5|+|-50|+|-12.5|+|75|+|210|}{40}$$

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{65+157.5+50+12.5++75+210}{40} = \frac{570}{4} = 14.25$$

پوښتنې

د A او B دوو جمعیتونو انحرافونه، په لاندې ډول راکړل شوي.

د A جمعیت انحرافونه :	4	2	0	0	-1	-2	-3
د B جمعیت انحرافونه :	8	1	0	0	-2	-3	-4

- د A جمعیت د انحراف منځنی پیدا کړئ.
- د کوم جمعیت پراکندګي زیاته ده؟

د اتم څپرکي لنډيز

- صنف، د هغې ډېټا مجموعه ده، چې ګڼې ځانګړتياوې ولري. د ډېټا د صنف بندي لپاره، لاندې پراووته په پام کې نيسو:
  - د تحول ساحه: د ډېټا د ډېر لږو او ډېر زياتو مقدارونو تر منځ وسعت.
  - د صنف پراخوالی: د تحول د ساحې او د صنفونو د شمېر نسبت.
  - د صنفونو کثرت: د هغو ډېټاګانو د صنفونو شمېر، چې په هر صنف کې شته.
  - د صنف مرکز: د هر صنف د اوسط محاسبه.
- که په صنف بندۍ کې متحولونه نښتي يا متصل وي، د راتلونکي صنف پورتنی سرحد، د مخکيني صنف د لانديني سرحد سره برابر دی. په هغه حالت کې، چې ډېټا د صنف د پورتني سرحد سره برابر وي، هغه ډېټا په راتلونکي صنف پورې اړه لري.

د صنفونو د ډيټاګانو د شمير مجموعه، د ټولې ډېټا له شمېر سره برابره ده.

- فرض کوو، د $X_1, X_2 \ldots X_n$ ډيټاګانې، په ترتيب سره د $W_1, W_2 \ldots W_n$ ضريبونو لرونکي وي، دغه اطلاعات کولی شو، په لاندې جدول کې خلاصه کړو.

data	X_1	X_2	…	X_n
د ضريب (وزن)	W_1	W_2	…	W_n

- په دې حالت کې، د پورتنۍ ډېټا منځنۍ قيمت (اوسط) په لاندې ډول محاسبه کېږي:

$$\text{وزني اوسط} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots\ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots\ldots + w_n}$$

- هستوګرام يا مستطيلي ګراف، عبارت له هغه ګراف څخه دی، چې د کثرت توزيع يې، د مستطيلونو په مرسته ښودل کېږي.

د مستطيل جګوالی، د صنف له کثرت سره برابره دی.

د هر مستطيل مساحت، د صنفونو د پراخوالي او د صنف د کثرت له حاصل ضرب سره برابر دی.

په مستطيلي ګراف کې، مستطيلونه له يو بل سره ترلي او د ترليو(متصلو) متحولينو څخه، د ګراف د ښودلو لپاره ګټه اخلي.

• په یوه اختیاري شعاع، یوه دایره د مرکزي زاویې په مرسته، په n برخو وېشو، داسې چې، د هرې برخې د مرکزي زاویې اندازه، د کثرت له قیمت سره متناسبه وي، په دې حالت کې یې، مرکزي زاویه نظر لومړي صنف ته عبارت دی، له:

$$\text{کثرت د درجې له مخې} = \frac{\text{د ډېټا کثرت}}{\text{د ټولو ډېټا شمېر}} \times 360^{\circ}$$

• د میانې د پیدا کولو لپاره، په لومړی پړاو کې ډېټا منظم کوو او وروسته:

- که د ډېټا شمېر طاق وي، د ډېټا میانه له منځنی ډېټا څخه عبارت ده.

- که د ډېټا شمېر جفت وي، میانه د دوو منځنیو ډېټاګانو اوسط دی.

• د تر ټولو کوچنی ډېټا او تر ټولو لویي ډېټا ترمنځ توپیر، د تحول له ساحې څخه عبارت ده، یا په بل عبارت، ډېټا په هغه ساخته کې بدلون کوي.

• د هرې ډېټا د اوسط تفاضل ته، د منځني انحراف وایي.

د انحراف منځنی یا اوسط، د انحرافونو د مطلقه قیمت له اوسط څخه عبارت دی او فورمول یې د اړوندې ډېټا لپاره په لاندې ډول لیکو:

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

د اتم څپرکي پوښتنې:

1- لاندې جدول ډک کړئ.

صنف	کثرتf	د صنف مرکز	جمعي کثرت
7.5-10.5	12		
10.5-13.5	10		
13.5-16.5	15		

- پورتنی جدول، د کومې دسته بندۍ گراف راښیي. پیوسته یا نښتی یا مجزا؟

2- لاندې جدول، د 100 شل کلنو ځوانانو د ونو اوږدوالی راښیي.

صنف	کثرتf	د صنف مرکز
149.5-156.5	15	153
156.5-163.5	20	160
163.5-170.5	30	167
170.5-177.5	25	174
177.5-184.5	10	181

- مستطیلي گراف یې رسم کړئ؟

3- د A, B, C, D او E ښارونو کې، 200 میلیونه افغانۍ سرمایه په کار اچول شوې ده، داسې چې:

- د A ښار لپاره 110 میلیونه افغانۍ
- د B ښار لپاره 32 میلیونه افغانۍ
- د C ښار لپاره 24 میلیونه افغانۍ
- د D ښار لپاره 14 میلیونه افغانۍ
- د E ښار لپاره 20 میلیونه افغانۍ.

ورکړل شوی معلومات په جدول کې پوره او دایروي گراف یې رسم کړئ.

ښارونه	د سرمایې ویش په ملیون	سرمایه په فیصدې	سرمایه په درجه
A	110		
B	32		
C	24		
D	14		
E	20		

4- یو شمیر کورنی د خپلو غړو له شمیر سره، په لاندې جدول کې ورکړ شوې دي.

کورنی	18	12	15	8
د کورنۍ غړيf	2	4	5	8

● د کورنی موډ(Mode) پیدا کړئ.

● میانه یا منځنی پیدا کړئ.

● اوسط يې پیدا کړئ.

● د تحول ساحه محاسبه کړئ.

5- د یوه ټولګي د زده کوونکو د قدونو اندازه په لاندې جدول کې ورکړ شوي ده:

د قد اندازه	1.5-1.6	1.6-1.7	1.7-1.8	1.8-1.9	1.9-2
کثرتf	5	16	9	4	1

● د صنف موډ مشخص کړئ.

● د صنفونو مرکز حساب کړئ.

● اوسط يې پیدا کړئ.

6- یوه ښوونکی د یوې صنفي ازموینې د اوسط محاسبه داسې وکړه:

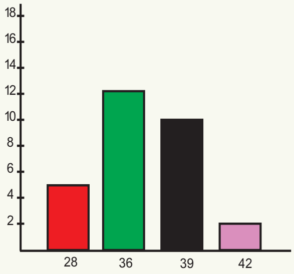
$$\text{د ازموینې اوسط} = \frac{1\cdot 4+3\cdot 6+2\cdot 8+7\cdot 9+3\cdot 10+3\cdot 11+5\cdot 12+1\cdot 15}{25}$$

● د ټولګي د زده کوونکو شمېر پیدا کړئ؟

● څو نمرې د 8 او 13 تر منځ قرار لري د (8 او 13 په ګډون)؟

● عمومي اوسط يې څو دی؟

7- لاندې میله يي ګراف، د هغو کتابونو شمېر راښیي، چې په یوه میاشت کې مطالعه شوی دی.



● احصائیوي جدول يې رسم کړئ.

● د مطالعه شویو کتابونو شمېر، په میاشت کې څو دی؟

8- که د تحول ساحه، له صفر سره برابره وي، له ډېټاګانو څخه څومره پایله اخلئ.

9- که په ډېټاګانو باندې یو ثابت مقدار علاوه کړو، د تحول ساحه څرنګه تحول کوي؟

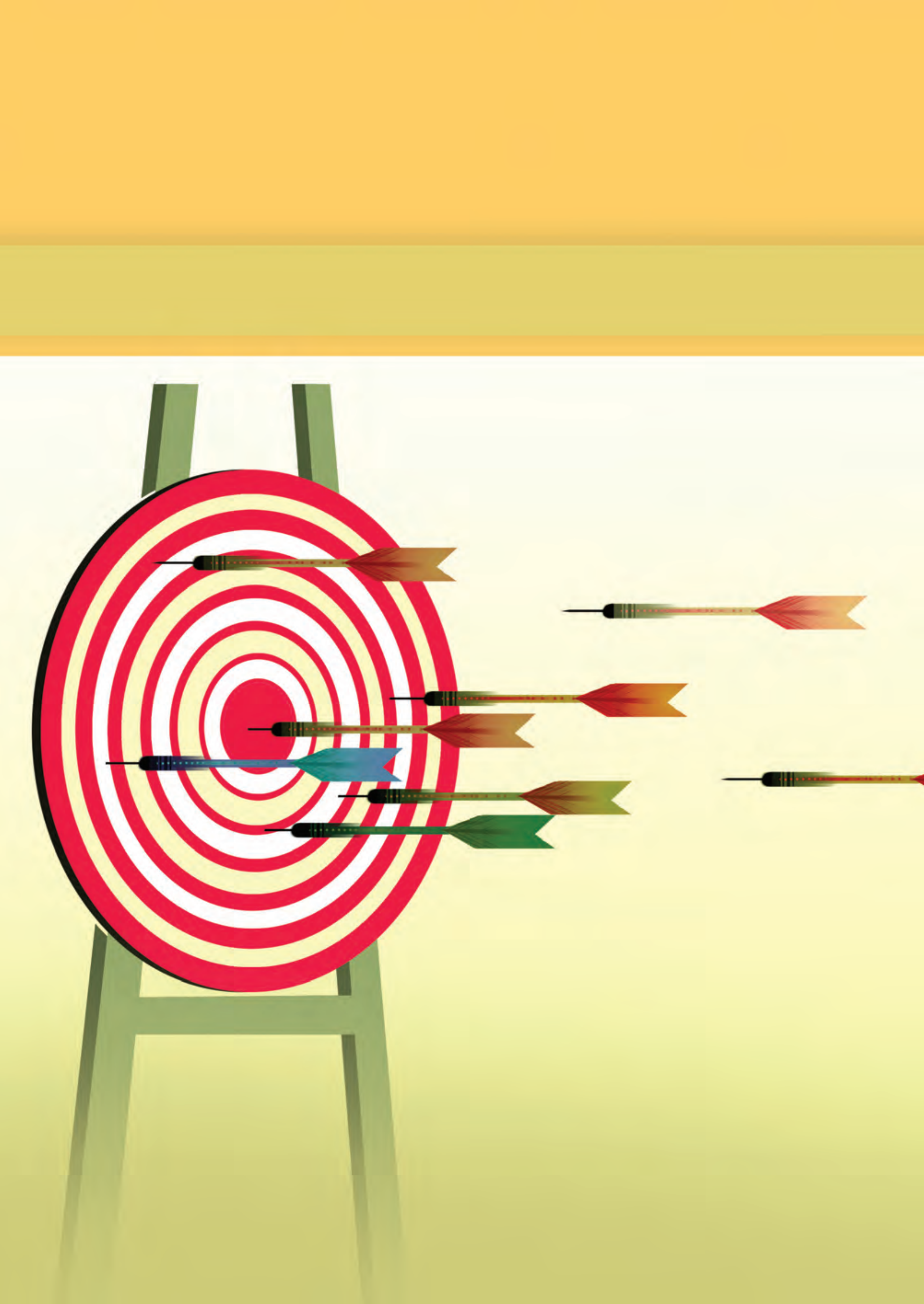
10- د څلورو زده کوونکو، د هغو ساعتونو شمېر، چې لوبو ته يې ورکړې دی، په لاندې ډول راغلی دی:

1 5 7 9

● د پورتنیو ډېټاګانو، د انحراف منځی یا اوسط حساب کړئ.

نهم څپرکی

احتمالات



د ناخاپو پېښنو اتحاد

په دوارو شکلونو کې، یو ځای څو هیلی وینئ. هیلی په کومه حلقه پورې اړه لري؟

فعالیت

- د یوې دانې رمل د اچولو په تجربه کې، د $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ نمونې فضا او د $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{4,5,6\}$ او $C=\{1,2\}$ ناخاپي پېښې په پام کې نیسو.
- د A او C ناخاپي پېښې، یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- که د A یا د B پېښې رامنځ ته شوې وي، ایا ویلی شئ چې د $A \cup B$ پېښه رامنځته شوې ده؟
- د A پېښه رامنځ ته شوې او بله کومه اختیاري پېښه، چې هېڅ پېښه شوې نه ده نا ممکنه یا ϕ پېښه نومول کېږي.
- ویلی شئ، چې د $A \cup \phi$ او د A پېښې یو د بل سره څه توپیر لري؟

د پورتني فعالیت پایلې، په عمومي ډول، د S په نمونه یي فضا کې، د B, A او C ناخاپي پېښو لپاره، په لاندې ډول په لاس راوړو.

پایله:

- که چیرې د S په یوه نمونه یي فضا کې، $A \subseteq B$ یوه ناخاپي پېښه وي، په دې حالت کې:

$$A \cup B = B$$

- که چیرې، د S په یوه نمونه یي فضا کې A او B ناخاپي پېښې وي، د $A \cup B$ او $B \cup A$ پېښې، یو له بل سره توپیر نه لري؛ یعنې:

$$A \cup B = B \cup A$$

- که چیرې، د S په یوه نمونه یي فضا کې، د A یا B یوه پېښه رامنځ ته شي، نو د $A \cup B$

پیښنه هم رامنځ ته شوې ده، او سربېره په دې

$$A \subseteq A \cup B \qquad \text{او} \qquad B \subseteq A \cup B$$

• د A پیښه، د S په نمونه يي فضا کې پیښه شوې ده او یوه بله پیښه چې هېڅ نه پیښیږي، یعني ϕ، په دې معنا ده، چې یوازې د A پیښه را منځ ته شوې ده.

$$A \cup \emptyset = A$$

• د $A \cup B$ ناخاپي پیښه، په دې معنا ده چې لږ تر لږه د A یا B پیښه منځ ته راغلې ده.

مثال: که چیرې د C ناخاپي پیښه، د A او B دوې بېلا بیلې ناخاپي پیښې په خپل ځان کې ولري، په دې حالت کې، د $A \cup B$ ناخاپي پیښه هم، په خپل ځان کې لري، په یوه مثال کې يي روښانه کړئ؟

حل: د $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ او $C = \{1,2,34\}$ پیښې په پام کې نیسو، لیدل کیږي، چې $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$ دی، نو:

$$B \cup A = A \cup B = \{1\,,\,2\,,\,3\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

پوښتنې

1- د S له یوې نمونه يي فضا څخه، د B, A او C د ناخاپي پیښو لپاره، د یو مثال(بېلګې) په مرسته، د لاندې اړیکو سم والی وڅیړئ.

a) $A \cup \emptyset = A$

b) $A \cup A = A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2- که $A \subseteq B$ وي، په یوه مثال کې وښیئ، چې $A \cup B = B$ دی.

3 - که چیرې، د A او $A \cup B$ ناخاپي پیښې سره برابرې وي، په یوه ګراف کې يي وښیاست، چې د A ناخاپي پیښه د B ناخاپي پیښه په بر کې لري.

د ناڅاپي پېښو تقاطع

د نور د اصلــي رنګونو له تقاطع څخه، کوم نور رنګونه لاسته راځي؟

فعاليت

- د رمل د يوې داني د اچولو نمونه يي فضا $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ او د $A=\{2,4,6\}$ ، $B=\{4,6\}$ او $C=\{1,3,5\}$ ناڅاپي پېښې په پام کې نيسو.
- د $A\cap B$ او $B\cap A$ ناڅاپي پېښې، يوه له بلې سره څه اړيکه لري؟
- ايا د A او B پېښې د $A\cap B$ ناڅاپي پېښه په بر کې لرلی شي، که نه؟
- دارا وښيئ، چې د $C\cap B$ ناڅاپي پېښه، يوه ناشوني پېښه ده.
- که د B پېښه، د A پېښه په ځان کې ولري، د A او $B\cap A$ ناڅاپي پېښې سره پرتله کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه کولای شو، لاندې پايلې، په عمومي ډول بيان کړو:

پايله:

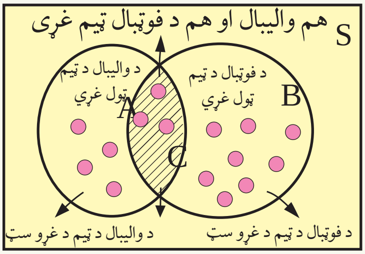
د S په يوه نمونه يي فضا کې، د B,A او C ناڅاپي(تصادفي) پېښو لپاره لرو:

- د $A\cap B$ او $B\cap A$ ناڅاپي، پېښې يو شان دي.
- د A او B هره ناڅاپي پېښه هره يوه يې د $A\cap B$ ناڅاپي پېښه په خپل ځان کې لري.
- که د A او B د دوه پېښو لپاره $A\cap B=\phi$ وي، په دې حالت کې، د A او B پېښې يوه له بله بېلې(مستقلې) پېښې بلل کېږي.
- د A پېښې لپاره لرو:

$$A\cap S=A \text{ ، } A\cap\emptyset=\emptyset$$

- که چېرې، د B پېښه د A پېښه په خپل ځان کې ولري، نو $A\cap B=A$ سره ده.

مثال: د یوه ښوونځي د فوټبال له ټیم څخه درې تنه، د ښوونځي د واليبال د ټيم غړي هم دي.
که چيرې د فوټبال د ټيم غړي په A، د واليبال د ټيم غړي په B او د دواړو ټيمونو ګډ غړي په C سره وښيوو، په دې حالت کې، د ستونو تر منځ اړيکه، د سټ د تيورۍ په ښه وليکئ:



$$A \cap B = C$$

ايا پوهيږئ چې د B د سټ په مکمله سټ کې، يعني $\overline{B}$ کې د واليبال د ټيم ټول غړي ګډون لري، که نه؟
نو د $\overline{B}$ په سټ کې ټول هغه زده کوونکي ګډون لري، چې د فوټبال د ټيم غړي نه دي. څرنګه چې، 3 تنه زده کوونکي د واليبال د ټيم غړي چې په عين حال کې د فوټبال د ټيم غړي هم دي، په $\overline{B}$ کې ګډون نه لري، نو په دې اساس، د واليبال ټيم، د $\overline{B}$ سټ په پام کې نيولو سره نيمګړی دی.

پوښتنې

1- د A, B ناڅاپي ښېښه د دياګرام په مرسته، د A او B د بېلابېلو حالاتو لپاره، چې د C ښېښه، د A او B ښېښې په خپل ځان کې لري، وښيئ او وضاحت ورکړئ؟
2- په يوه مثال کې د A, B او C ښېښې چې A او B په خپل ځان کې لري، وښيئ چې:

$$a)\ \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$b)\ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

3- لاندې ښېښې، په بيان سره وليکئ:

$$a)\ \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$b)\ \overline{A \cap B}$$
$$c)\ \overline{A \cup B}$$

بشپړ او مکمل سټ

که چیرې، S د افغانســتان ولایتونه، A د شــمال او B نــور پاتــې ولایتونه وي، نـو $S-A$ او $S-B$ کـوم ولایتونـه رانښیي؟

فعالیت

- رمل، یوې داني د اچولو نمونه یي فضا $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ او د $A=\{1,3,5\}$ ناخاپي پېښه په پام کې ونیسئ.
- د A د ناخاپي پېښې مکمله یعنې $\overline{A}$ کومه ناخاپي پېښه کېدلی شي؟
- یوه ناخاپي پېښه پیدا کړئ، چې A یې په بر کې ولري او په $\overline{A}$ کې شامله نه وی.
- ایا کولای شئ، د S له نمونه یي فضا څخه یوه پېښه پیدا کړئ چې په یو وخت کې، نه په A کې او نه په $\overline{A}$ کې ګډون ولري؟
- د A او $\overline{A}$ د ناخاپي پېښو اتحاد، له حتمي پېښې سره څه اړیکه لري؟
- د A او $\overline{A}$ پېښو تقاطع، د ناممکنې یا ناشونې پېښې سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه، لاندې پایله په لاس راځي:

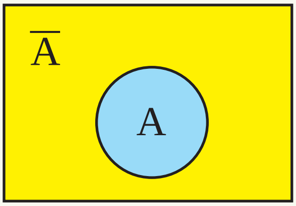
پایله: که چیرې S یوه نمونه یي فضا او A یوه ناخاپي پېښه وي:

- $\overline{A}$ یوه ناخاپي پېښه ده، چې په یوه وخت کې، د A سره نه پېښېږي.
- د A د هرې ناخاپي پېښې لپاره لرو چې:

a) $A\cup\overline{A}=S$

b) $P(A\cup\overline{A})=P(S)=1$

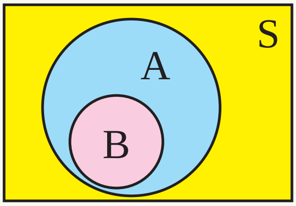
c) $P(\overline{A})=1-P(A)$

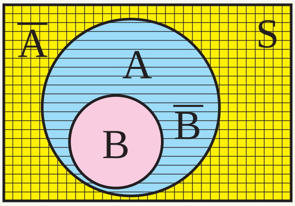


د S نمونه فضا

مثال: که د S په یوه نمونه یي فضا کې، د A ناخاپي پېښه، د B ناخاپي پېښه په خپل ځان کې ولري، په ګرافيکي ډول وښياست، چې د $\overline{B}$ ناخاپي پېښه، د $\overline{A}$ ناخاپي پېښه په خپل ځان کې لري؟

حل: څرنګه چې، $B\subseteq A$ دی، که چیرې مونږ په شکل کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ وښیوو، له لاندې رسم شوي شکل څخه په اسانۍ سره لیدل کیږي، چې: $\overline{A}\not\subset\overline{B}$





$\overline{B}$ افقي کرښې — $\overline{A}$ عمودي کرښې

پوښتنې

1- د یوه مثال او ګراف په مرسته، د S د نمونه یي فضا او د A او B ناخاپي پېښو لپاره وښیئ، چې:

a) $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$

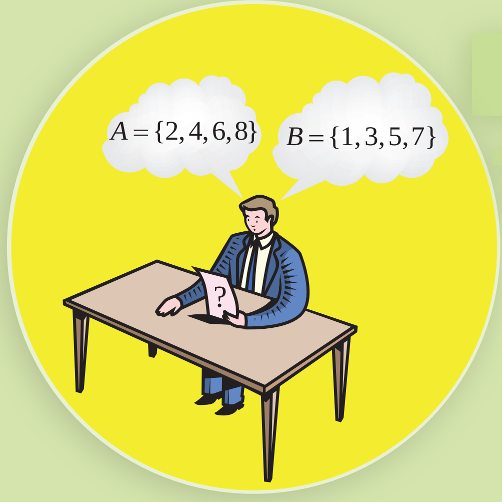
b) $\overline{S}=\emptyset$

c) $S=\overline{\emptyset}$

2- د S نمونه یي فضا او د A او B ناخاپي پېښو لپاره، لاندې پېښې، په عبارت سره ولیکئ.

a) $\overline{A}\cap\overline{B}$

b) $\overline{(A\cup B)}$

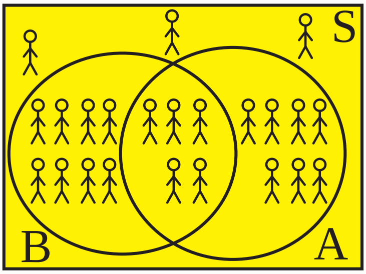


په ستونو مډل جوړونه

تر اوسه مو له الجبري یا هندسي قوانینو څخه، د ژوندانه د مسائلو په حل کې ګټه اخیستله. ایا سوچ مو کړئ چې د ستونو څخه هم کولای شو، چې د خپلو مسائلو د حل لپاره ګټه واخلو؟

فعالیت

د یوه ټولګی له 23 زده کوونکو څخه مو، د خویندو او وروڼو لرونکو زده کوونکو احصائیه راټوله کړې ده، چې په لاندې دیاګرام کې لیکل شوې ده.



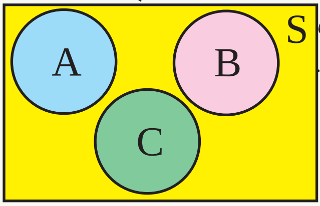
په شکل کې ټول هغه زده کوونکي، چې خویندې لري د A په سټ او هغه زده کوونکي، چې وروڼه لري، د B په سټ سره ښودل شوي دي.
شکل په پام کې ونیسئ، د لاندې فعالیت سوالونو ته ځواب پیدا کړئ:

- څو تنه خویندې لري؟
- څو تنه وروڼه لري؟
- څو تنه هم خویندې او هم وروڼه لري؟
- څو تنه، نه خویندې او نه وروڼه لري؟
- څرنګه کولی شو، دا مسأله د ریاضي په ژبه ولیکو؟
- ټول هغه کسان، چې خویندې نه لري، څو تنه دي؟

لیدل کېږي، چې پورتنی ګراف کولی شي چې پورتنیو ټولو سوالونو او د هغوی په څېر نورو سوالونو ته، په ښه توګه ځواب ورکړئ.
نو له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

پایله: لیدل کېږي چې دسټ د تیوري په کارولو سره، د ډېرو هغو مسایلو حل، چې په ورځني ژوند کې ورسره مخامخ کېږو حل پیداکړو، او هغه و ارزوو.
د سټ د تیوري تطبیق، په احتمالاتو کې او یا په بل عبارت د هغو ناڅاپي پېښو د پېښیدو د مسائلو حل او د سټ تیوری په مرسته، د هغې ښودنه، د سټ تیوري یوه بله د اهمیت وړ د تطبیق ساحه شمېرل کیدای شي.

مثال: د S د نمونه یي فضا او د B, A او C ناڅاپه پېښې، په لاندې ډیاګرام کې ورکړل شوې دي، په پام کې ونیسئ، د لاندې پېښو د پېښدو احتمال مطلوب دی



a. د دې احتمال، چې د A یا B ناڅاپي پېښه رامنځته شي
b. د دې احتمال، چې د A پېښه، رامنځته شي.
c. د دې احتمال، چې د C پېښه، رامنځته شي.

حل:

a. د A یا B احتمال په حقیقت کې د $A\cup B$ احتمال دی، څرنګه چې، دا پېښې یو له بل څخه بېلې یا مستقلې دي، یعنې $A\cap B=\phi$ دی، نو: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

b) د دې احتمال، چې د A ناڅاپي پېښه رامنځته شي،په دې معنا چې، د $\overline{A}$ پېښه نه ده پېښه شوی، په بل عبارت، هغه پېښه ده، چې د C یا B حادثه پېښه نه شي نو:
$P(A)=1-P(\overline{A})$ څرنګه چې $P(\overline{A})=P(C\cup B)$ دی نو
$P(A)=1-(P(C\cup B))=1-P(C)-P(B)$

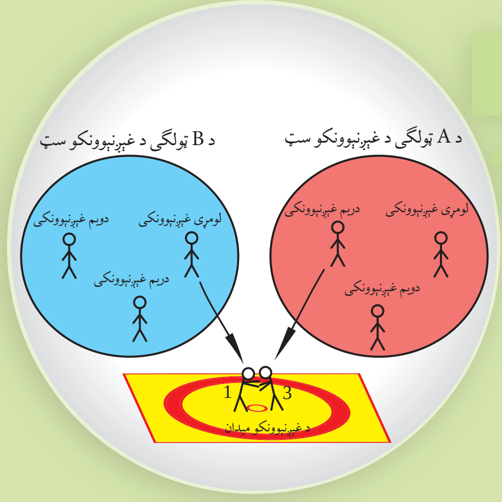
c) د دې احتمال چې د C ناڅاپي پېښه رامنځته نه شي د هغې پېښې د پېښیدو له احتمال سره برابر دی چې د A یا B پېښې، پېښې شي او دا د $A\cup B$ دپېښې د پېښیدو څخه عبارت ده.

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

پوښتني

1- هغه مثال چې په فعالیت کې مو ترې ګټه اخیستې ده په پام کې ونیسئ:
a) د دې احتمال مطلوب دی چې له دې ټولګي څخه یو زده کوونکی په تصادفي یا ناڅاپي ډول وټاکل شي، چې خور او ورو ونه لري.
b) د یوه داسې زده کوونکي د ټاکلو احتمال، چې په ناڅاپي ډول ټاکل کېږي، پیدا کړئ، چې لږ تر لږه خور یا ورور ولري.

د شمېرنې اصل



د A او B دوو ټولګیو څخه، درې تنه د غېږې نیولو لپاره ټاکل شوي دي، د A او B د ټیمونو غړي، په څو ډوله کولای شئ، چې یو له بل سره په غېږه ورشي؟

فعالیت

دوه عدده، تور او سرمه يي رنګه پتلونونه له درې عدده سپين، آبي او پولادي رنګه کميسونو سره په پام کې نيسو.

- په څو ډوله کولای شوو، هغه په ځان کړو(واغوندو) ؟
- د شمېرنې د ترتيب لپاره له ونه ييز ګراف څخه ګټه واخلئ.
- د اغوستلو د ټولو امکاناتو او د پتلونونو او کميسونو د شمېر تر منځ څه ډول اړيکه شته ده؟

له پورتني فعاليت څخه، لاندې پايله په لاس راوړو.

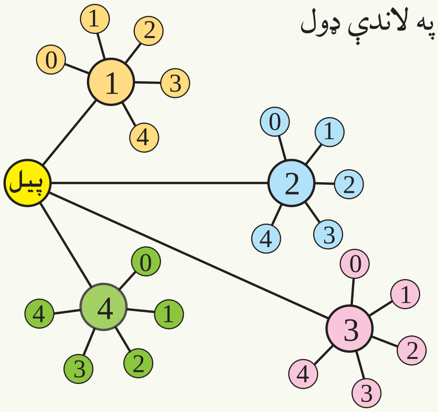
پايله:

1- د دوو سټونو د عناصرو په ترکيب کې، د ټولو امکاناتو شمېر، د هر سټ د عناصرو د شمير د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

2- که چېرې د امکاناتو شمېر او يا د يوه سټ عناصر، په m او د يوه بل سټ د عناصرو شمېر مساوي په n وي، په دې حالت کې، دواړه ټاکنې يو له بل سره په $(m\times n)$ ډوله امکان لري.

مثال: د 0، 1، 2، 3 او 4 رقمونو څخه په ګټې اخستنې سره، څو دوه رقمي عددونه جوړولای شو؟ ونه ييز ګراف يې رسم کړئ او هغه احتمال پيدا کړئ چې له دې عددونو څخه يو عدد په اتفاقي(ناڅاپي) ډول و ټاکل شي، چې هغه عدد په 2 د ويش وړ وي.

د دې کار لپاره، د ذکر شوي دوه رقمي عدد د جوړولو لپاره، دوه تش ځايونه ▭▭ د هر رقم لپاره په پام کې نيسو.
له کيڼې خوا په په تش ځای کې، د راکړل شويو پنځو رقمونو څخه 4 امکانه (پرته له صفر) د $3,2,1,0$ او 4 عددونو د ځای پر ځای کولو لپاره شته دي، خو د ښي خوا د تش ځای لپاره $3,2,1,0$ او 4 هرو پنځو عددونو څخه ګټه اخلو. په دې ترتيب، د دې رقم د ټاکلو پنځه امکانه شته دي چې په مجموعي ډول، د پورتنيو عددونو په وسيله، د دوه رقمي عدد د جوړولو لپاره $4\times5=20$ امکانه شته دي.
دا مطلب کولای شو د ونه ييز ګراف په مرسته په لاندې ډول وښيو، لکه:



د دې لپاره چې، نوموړی، رقم پر 2 د وېش وړ وي پر د ښی خوا په تش ځای کې، د 5 برابرو (مساعدو) امکاناتو څخه، يوازې 3 امکانه، د ($2,0$ او 4) شته دی. د داسې عددونو د جوړولو لپاره، چې پر 2 د وېش وړ وي، د $12=3\times4$ برابر حالتونه دي چې په دې حالت کې، د هغه رقم د ټاکل کيدو احتمال، چې پر 2 د وېش وړ وي عبارت دي له:

$$P(\text{په 2 د وېش وړ عدد})=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}=0.6=60\%$$

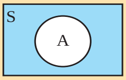
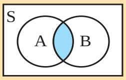
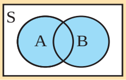
دهغه عدد احتمال، چې په 2 د وېش وړ وي.

پوښتنې

1- د (م، ر، ی،م) تورو څخه په ګټې اخيستنې سره، څو څلور حرفي معنا لرونکي او معنا نه لرونکي کليمې جوړولای شو؟ موضوع د ونه ييز ګراف په مرسته تشريح کړئ؟
که چيرې له دې ترکيبي کلمو څخه، په ناڅاپي ډول يوه کلمه وټاکو، د دې احتمال پيدا کړئ، چې دا کلمه((مريم)) وي.
2- د $8,7,4,1,0$ او 9 عددونو څخه، د مبايل تليفون څو داسې شپږ رقمي نمرې جوړولای شو چې له کيڼې خوا څخه، په 077 پيل شوي وي؟

د نهم څپرکي لنډیز:

• د دې لپاره، چې وکولای شو، د ناخاپي پېښو د ترکیب د بېلا بېلو حالتونو د پرتله کولو لپاره، د سټونو د تیوري په کارولو سره، یو ښه تصور ولرو، هغه مو په لاندې جدول کې راټول کړل.

د پېښې احتمال	د Venn دیاګرام او ناخاپي پېښه	د بیان شوده د سټ په واسطه	د ناخاپي پېښې بیان
څرنګه چې $P(S)=1$ دی نو $P(A)=1-P(\overline{A})$		$\overline{A}=S-A$ یا $S=A\cup\overline{A}$	د S هغه ټولې ناخاپي پېښې چې د A پېښه په کې ګډون و نه لري د A پېښې عکس دی.
$P(A\cap B)$		$A\cap B$	د A ناخاپه پېښه او د B ناخاپه پېښه پېښېږي.
$P(A\cup B)$ $=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$		$A\cup B$	لږ تر لږه د A یا د B د ناخاپي پېښو څخه یوه پېښېږي.

د شمېرني حل: د دوو سټونو د عناصرو په ترکیب کې، د ټولو امکاناتو شمېر، د هرې ترکیبي مجموعې، د عناصر د ضرب له حاصل سره مساوي دی.
که د سټ د عنصرونو امکان، په m ډول او د بل سټ د عنصرونو(غړو) امکان، په n ډول، وي د دوی یو د بل سره د ترکیب د ټولو امکاناتو شمېر، د $m\times n$ سره برابر دی.

د نهم څپرکي پوښتنې

1–که S یوه نمونه یي فضا او A د هغې یوه ناخاپه پېښه وي وښیاست چې:

a) که $A\subseteq\phi$ وي، وښيئ چې $P(A)=0$ دی.

b) که $S\subseteq A$ وي، په دې حالت کې $P(A)=1$ دی.

2- که چیرې د C ناخاپي پېښه، د A او B ناخاپي پېښې په ځان کې ولري، وښيئ چې همدارنګه، د C ناخاپي پېښه د $A\cup B$ په ځان کې ولري.

3- که چیرې S د A او B یوه نمونه یي فضا وي، د B او $A\cup B$ ناخاپي پېښې یو بل په بر کې ولري، وښيئ چې، د $A\cup B$ او د B احتمال یو د بل سره برابر دی.

4- که د S په یوه نمونه یي فضا کې، د B ناخاپه پېښه، د A پېښه په بر کې ولري، وښيئ چې د A او $A\cup B$ ناخاپه پېښې یو بل په ځان کې لري. برسېره پر دې ښکاره (واضح) کړئ، چې د دې ناخاپي پېښو احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري.

5- که چیرې S یوه نمونه یي فضا وي او B د هغې یوه ناخاپه پېښه وي، وښيئ چې: $S-B=\overline{B}$.

6- د ګراف په مرسته وښيئ چې Sد یوې نمونه یي فضا د A او B دوو ناخاپي پېښو لپاره $B-A$ او $\overline{A}-\overline{B}$ سره مساوي دي، یعني: $\overline{A}-\overline{B}=B-\overline{A}$.

7- وښيئ چې، د $\overline{A}\cap\left[(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\right]$ ناخاپي پېښ، احتمال له صفر سره مساوي دی.